

Μαθηματικά

2^ο μάθημα

Πολλαπλάσια Φυσικού Αριθμού

- Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς.
- Τα πολλαπλάσια του 5 είναι
- $0 * 5 = 0$
- $1 * 5 = 5$
- $2 * 5 = 10$
- $3 * 5 = 15$

Πολλαπλάσια Φυσικού Αριθμού

- Το **μικρότερο** μη μηδενικό από τα **κοινά πολλαπλάσια** που έχουν δυο ή περισσότεροι φυσικοί αριθμοί λέγεται **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο**.
- Το ΕΚΠ των αριθμών 4 και 6
- Πολλαπλάσια του 4 : 0, 4, 8 , **12**, 16, 20
- Πολλαπλάσια του 6 : 0, 6, **12** , 18, 24, 30
- Ο μικρότερος αριθμός που είναι πολλαπλάσιο του 4 και του 6 και είναι διάφορος του μηδενός είναι το 12

Πρώτοι Αριθμοί

- Όλοι οι αριθμοί που διαιρούν έναν αριθμό λέγονται **διαιρέτες**.
- Για παράδειγμα, οι αριθμοί 1, 2, 4, 8 και 16 είναι διαιρέτες του 16.
- Κάθε αριθμός έχει τουλάχιστον δύο διαιρέτες, το 1 και τον εαυτό του.
- Για παράδειγμα, ο αριθμός 5 έχει διαιρέτες το 1 και το 5 και κανέναν άλλο.
- Οι αριθμοί που έχουν ως διαιρέτες μόνο το **1** και **τον εαυτό τους** λέγονται **πρώτοι αριθμοί**.
- **1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23**

- Ο *μέγιστος κοινός διαιρέτης* (ΜΚΔ) δύο ή περισσότερων ακεραίων είναι ο **μεγαλύτερος δυνατός φυσικός αριθμός** που να διαιρεί όλους τους αριθμούς ακριβώς.
- Το *ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο* (ΕΚΠ) δύο ή περισσότερων ακεραίων είναι ο **μικρότερος δυνατός φυσικός αριθμός** που είναι πολλαπλάσιο όλων των αριθμών.

Εύρεση ΜΚΔ

- Αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων και στη συνέχεια σχηματίζουμε το γινόμενο **των κοινών πρώτων αριθμών** που εμφανίζονται ως βάσεις, τον καθένα με τη **μικρότερη δύναμη** στην οποία εμφανίζεται. Ο αριθμός που προκύπτει είναι ο ΜΚΔ.

$$864 = 2^5 \cdot 3^3$$

$$702 = 2 \cdot 3^3 \cdot 13$$

$$2.520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$ΜΚΔ(864, 702, 2.520) = 2 \cdot 3^2 = 18$$

$$\frac{864}{2} = 432$$

$$\frac{432}{2} = 216$$

$$\frac{216}{2} = 108$$

$$\frac{108}{2} = 54$$

$$\frac{54}{2} = 27$$

$$\frac{27}{3} = 9$$

$$\frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{702}{2} = 351$$

$$\frac{351}{3} = 117$$

$$\frac{117}{3} = 39$$

$$\frac{39}{3} = 13$$

$$\frac{13}{13} = 1$$

$$\frac{2.520}{2} = 1.260$$

$$\frac{1.260}{2} = 630$$

$$\frac{630}{2} = 315$$

$$\frac{315}{3} = 105$$

$$\frac{105}{3} = 35$$

$$\frac{35}{5} = 7$$

$$\frac{7}{7} = 1$$

$$864 = 2^5 \cdot 3^3$$

$$702 = 2 \cdot 3^3 \cdot 13$$

$$2.520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$MK\Delta(864, 702, 2.520) = 2 \cdot 3^2 = 18$$

Εύρεση ΕΚΠ

- Αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων και στη συνέχεια σχηματίζουμε το γινόμενο **των κοινών και μη κοινών πρώτων αριθμών** που εμφανίζονται ως βάσεις, τον καθένα με τη **μεγαλύτερη δύναμη** στην οποία εμφανίζεται. Ο αριθμός που προκύπτει είναι το ΕΚΠ.

$$864 = 2^5 \cdot 3^3$$

$$702 = 2 \cdot 3^3 \cdot 13$$

$$2.520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$ΕΚΠ(864, 702, 2520) = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 393.120$$

$$\frac{864}{2} = 432$$

$$\frac{432}{2} = 216$$

$$\frac{216}{2} = 108$$

$$\frac{108}{2} = 54$$

$$\frac{54}{2} = 27$$

$$\frac{27}{3} = 9$$

$$\frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{3}{3} = 1$$

$$864 = 2^5 \cdot 3^3$$

$$\frac{702}{2} = 351$$

$$\frac{351}{3} = 117$$

$$\frac{117}{3} = 39$$

$$\frac{39}{3} = 13$$

$$\frac{13}{13} = 1$$

$$702 = 2 \cdot 3^3 \cdot 13$$

$$\frac{2.520}{2} = 1.260$$

$$\frac{1.260}{2} = 630$$

$$\frac{630}{2} = 315$$

$$\frac{315}{3} