ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4

Μονώνυμα

- Το γινόμενο μεταβλητών και σταθερών λέγεται μονώνυμο και είναι μια αλγεβρική παράσταση.
- Αντιπαραβάλλεται με το πολυώνυμο, το οποίο είναι άθροισμα μονωνύμων.
- αx^{n}
- α ο συντελεστής του μονωνύμου
- n είναι θετικός ακέραιος και είναι ο βαθμός του ως προς την μεταβλητή x

Πολυώνυμο ονομάζεται μια παράσταση μεταξύ μονωνύμων τα οποία δεν είναι όλα όμοια μεταξύ τους.

Εάν ένα **πολυώνυμο ισούται με έναν αριθμό** ονομάζεται ***σταθερό πολυώνυμο***.

Εάν ένα **πολυώνυμο ισούται με το μηδέν** ονομάζεται ***μηδενικό πολυώνυμο***.

Ένα πολυώνυμο που έχει **δύο όρους** ονομάζεται ***διώνυμο***, ενώ αν έχει **τρεις όρους** λέγεται ***τριώνυμο*.**

Για παράδειγμα το $3xy+5x^2$ είναι διώνυμο, ενώ το $6x^2+7xy-2z^3$ είναι τριώνυμο.

Ένα πολυώνυμο που έχει μόνο μία μεταβλητή συμβολίζεται με $P(x)$, ή $Q(x)$ ή με $P(y)$, ή $Q(y)$ κλπ. αν οι μεταβλητές είναι x και y αντίστοιχα.

Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή (ή περισσότερες μεταβλητές του), ονομάζεται **o μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων** του ως προς τη μεταβλητή αυτή (ή τις μεταβλητές αυτές).

Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Να γίνουν οι πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις:

α) $(\alpha - \beta - 1)(\alpha + \beta + 1) + 2\beta$

Λύση: Με απαλοιφή των παρενθέσεων και αναγωγή ομοίων όρων έχουμε:

α) $(\alpha - \beta - 1)(\alpha + \beta + 1) + 2\beta =$

$$= \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha - \alpha\beta - \beta^2 - \beta - \alpha - \beta - 1 + 2\beta = \alpha^2 - \beta^2 - 1$$

β) $(2x^2 - 3x - 6)(x^2 - x + 2) =$

β) $(2x^2 - 3x - 6)(x^2 - x + 2) =$

$$= 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x^3 + 3x^2 - 6x - 6x^2 + 6x - 12 =$$

$$= 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 12$$

γ) $(x+1)(x-2)(x-3)=$

γ) $(x+1)(x-2)(x-3) = (x^2-2x+x-2)(x-3) =$

$$(x^2-x-2)(x-3) = x^3-3x^2-x^2+3x-2x+6 =$$

$$= x^3-4x^2+x+6$$

Να γίνουν οι πράξεις

- $(2x - y + 4x^3) * (4 - 2z + y^3) =$

Να γίνουν οι πράξεις

- $(2x - y + 4x^3) * (4 - 2z + y^3) =$
- $8x - 4y + 16x^3 - 4xz + 2yz - 8x^3z + 2xy^3 - y^4 + 4x^3y^3$

Ταυτότητες

- $(\alpha+\beta)^2 = a^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha-\beta)^2 = a^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- $a^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
- $(\alpha+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
- $(\alpha-\beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- $a^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(a^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
- $a^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(a^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
- $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

Να βρεθούν τα παρακάτω αναπτύγματα των ταυτοτήτων:

α) $(9+k)^2$

α) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2 = a^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ και θέτουμε

όπου $\alpha = 9$ και όπου $\beta = k$ οπότε έχουμε:

$$(9+k)^2 = 9^2 + 2\cdot 9\cdot k + k^2 = k^2 + 18k + 81$$

β) $\left(2x - 3y\right)^2$

β) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $(\alpha-\beta)^2=a^2-2\alpha\beta+\beta^2$ και θέτουμε όπου $\alpha=2x$ και $\beta=3y$ οπότε έχουμε:

$$(2x-3y)^2=(2x)^2-2(2x)(3y)+(3y)^2=4x^2-12xy+9y^2$$

γ) $(2z+1)^3$

γ) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

και θέτουμε όπου $\alpha = 2z$ και όπου $\beta = 1$ οπότε έχουμε:

$$(2z+1)^3 = (2z)^3 + 3 \cdot (2z)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (2z) \cdot 1^2 + 1^3 =$$

$$= 8z^3 + 12z^2 + 6z + 1$$

δ) $(k + 10)(10 - k)$

δ) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $a^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ και θέτουμε

όπου $\alpha = 10$ και $\beta = k$ οπότε έχουμε:

$$(k + 10)(10 - k) = (10 + k)(10 - k) = 10^2 - k^2 = 100 - k^2$$

Να αποδειχτούν οι παρακάτω ισότητες:

α) $(x^2 + 1)^2 - x^2(x^2 + 2) = 1$

α) $(x^2+1)^2 - x^2(x^2+2) = x^4 + 2x^2 + 1 - x^4 - 2x^2 = 1$

β) $(\alpha + \beta)[(\alpha - \beta)^2 + \alpha\beta] = \alpha^3 + \beta^3$

β) $(\alpha+\beta)[(\alpha-\beta)^2+\alpha\beta]=(\alpha+\beta)[\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\alpha\beta]=$

$$=\alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+\beta\alpha^2-2\alpha\beta^2+\beta^3+\alpha\beta^2=\alpha^3+\beta^3$$

- **Όταν ένα γινόμενο παραγόντων είναι μηδέν**
- **$(x+2)\ (x-3) = 0 \Leftrightarrow (x+2)=0$ ή $(x+3)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$**

Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

- Μια αλγεβρική παράσταση με τη μορφή **κλάσματος** και με **όρους πολυώνυμα**, ονομάζεται **ρητή αλγεβρική παράσταση**.
- Σε μια ρητή αλγεβρική παράσταση πρέπει ο **παρονομαστής** να είναι **πάντα διάφορος του μηδενός** για κάθε τιμή των μεταβλητών.

Να λυθεί η εξίσωση

- $\frac{-3x^2+2x}{3x} = \frac{x^2-2x}{4x}$

- $\frac{-3x^2+2x}{3x} = \frac{x^2-2x}{4x} \Leftrightarrow \frac{x(-3x+2)}{3x} = \frac{x(x-2)}{4x}$ (x≠0)
- $\Leftrightarrow \frac{(-3x+2)}{3} = \frac{(x-2)}{4}$
- *Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το 12*
- $\Leftrightarrow 12 * \frac{(-3x+2)}{3} = 12 * \frac{(x-2)}{4}$
- $\Leftrightarrow 4 * (-3x+2) = 3 * (x-2)$
- $\Leftrightarrow -12x + 8 = 3x - 6$
- $\Leftrightarrow -12x - 3x = -8 - 6$
- $\Leftrightarrow -15x = -14$
- $\Leftrightarrow x = \frac{14}{15}$

Να λυθεί η εξίσωση

- $\frac{-x^2-x}{3x+3} = 0$

Να λυθεί η εξίσωση

- $\frac{-x^2-x}{3x+3} = 0$
- $\Leftrightarrow \frac{-x(x-1)}{3(x+1)} = 0$
- *Ο παρονομαστή πρέπει να είναι διάφορος τους μηδενός* $3(x+1) \neq 0$*, δηλαδή* $x \neq -1$
- *Για να είναι το κλάσμα μηδέν θα πρέπει ο αριθμητής να είναι μηδέν, δηλαδή* $-x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; \eta \; x = 1$

Να βρεθούν οι τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι επόμενες

παραστάσεις :

a) $$\frac{12\alpha}{x^3 - 49x}$$

a) $\frac{12\alpha}{x^3-49x}$

α) Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει ο παρονομαστής του κλάσματος να είναι πάντα διάφορος του μηδενός. Άρα πρέπει $x^3-49x \neq 0 \Rightarrow$ $\chi \neq 0 \; και \; x^2-49 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 7$.

Οπότε, το πεδίο ορισμού της παράστασης είναι το

$$A=\{\alpha \in \mathcal{R}, x \in \mathcal{R}-\{0, \pm 7\}\}$$

β) $$\frac{3}{2(x+5)-3(x-2)}$$

β) $\dfrac{3}{2(x+5)-3(x-2)}$

β) Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει να ισχύει

$$2(x+5)-3(x-2) \neq 0 \Rightarrow 2x+10-3x+6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 16$$

Οπότε το πεδίο ορισμού της παράστασης είναι $B = \{\, x \in \mathcal{R} - \{16\}\}$

$$\gamma)\ \frac{5x+10}{(y+3)^2-(y-1)^2}$$

$$\gamma)\ \frac{5x+10}{(y+3)^2-(y-1)^2}$$

γ) Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει

$$(y+3)^2-(y-1)^2 \neq 0 \Rightarrow y^2+6y+9-y^2+2y-1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y+8 \neq 0 \Rightarrow 8(y+1) \neq 0 \Rightarrow y \neq -1$$

Το x μπορεί να πάει οποιαδήποτε τιμή. Οπότε το πεδίο ορισμού της παράστασης είναι $\Gamma = \{x \in \mathcal{R}, y \in \mathcal{R} - \{-1\}\}$

δ) $$\frac{1}{(x+2)^2[3(x+2)-12]}$$

δ) $\dfrac{1}{(x+2)^2[3(x+2)-12]}$

δ) Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει

$$(x+2)^2[3(x+2)-12] \neq 0 \Rightarrow (x+2)^2[3x+6-12] \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)^2(3x-6) \neq 0 \Rightarrow 3(x+2)^2(x-2) \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

Οπότε το πεδίο ορισμού της παράστασης είναι $\Delta = \left\{x \in \mathcal{R} - \{\pm 2\}\right\}$

Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $\dfrac{-\alpha-\beta}{-3(\alpha+\beta)}$

β) $\dfrac{6x^2y+2x^3}{6x^2y+18xy^2}$

Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $\dfrac{-\alpha-\beta}{-3(\alpha+\beta)}$ β) $\dfrac{6x^2y+2x^3}{6x^2y+18xy^2}$

α) $$\frac{-\alpha-\beta}{-3(\alpha+\beta)} = \frac{-(\alpha+\beta)}{-3(\alpha+\beta)} = \frac{1}{3}$$

β) $$\frac{6x^2y+2x^3}{6x^2y+18xy^2} = \frac{2x^2(3y+x)}{6xy(x+3y)} = \frac{2x^2}{6xy} = \frac{x}{3y}$$

γ) $$\frac{15x^2yz^3}{5x^2y + 10x^2z}$$

δ) $$\frac{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}{x^2 - 2}$$

γ) $\dfrac{15x^2yz^3}{5x^2y+10x^2z}$

δ) $\dfrac{x^2+2\sqrt{2}x+2}{x^2-2}$

γ) $$\frac{15x^2yz^3}{5x^2y+10x^2z}=\frac{15x^2yz^3}{5x^2(y+2z)}=\frac{3yz^3}{(y+2z)}$$

δ) $$\frac{x^2+2\sqrt{2}x+2}{x^2-2}=\frac{\left(x+\sqrt{2}\right)^2}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}=\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}$$

Να γίνουν οι πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\dfrac{4x-1}{x^2-1}-\dfrac{x+2}{x^2-1}$

Να γίνουν οι πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\dfrac{4x-1}{x^2-1}-\dfrac{x+2}{x^2-1}$

α) Τα κλάσματα είναι ομώνυμα, οπότε:

$$\frac{4x-1}{x^2-1}-\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{4x-1-x-2}{x^2-1}=\frac{3x-3}{x^2-1}=$$

$$=\frac{3(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3}{(x+1}$$

β) $\dfrac{3\alpha}{2x^2}+\dfrac{\alpha}{4x}$

β) Τα κλάσματα δεν έχουν κοινό παρονομαστή οπότε πρέπει να γίνουν ομώνυμα. Αρχικά βρίσκουμε το $ΕΚΠ$ των παρονομαστών, το οποίο είναι το $4x^2$ αφού το $ΕΚΠ(2,4) = 4$ και το x^2 προκύπτει από το γινόμενο των βάσεων (κοινών και μη κοινών), καθεμία με εκθέτη το μεγαλύτερο από τους εκθέτες με τον οποίο εμφανίζεται στα αρχικά μονώνυμα.

Οπότε έχουμε

$$\frac{3\alpha}{2x^2} + \frac{\alpha}{4x} = \frac{2 \cdot 3\alpha}{2 * 2x^2} + \frac{\alpha x}{4x^2} = \frac{6a + ax}{4x^2} = \frac{a(6+x)}{4x^2}$$

γ) $\frac{\alpha}{9x^4y^5} - \frac{\alpha}{6x^3y^6}$

γ) Το $ΕΚΠ(6,9) = 18$ και το $ΕΚΠ$ των x^4y^5 και x^3y^6 είναι το x^4y^6 (το γινόμενο των βάσεων (κοινών και μη κοινών), καθεμία με εκθέτη τον μεγαλύτερο από τους εκθέτες με τον οποίο εμφανίζεται στα αρχικά μονώνυμα).Επομένως τα κλάσματα πρέπει να έχουν παρονομαστή τον $18x^4y^6$.

$$\frac{\alpha}{9x^4y^5} - \frac{\alpha}{6x^3y^6} = \frac{2y \cdot \alpha}{2y \cdot 9x^4y^5} - \frac{3x \cdot \alpha}{3x \cdot 6x^3y^6} =$$

$$= \frac{2\alpha y - 3\alpha x}{18x^4y^6} = \frac{\alpha(2y - 3x)}{18x^4y^6}$$

δ) $\dfrac{5x}{2\alpha^3} - \dfrac{2x^2}{3\alpha^2} + \dfrac{5x^3}{4\alpha}$

δ). Τα κλάσματα δεν έχουν κοινό παρονομαστή οπότε πρέπει να γίνουν ομώνυμα. Αρχικά βρίσκουμε το $ΕΚΠ$ των παρονομαστών, το οποίο είναι το $12a^3$ αφού το $ΕΚΠ(2,3,4) = 12$ και το a^3 προκύπτει από το γινόμενο των βάσεων (κοινών και μη κοινών), καθεμία με εκθέτη το μεγαλύτερο από τους εκθέτες με τον οποίο εμφανίζεται στα αρχικά μονώνυμα.

Οπότε έχουμε

$$\frac{5x}{2\alpha^3} - \frac{2x^2}{3\alpha^2} + \frac{5x^3}{4\alpha} = \frac{6 \cdot 5x}{6 \cdot 2\alpha^3} - \frac{4a \cdot 2x^2}{4a \cdot 3\alpha^2} + \frac{3\alpha^2 \cdot 5x^3}{3\alpha^2 \cdot 4\alpha} =$$

$$= \frac{30x}{12\alpha^3} - \frac{8ax^2}{12\alpha^3} + \frac{15\alpha^2 x^3}{12\alpha^3} = \frac{30x - 8ax^2 + 15\alpha^2 x^3}{12\alpha^3}$$

- Το x σε μια συνάρτηση f(x) παίρνει τιμές μέσα από ένα σύνολο αριθμών που ονομάζεται Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης f.
  - **Το Πεδίο Ορισμού μπορεί να μας δίνεται μαζί με τον τύπο της συνάρτησης.**
  - **Στην πράξη όμως αυτό δεν συμβαίνει ποτέ.**
- Εκείνο που γίνεται είναι ότι μας δίνεται μόνο ο τύπος της συνάρτησης και εμείς πρέπει να βρούμε το ευρύτερο δυνατό **υποσύνολο του**
  - **στο οποίο ορίζεται η f χωρίς πρόβλημα.**
- Αυτή η διαδικασία ονομάζεται εύρεση του πεδίου ορισμού.

- Να *βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης*
- $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$

- Να *βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης*
- $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$
- *Λύση*
- *Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν και μόνο όταν*
- $-x^2 + 2x \geq 0$
-
- *Βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης* $-x^2 + 2x = 0$
- $-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- $-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-x+2) = 0 \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x = 0 \\ -x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$
- *Επειδή, λοιπόν, ζητείται η υπόριζη ποσότητα να είναι* ≥ 0*, συνάγεται ότι το πεδίο ορισμού είναι A=[0, 2]*

x	**-∞**	**0**	**2** **+∞**
$-x^2 + 2x$	-	+	-
	Ομόσημο του α	Ετερόσημο του α	Ομόσημο του α

- *Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης*
- $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}}$

- *Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης*
- $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}}$
- *Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν και μόνο όταν*
- $x \geq 0$ *και*
- $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$
- *Συναληθεύουν για* $x > 4$
- *Το πεδίο ορισμού είναι Α=(4, +∞)*

x	-∞	0	4	+∞
$x \geq 0$	-	+	+	
$x > 4$	-	-	+	

- *Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης*
- $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{\sqrt{2x-2}}$

- *Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης*
- $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{\sqrt{2x-2}}$
- *Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν και μόνο όταν*
- $x + 3 > 0 \Longrightarrow x > -3$ *και*
- $2x - 2 > 0 \Rightarrow 2(x-1) > 0 \Longrightarrow x > 1$
- *Συναληθεύουν για* $x > 1$

Το πεδίο ορισμού είναι Α=(1, +∞)

x	**-∞**	**-3**	**1**	**+∞**
$x > -3$	-	+	+	
$x > 1$	-	-	+	

Το τριώνυμο

Τριώνυμο ονομάζεται κάθε παράσταση η οποία μπορεί να πάρει τη μορφή

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$$

Με, $\alpha \neq 0$**,** με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς και x μια μεταβλητή η οποία παίρνει τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών ($\in \mathcal{R}$).

Παραδείγματα τριωνύμων:

$$3x^2 - 2x + 4 \qquad (a = 3, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 4)$$

$$x^2 - 5 \qquad (a = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -5)$$

$$2x^2 + x \qquad (a = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0)$$

Διακρίνουσα και ρίζες του τριωνύμου

Διακρίνουσα του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ονομάζουμε τον αριθμό $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$. Εξετάζοντας τη διακρίνουσα έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\Delta > 0$ τότε υπάρχουν δύο τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες η τιμή της παράστασης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ μηδενίζεται

Οι τιμές αυτές είναι οι

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Οι τιμές x_1 και x_2 λέγονται ρίζες του τριωνύμου και είναι οι μοναδικές τιμές της μεταβλητής x που μηδενίζουν την παράσταση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$. Με άλλα λόγια, οι x_1 και x_2 αποτελούν λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$. Για κάθε άλλη τιμή της μεταβλητής x έχουμε $f(x) \neq 0$.

- Αν $\Delta = 0$ τότε υπάρχει μία μόνο τιμή της μεταβλητής x για την οποία η τιμή της παράστασης$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ μηδενίζεται και αυτή είναι η

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

η οποία λέγεται διπλή ρίζα του τριωνύμου. Για κάθε άλλη τιμή της μεταβλητής x έχουμε $f(x) \neq 0$.

- **Αν $\Delta < 0$ τότε δεν υπάρχει πραγματική τιμή της μεταβλητής x για την οποία να μηδενίζεται το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, οπότε για κάθε τιμή της μεταβλητής x έχουμε $f(x) \neq 0$. Η εξίσωση χαρακτηρίζεται ως αδύνατη στο $\mathcal{R}$.**

Ένας άλλος τρόπος για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο είναι με τη χρήση της διακρίνουσας. Έστω το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$.

- Αν $\Delta > 0$ αποδεικνύεται ότι το τριώνυμο γράφεται ως $ax^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$, όπου x_1 και x_2 είναι οι δύο λύσεις του τριωνύμου
- Αν $\Delta = 0$ αποδεικνύεται ότι το τριώνυμο γράφεται ως $ax^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_0)^2$, όπου x_0 είναι η μοναδική λύση του τριωνύμου
- **Αν $\Delta < 0$ το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές λύσεις και δεν αναλύεται σε γινόμενο όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις.**

- *α) Να βρεθούν οι ρίζες του τριωνύμου*
- *β) Να προσδιοριστούν τα πρόσημα του τριωνύμου στο πεδίο ορισμού*
- *γ) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο*
- $-x^2 + 3x - 2 = 0$

- *Να βρεθούν οι ρίζες του τριωνύμου*
- $-x^2 + 3x - 2 = 0$
- $\Delta = 3^2 - 4 * (-1) * (-2) = 9 - 8 = 1$
- $x_{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2*(-1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{-3+1}{-2} = 1 \\ x_2 = \frac{-3-1}{-2} = 2 \end{cases}$
- *Για* $x_1 = 1$ *η εξίσωση με αντικατάσταση μηδενίζεται* $-1^2 + 3 * 1 - 2 = 0$
- *Για* $x_1 = 2$ *η εξίσωση με αντικατάσταση μηδενίζεται* $-2^2 + 3 * 2 - 2 = 0$

- *β) Να προσδιοριστούν τα πρόσημα του τριωνύμου στο πεδίο ορισμού*

- $x_{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2*(-1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{-3+1}{-2} = 1 \\ x_2 = \frac{-3-1}{-2} = 2 \end{cases}$

x	**-∞**	**1**	**2 +∞**
$-x^2 + 3x - 2$	-	+	-
	Ομόσημο του α	Ετερόσημο του α	Ομόσημο του α
Π.χ. έστω x=0	$-0^2 + 3 * 0 - 2 = -2$		

- *γ) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο*
- $-x^2 + 3x - 2 = 0$
- $x_{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2*(-1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{-3+1}{-2} = 1 \\ x_2 = \frac{-3-1}{-2} = 2 \end{cases}$
- *Παραγοντοποίηση*
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2) = -x^2 + 3x - 2 = -(x-1)(x-2)$

ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

<table>
<tr>
<th>I) $\Delta > 0$</th>
<th>II) $\Delta = 0$</th>
<th>III) $\Delta < 0$</th>
</tr>
<tr>
<td>

Α) Επίλυση εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

Η εξίσωση έχει δύο ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

</td>
<td>

Α) Επίλυση εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

Η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα:

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

</td>
<td>

Α) Επίλυση εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Β) Εύρεση πρόσημου του τριωνύμου:

<table>
<tr><th></th><th>$-\infty$</th><th>x_1</th><th></th><th>x_2</th><th>$+\infty$</th></tr>
<tr><td>$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$</td><td>Ομόσημο του α</td><td>0</td><td>Ετερόσημο του α</td><td>0</td><td>Ομόσημο του α</td></tr>
</table>

</td>
<td>

Β) Εύρεση πρόσημου του τριωνύμου:

<table>
<tr><th></th><th>$-\infty$</th><th>x_0</th><th>$+\infty$</th></tr>
<tr><td>$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$</td><td>Ομόσημο του α</td><td>0</td><td>Ομόσημο του α</td></tr>
</table>

</td>
<td>

Β) Εύρεση πρόσημου του τριωνύμου:

<table>
<tr><th></th><th>$-\infty$ $+\infty$</th></tr>
<tr><td>$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$</td><td>Ομόσημο του α</td></tr>
</table>

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Γ) Παραγοντοποίηση:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$

</td>
<td>

Γ) Παραγοντοποίηση:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_0)^2$

</td>
<td>

Γ) Παραγοντοποίηση:

Σε αυτή

παραγο

</td>
</tr>
</table>

- ***α) Να βρεθούν οι ρίζες του τριωνύμου***
- *β) Να προσδιοριστούν τα πρόσημα του τριωνύμου στο πεδίο ορισμού*
- *γ) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο*
- $-x^2 + 2x + 3$

- *α) Να βρεθούν οι ρίζες του τριωνύμου*
- $-x^2 + 2x + 3$
- $\Delta = 2^2 - 4 * (-1) * (3) = 4 + 12 = 16$
- $x_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2*(-1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2+4}{-2} = -1 \\ x_2 = \frac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$
- *Για* $x_1 = -1$ *η εξίσωση με αντικατάσταση μηδενίζεται* $-(-1)^2 + 2 * (-1) + 3 = 0$
- *Για* $x_1 = 3$ *η εξίσωση με αντικατάσταση μηδενίζεται* $-3^2 + 2 * 3 + 3 = 0$

- *β) Να προσδιοριστούν τα πρόσημα του τριωνύμου στο πεδίο ορισμού*

- $x_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2*(-1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2+4}{-2} = -1 \\ x_2 = \frac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$

x	-∞	-1	3 +∞
$-x^2 + 3x - 2$	-	+	-
	Ομόσημο του α	Ετερόσημο του α	Ομόσημο του α
Π.χ. έστω x=-2	$-(-2)^2 + 3 * * (-2) + 3 = -7$		

- *γ) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο*
- $-x^2 + 2x + 3 = 0$

- $x_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2*(-1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2+4}{-2} = -1 \\ x_2 = \frac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$

- *Παραγοντοποίηση*
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2) =$
- $= -x^2 + 2x + 3 = -(x + 1)(x - 3)$

- ***α) Να βρεθούν οι ρίζες του τριωνύμου***
- *β) Να προσδιοριστούν τα πρόσημα του τριωνύμου στο πεδίο ορισμού*
- *γ) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο*
- $x^2 + 5x + 6$

- *α) Να βρεθούν οι ρίζες του τριωνύμου*
- $x^2 - 5x + 6$
- $\Delta = (-5)^2 - 4 * (1) * (6) = 25 - 24 = 1$
- $x_{12} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 * (1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$

- *β) Να προσδιοριστούν τα πρόσημα του τριωνύμου στο πεδίο ορισμού*

- $x_{12} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2*(1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$

x	**-∞**	**2**	**3 +∞**
$-x^2 + 3x - 2$	+	-	+
	Ομόσημο του α	Ετερόσημο του α	Ομόσημο του α
Π.χ. έστω x=0	$(0)^2 - 5 * (0) + 6 = 6$		

- *γ) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο*
- $x^2 - 5x + 6$

- $x_{12} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 * (1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$

- *Παραγοντοποίηση*
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2) =$
- $= x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

Έστω το τριώνυμο $f(x) = x^2 + x - 12$. Να βρεθούν οι τιμές του τριωνύμου αυτού, για διάφορες τιμές της μεταβλητής x . Τί παρατηρείτε;

Απάντηση: Θα δώσουμε διάφορες τιμές στο x και θα δούμε το πρόσημο που παίρνει το τριώνυμο.

Για $x = -5: f(-5) = x^2 + x - 12 = (-5)^2 - 5 - 12 = 8 > 0$

Για $x = -4: f(-4) = x^2 + x - 12 = (-4)^2 - 4 - 12 = 0$

Για $x = -3: f(-3) = x^2 + x - 12 = (-3)^2 - 3 - 12 = -6 < 0$

Για $x = -2$: $f(-2) = x^2 + x - 12 = (-2)^2 - 2 - 12 = -14 < 0$

Για $x = -1$: $f(-1) = x^2 + x - 12 = (-1)^2 - 1 - 12 = -12 < 0$

Για $x = 0$: $f(0) = x^2 + x - 12 = 0^2 + 0 - 12 = -12 < 0$

Για $x = 1$: $f(1) = x^2 + x - 12 = 1^2 + 1 - 12 = -10 < 0$

Για $x = 2$: $f(1) = x^2 + x - 12 = 2^2 + 2 - 12 = -6 < 0$

Για $x = 3$: $f(1) = x^2 + x - 12 = 3^2 + 3 - 12 = 0$

Για $x = 4$: $f(1) = x^2 + x - 12 = 4^2 + 4 - 12 = 8 > 0$

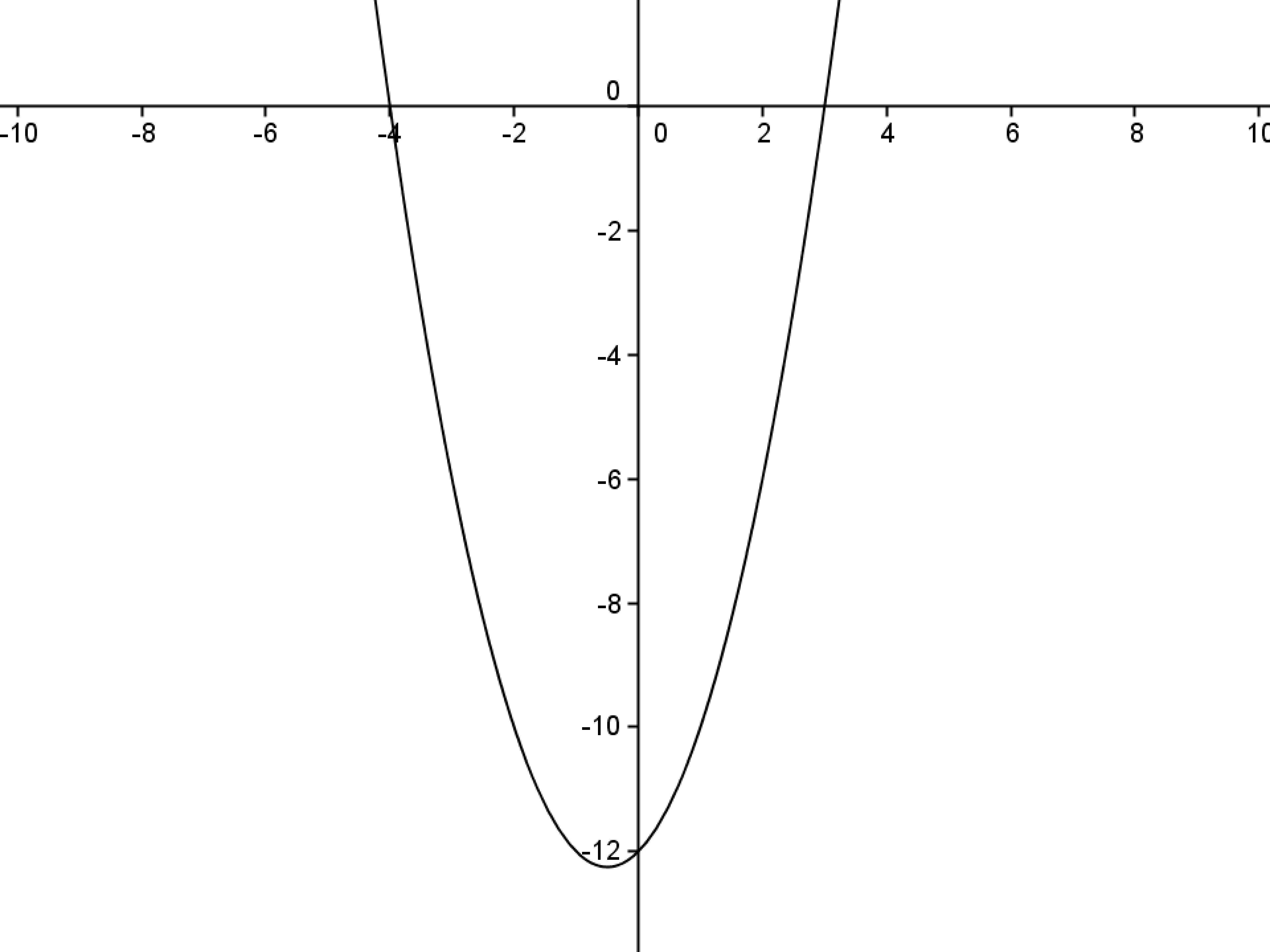
Για $x = 5$: $f(1) = x^2 + x - 12 = 5^2 + 5 - 12 = 18 > 0$

Πίνακας. Διάφορες τιμές του τριωνύμου $f(x) = x^2 + x - 12$

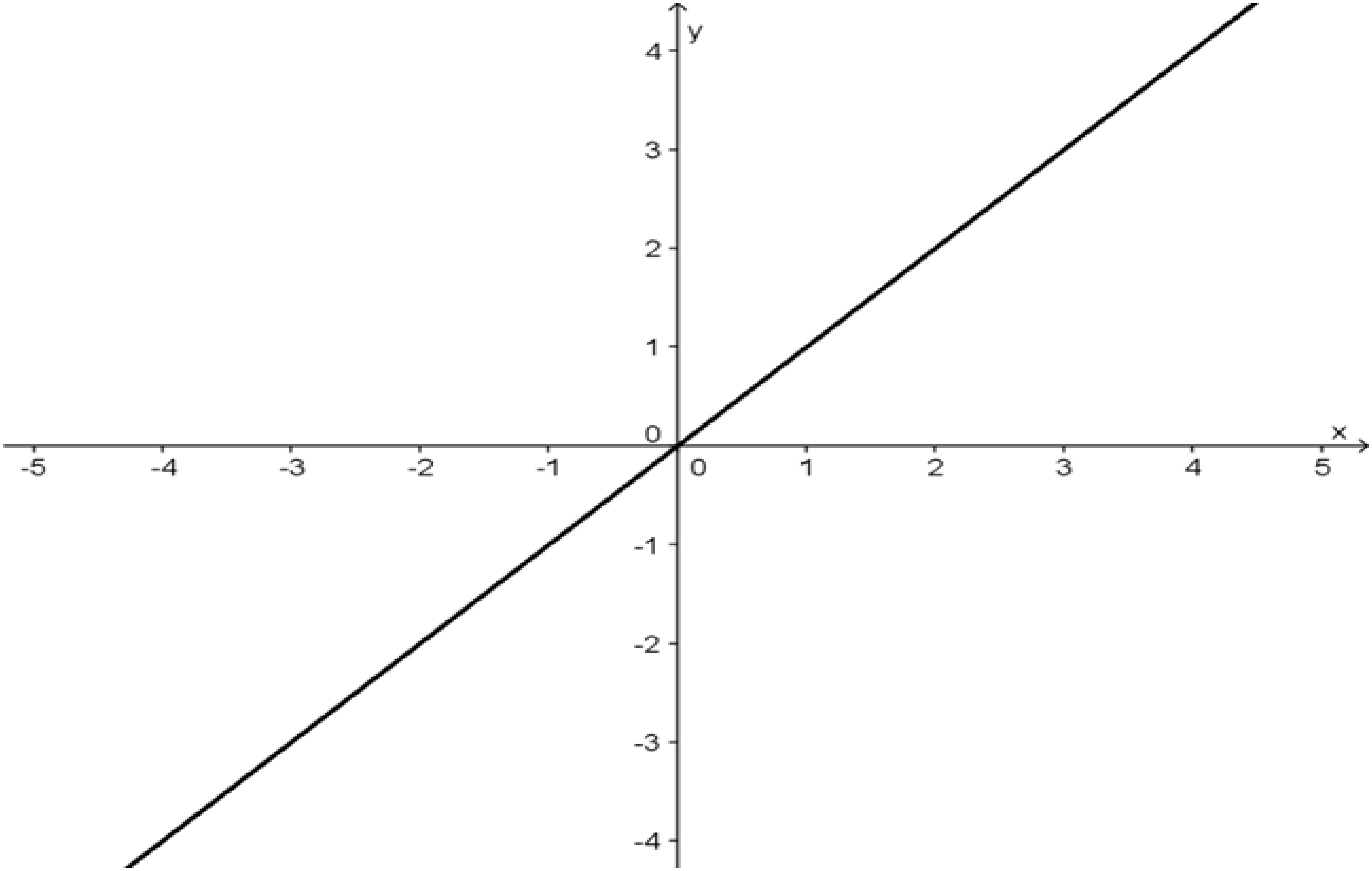
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	8	0	-6	-14	-12	-12	-10	-6	0	8	18
Πρόσημο $f(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

Ο παραπάνω πίνακας γενικεύεται ως εξής:

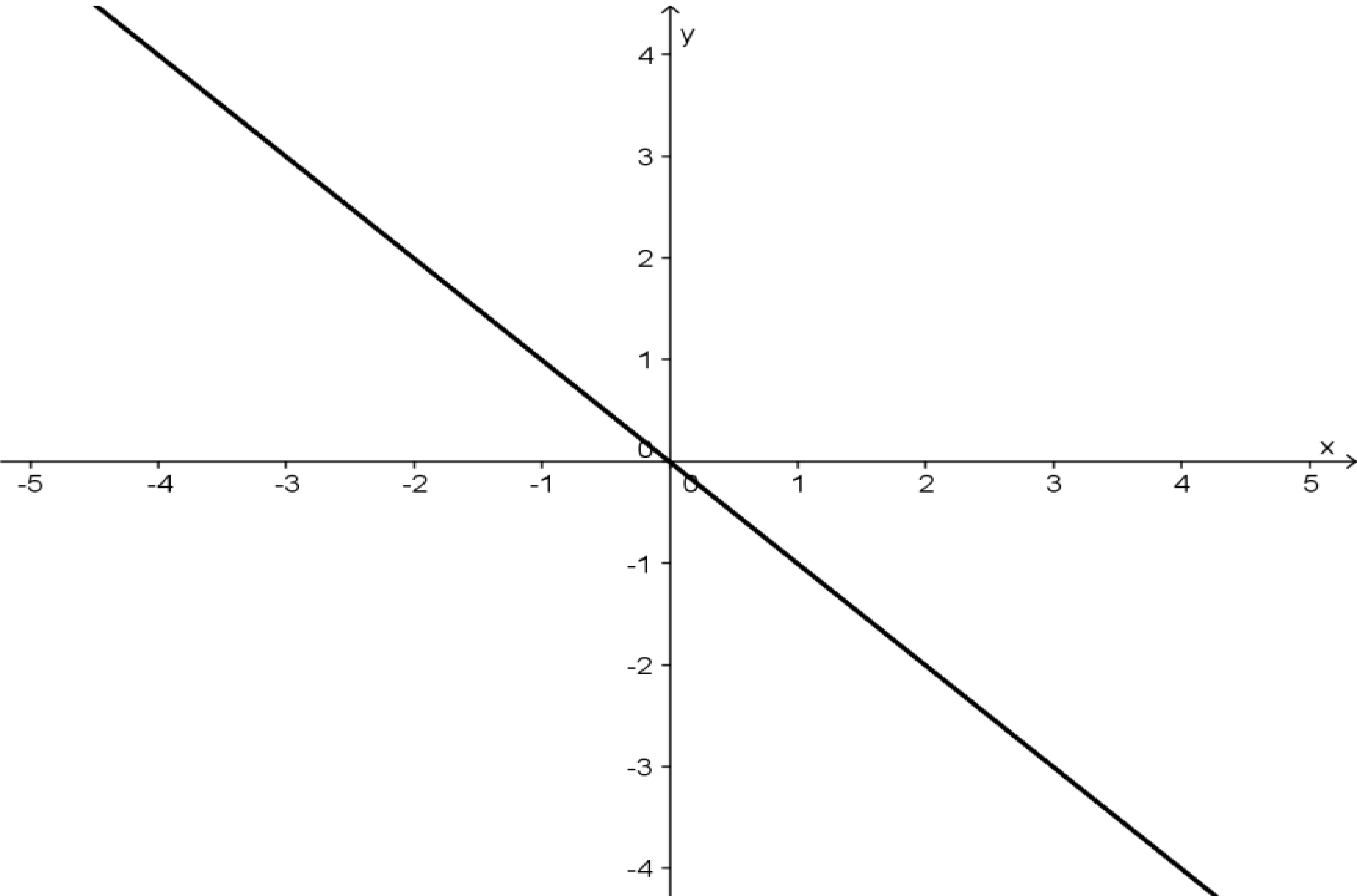
x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
Πρόσημο $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	


0
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
-2
-4
-6
-8
-10
-12

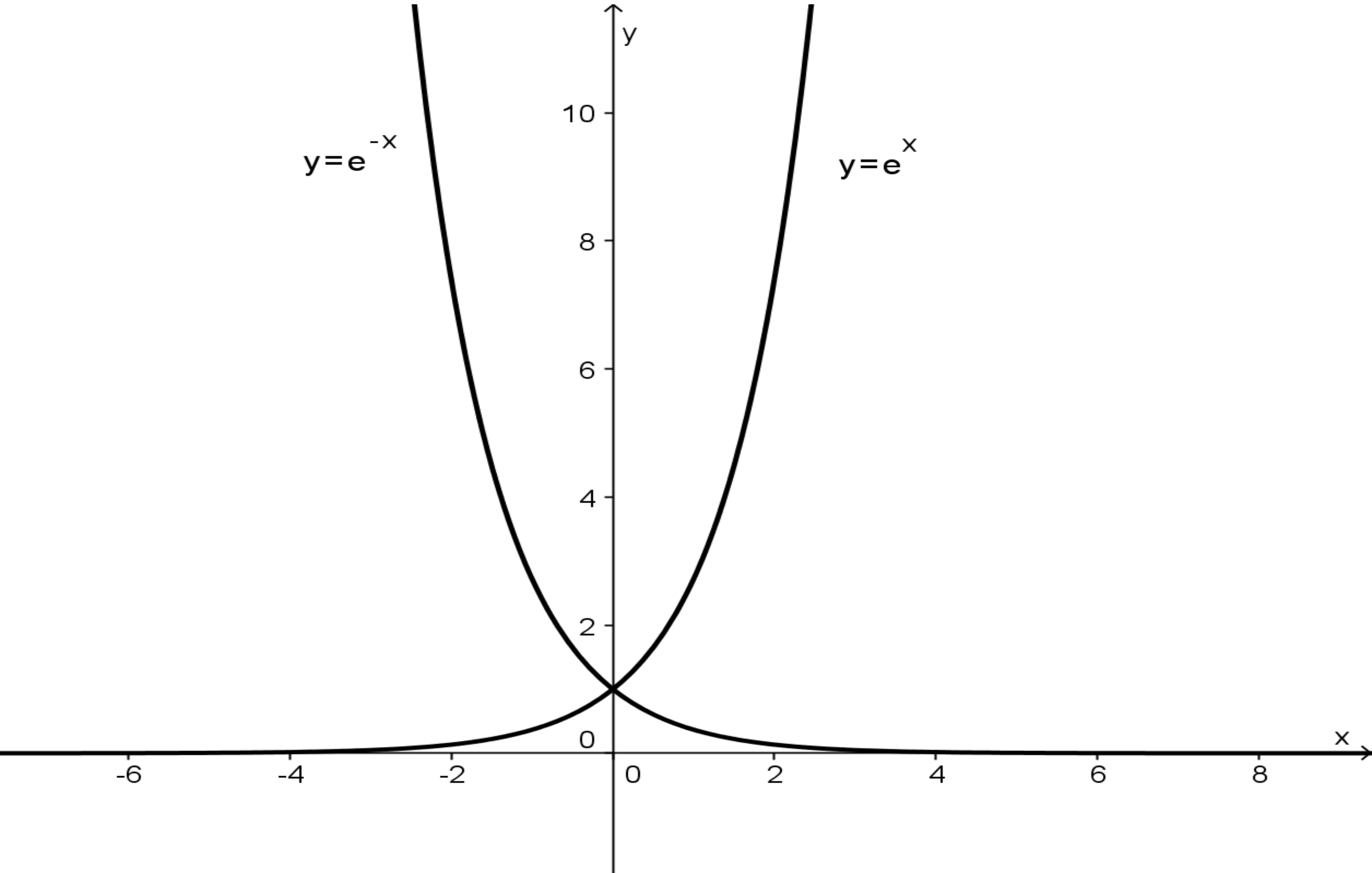
Η συνάρτηση $f(x) = x$



Η συνάρτηση $f(x) = -x$



Η εκθετική συνάρτηση



Η λογαριθμική συνάρτηση

Έστω μια απλή δύναμη: $100 = 10^2$. Μπορούμε να γράψουμε ότι $log_{10}100 = 2$, το οποίο διαβάζεται: ο *λογάριθμος* του 100 με βάση το 10 είναι το 2. Δηλαδή, ο λογάριθμος ενός αριθμού (100) με βάση έναν άλλο αριθμό (10) είναι η δύναμη που πρέπει να υψώσουμε τη βάση για να πάρουμε τον αριθμό. Γενικά, εάν $\alpha = \beta^\gamma$, τότε $log_\beta \alpha = \gamma$.

- Το άθροισμα δύο λογαρίθμων είναι ίσο με το λογάριθμο του γινομένου δύο αριθμών

$$lna + lnb = lnab$$

Για παράδειγμα: $ln5 + ln4 = ln5 \cdot 4 = ln20$

- Η διαφορά δύο λογαρίθμων είναι ίση με το λογάριθμο του πηλίκου δύο αριθμών

$$lna - lnb = ln\frac{a}{b}$$

Για παράδειγμα: $ln15 - ln3 = ln\frac{15}{3} = ln5$

- Ο λογάριθμος της δύναμης ενός αριθμού είναι ίσος με τη δύναμη επί το λογάριθμο του αριθμού

$$lna^n = nlna$$

Για παράδειγμα: $ln5^3 = 3ln5$

- Ο λογάριθμος της μονάδας είναι ίσος με το 0

$$ln1 = 0$$

- Ο λογάριθμος ενός αριθμού στην ίδιας βάση είναι ίσος με 1

$$ln_m m = 1$$

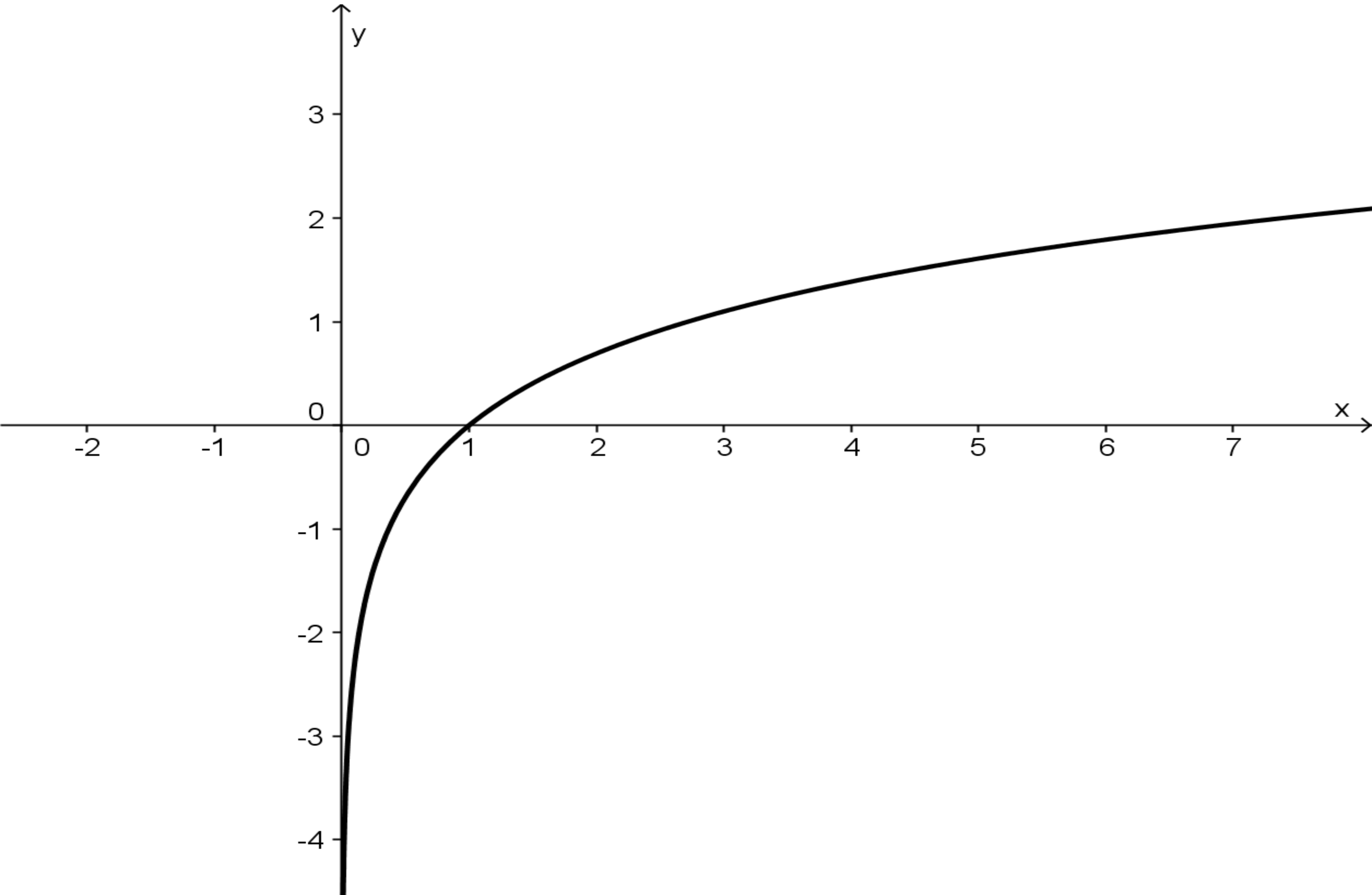
Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $e^x = 30$. Παίρνουμε το λογάριθμο (προσοχή: αφού έχουμε το e παίρνουμε το φυσικό λογάριθμο) και των δύο πλευρών και έχουμε:

$$lne^x = ln30 \Rightarrow xlne = ln30 \Rightarrow x = ln30 \Rightarrow x = 3{,}4$$

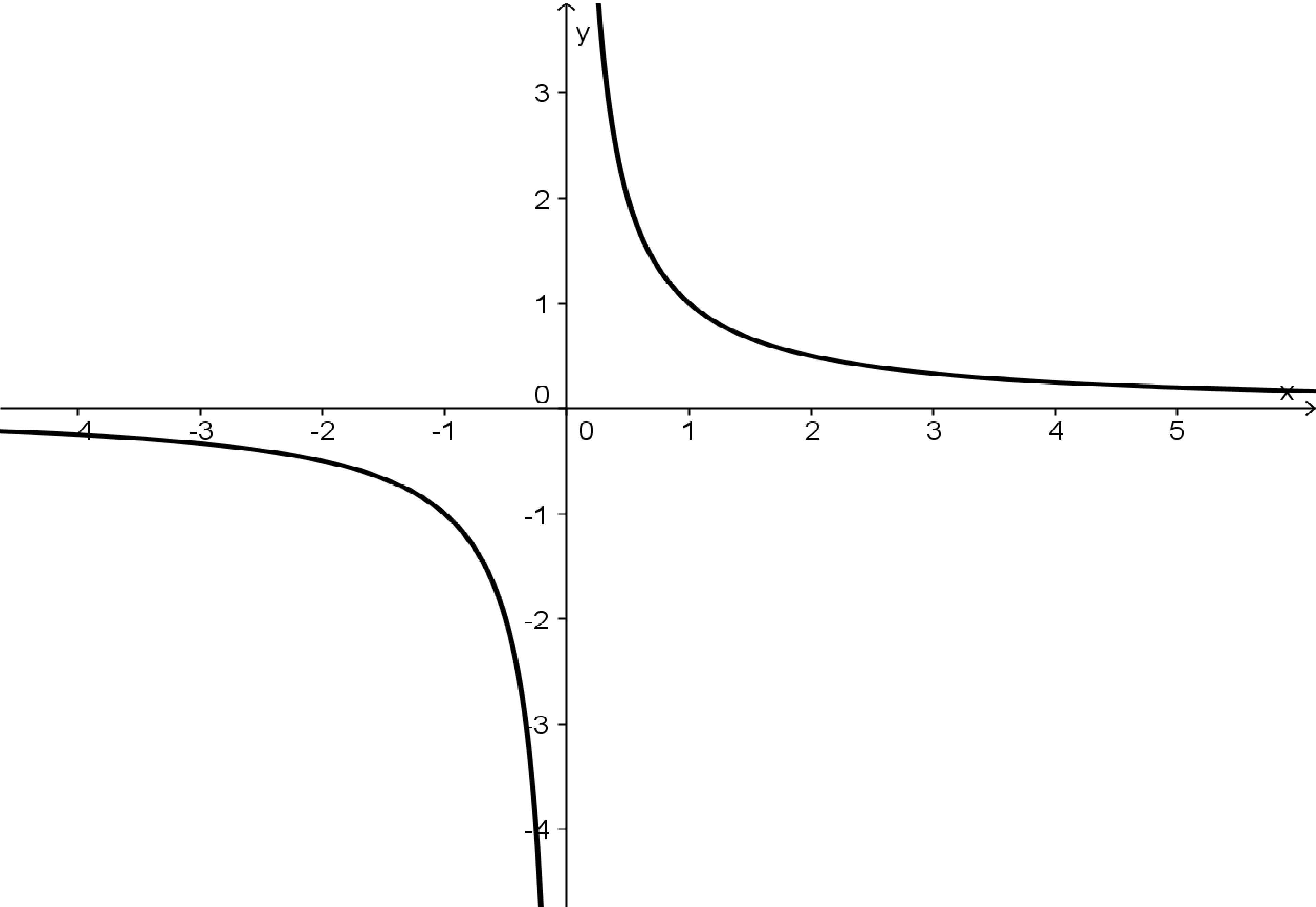
Αξιοποιήσαμε την ιδιότητα λογαρίθμου αριθμού υψωμένου σε δύναμη και την ιδιότητα ότι ο λογάριθμος της βάσης είναι η μονάδα.

Έστω τώρα η εξίσωση $logx = 2{,}35$. Γράφουμε: $x = 10^{2{,}35} = 223{,}8721$. Μπορούμε λοιπόν να λύσουμε με τη χρήση των κανόνων των λογαρίθμων εξισώσεις που περιέχουν λογαρίθμους και εκθέτες.

Η συνάρτηση $y = lnx$



Η συνάρτηση $y = {}^{1}\!/_{x}$



- **Οι ρητές συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού όλο το R εκτός από τις τιμές του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή.** Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{10x^2 + x + 7}{x^2 - x - 2}$$

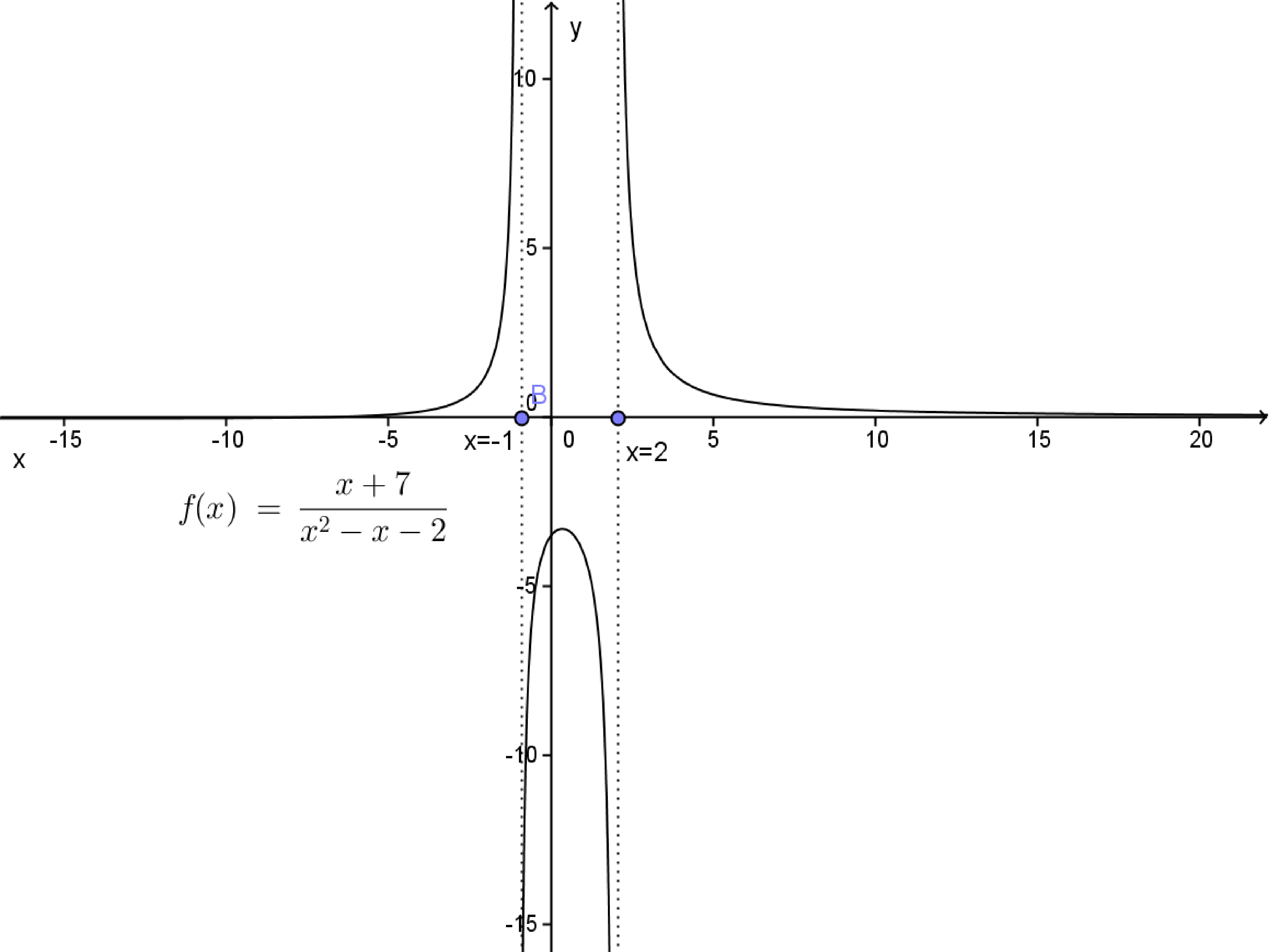
στην παραπάνω συνάρτηση $f(x)$ αναζητούμε την επίλυση της εξίσωσης $h(x) = x^2 - x - 2 = 0$. Για την εύρεση των λύσεων βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - x - 2$, δηλαδή

Η διακρίνουσα της εξίσωση $x^2 - x - 2 = 0$ είναι:

Δ=β^2-4αγ=$(-1)^2$-4*(1)*(-2) = 9, συνεπώς οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2*1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+3}{2} \text{ ή} \\ x = \frac{1-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ή} \\ x = -1 \end{cases}$$

Ο παρονομαστής της $f(x)$ ή αλλιώς η εξίσωση $h(x)$ μπορεί να γραφεί και ως $(x-2)(x+1)$. Το πεδίο ορισμού είναι το A = R – {-1, 2}.


y
10
5
B
0
-15
-10
-5
x=-1
0
x=2
5
10
15
20
x
$f(x) = \frac{x+7}{x^2-x-2}$
-5
-10
-15

Οι άρρητες συναρτήσεις (συναρτήσεις με ριζικά) ορίζονται για τιμές που καθιστούν τις υπόριζες ποσότητες θετικές $\geq \mathbf{0}$. Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(x) = -\sqrt{-4x-8}$.

- Η υπόριζη παράσταση $-4x-8$ θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν. Με άλλα λόγια δεχόμαστε ως πεδίο ορισμού Α τις τιμές του x για τις οποίες η υπόριζη ποσότητα ισχύει $-4x-8 \geq 0$. Λύνουμε την ανίσωση και συνεπώς έχουμε

$$-4x-8 \geq 0$$

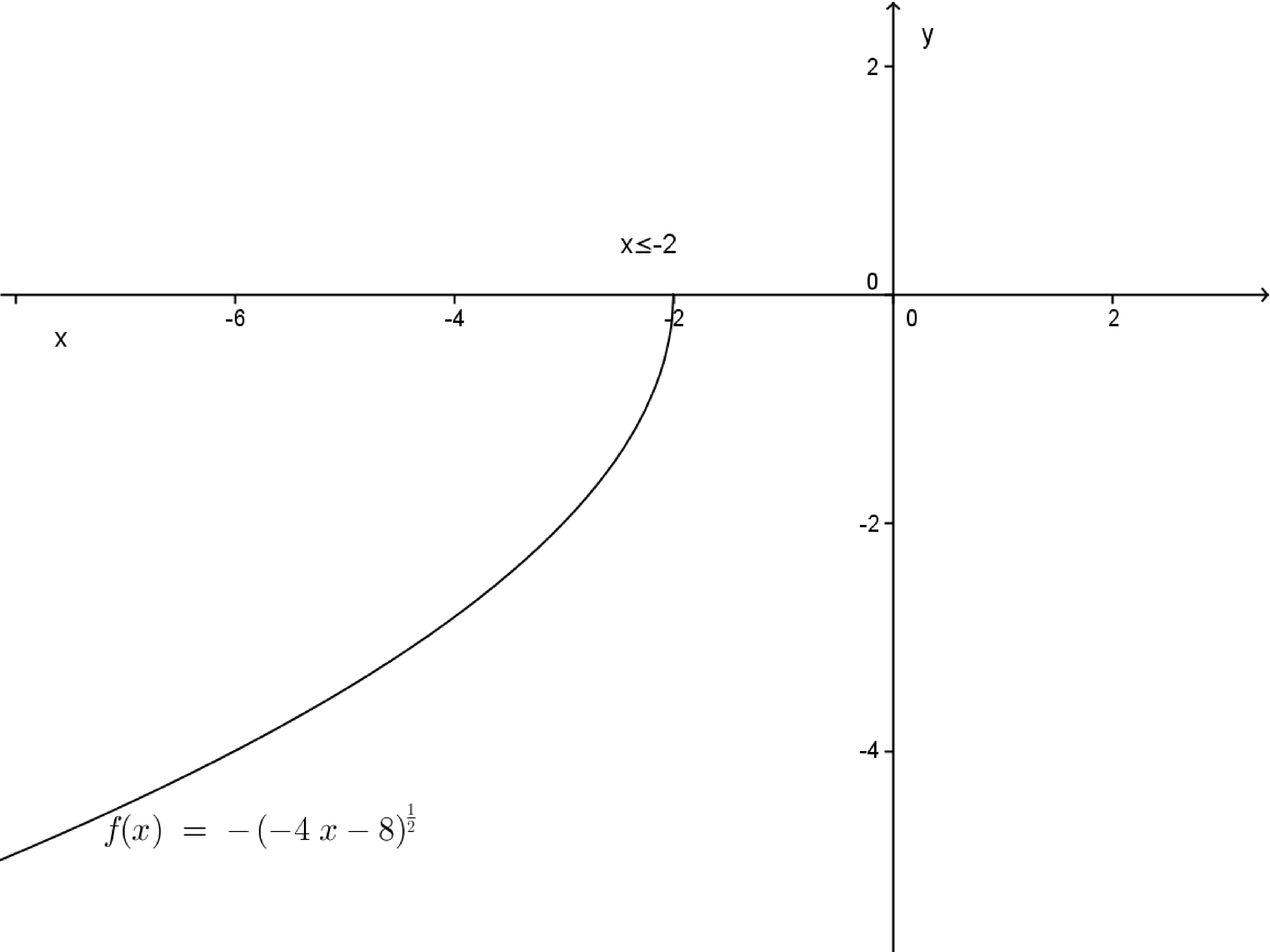
$$-4x \geq 8$$

$$4x \leq -8$$

$$x \leq \frac{-8}{4}$$

$$x \leq -2$$

Το πεδίο ορισμού είναι $A = (-\infty, -2)$. Στο παρακάτω γράφημα (Σχήμα 2) της συνάρτησης $f(x) = -\sqrt{-4x-8} = -(-4x-8)^{0,5}$ είναι εμφανές ότι η f λαμβάνει τιμές μικρότερες ή ίσες με το μείον δυο



y
2
x≤-2
0
-6
-4
-2
0
2
x
-2
-4
$f(x) = -(-4x-8)^{\frac{1}{2}}$

Οι αριθμός ή η παράσταση που λογαριθμίζεται λαμβάνει μόνο θετικές τιμές, δηλαδή εάν έχουμε lnx, τότε x>0. Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(-4x - 12)$

$$-4x-12>0$$

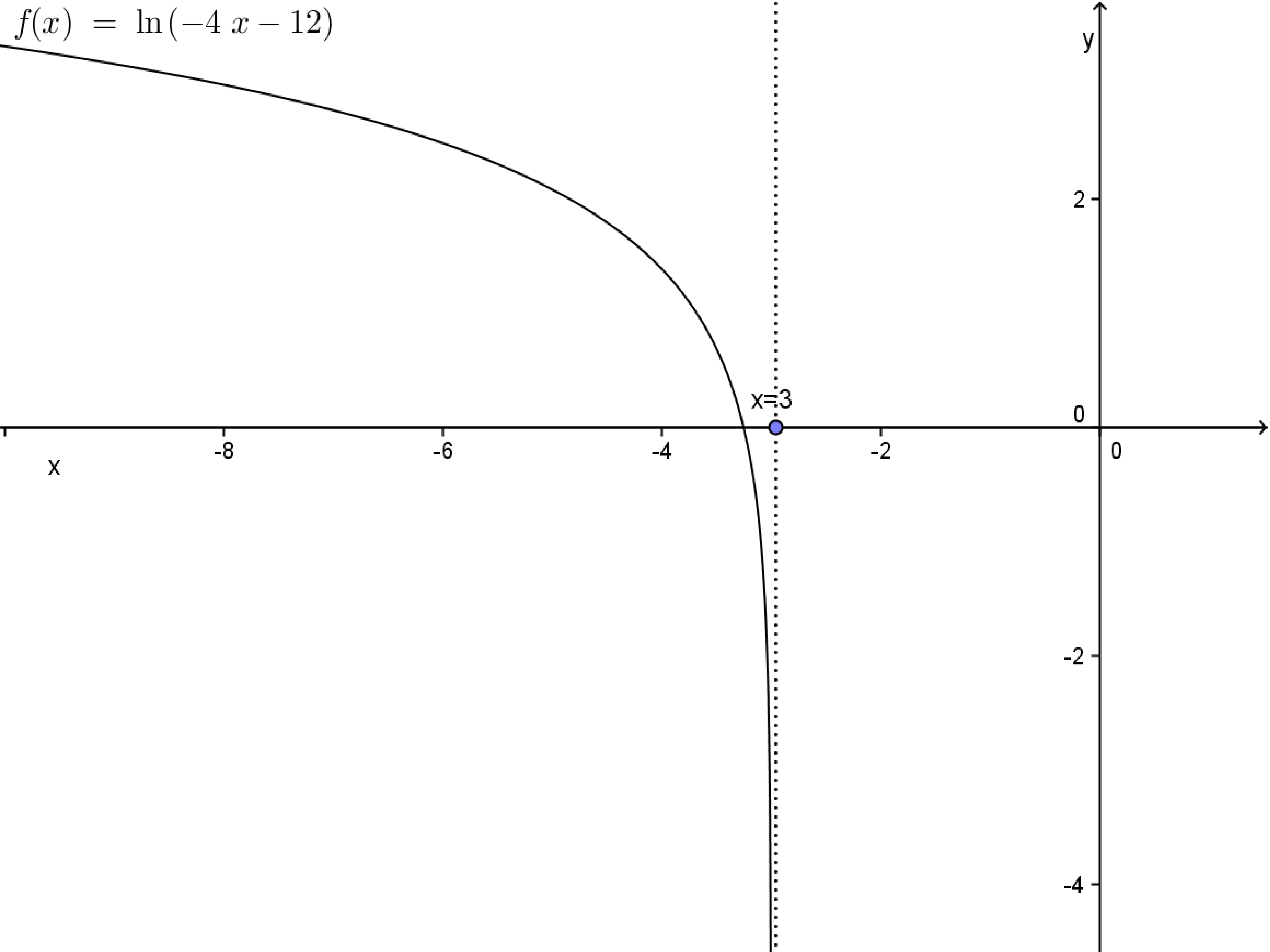
$$-4x>12$$

$$4x<-12$$

$$x<-\frac{12}{4}$$

$$x<-3$$

Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι εμφανές ότι η f ορίζεται για τιμές του x μικρότερες του -3



$f(x) = \ln(-4x - 12)$
y
2
x=3
0
-8
-6
-4
-2
0
x
-2
-4

Παράδειγμα 2.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathrm{f(x)} = \sqrt{1 - x^2}$.

Λύση

Η υπόριζα ποσότητα πρέπει να είναι θετική, συνεπώς θα πρέπει να ισχύει

$1 - x^2 \geq 0$

1ος Τρόπος

Λύνουμε την ανίσωση

$$1 - x^2 \geq 0$$

$$-x^2 \geq -1$$

$$x^2 \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

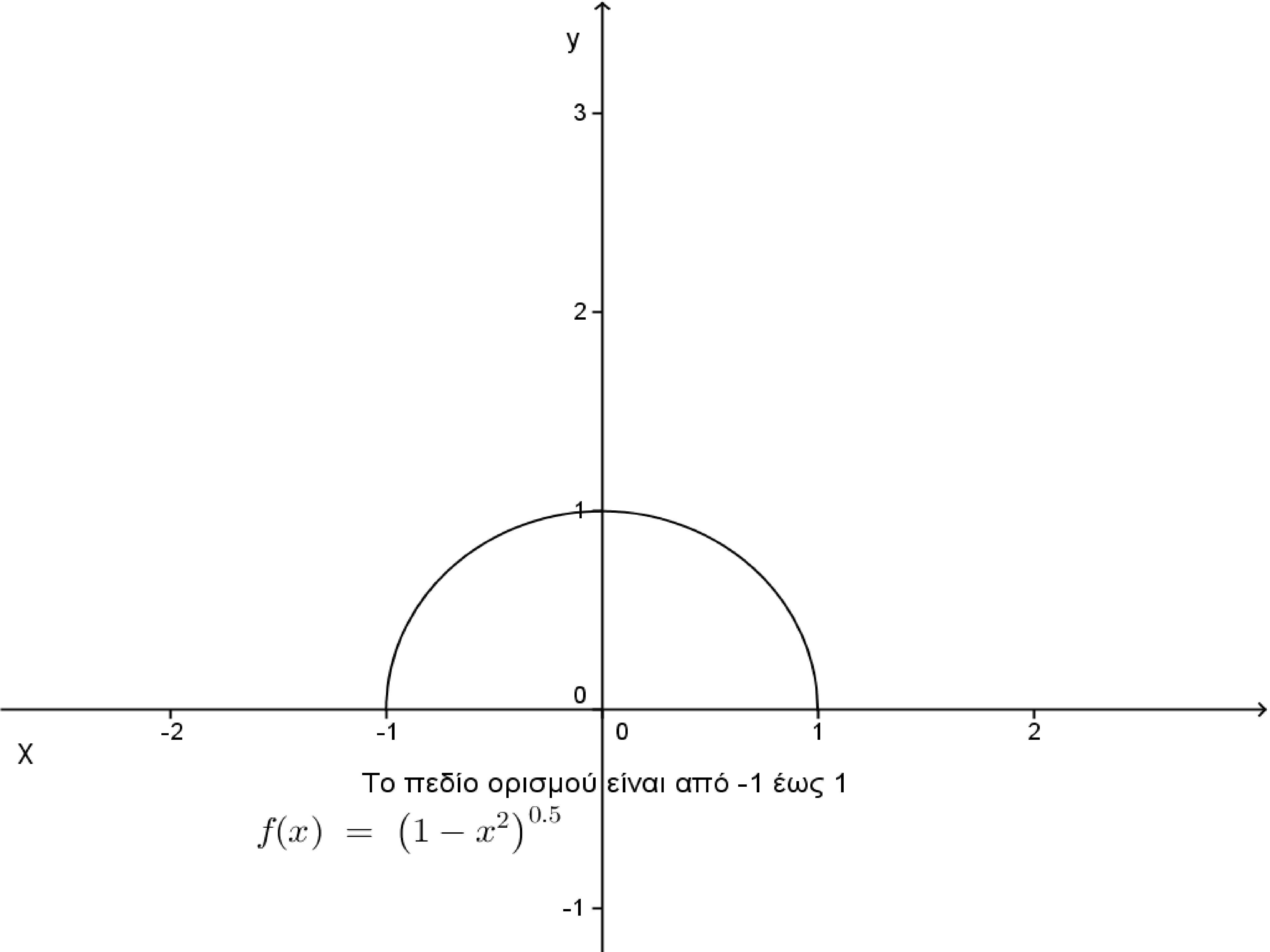
2ος Τρόπος

Στην περίπτωση των τριωνύμων αφού υπολογίσουμε τις ρίζες διατηρούμε εκτός των ριζών το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου και στη συνέχεια ανάλογα με την φορά των ανισοτήτων βρίσκουμε το πεδίο ορισμού.

Οι ρίζες της εξίσωσης του τριωνύμου $1 - \mathrm{x}^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - \mathrm{x})(1 + \mathrm{x}) = 0$ είναι $\begin{cases} x = 1 \text{ ή} \\ x = -1 \end{cases}$

x	-∞	-1	1	+∞
$1 - \mathrm{x}^2$	-	+	-	

Συνεπώς το πεδίο ορισμού βρίσκεται μεταξύ του -1 και 1, δηλαδή Α=[-1,1].


y
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
X
Το πεδίο ορισμού είναι από -1 έως 1
$f(x) = (1 - x^2)^{0.5}$

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{(x-2)(x^2-1)}$

Η υπόριζα ποσότητα πρέπει να είναι θετική, συνεπώς θα πρέπει να ισχύει $(x-2)(x^2-1) \geq 0$.

Υπολογίζουμε τις ρίζες της εξίσωσης $(x-2)(x^2-1)=0$ και κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων.

$$(x-2)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ (x-1)(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ ή} \\ x=1 \text{ ή} \\ x=-1 \end{cases}$$

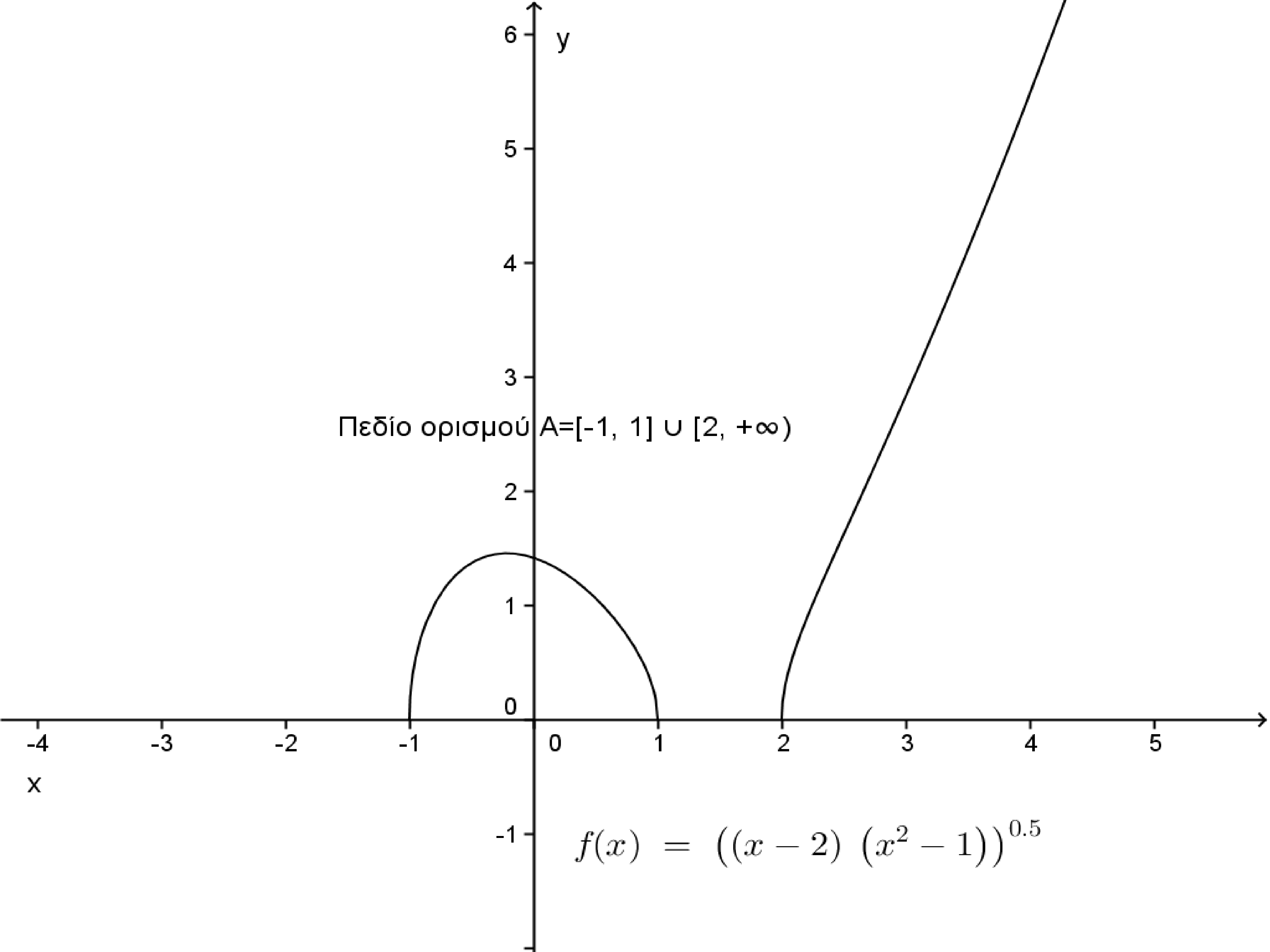
Πίνακας Προσήμων

x	$-\infty$ -1	1	2	$+\infty$
$(x-2)$	-	-	-	+
(x^2-1)	+	-	+	+
$(x-2)(x^2-1)$	-	+	-	+

- Το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο που ανταποκρίνεται στην ζητούμενη ανισότητα, δηλαδή στην περίπτωσή μας ζητείται $(x-2)(x^2-1) \geq 0$, συνεπώς το πεδίο ορισμού θα περιλαμβάνει τα υποσύνολα που αναλογούν στο πρόσημο $(+)$:

$$A = [-1\,,1] \cup [2, +\infty)$$

Πράγματι αν πάρουμε οποιονδήποτε αριθμό από το παραπάνω πεδίο ορισμού και αντικαταστήσουμε στην υπόριζη ποσότητα $(x-2)(x^2-1)$ θα είναι θετικός αριθμός. Π.χ. για x=0, τότε $(x-2)(x^2-1) = (0-2)(0-1) = 2$.


y
x
Πεδίο ορισμού A=[-1, 1] ∪ [2, +∞)
$f(x) = ((x-2)(x^2-1))^{0.5}$

Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου c ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{cx^2-4x+c}$ να έχει πεδίου ορισμού όλο το R.

Θα πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός για κάθε x ϵ R. Εάν η διακρίνουσα του παρονομαστή είναι αρνητική, τότε δεν θα υπάρχουν και ρίζες που να μηδενίζουν τον παρονομαστή. Συνεπώς, το ζητούμενο της άσκησης είναι Δ<0.

Η διακρίνουσα της εξίσωση $cx^2 - 4x + c = 0$ είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 * c * c = \ 16 - 4c^2$$

Συνεπώς, θα πρέπει $16 - 4c^2 < 0$.

Βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $16-4c^2=0$

$$16-4c^2=0 \Leftrightarrow$$

$$4^2-(2c)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$(4-2c)(4+2c)=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4-2c=0 \ \text{ή} \\ 4+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c=2 \ \text{ή} \\ c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων με το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου εκτός των ριζών

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$16 - 4c^2$	-	+	-	

Για να πραγματωθεί η ανισότητα $16 - 4c^2 < 0$, η παράμετρος c θα πρέπει να λαμβάνει τιμές από το σύνολο (-∞, 2) U (2, +∞).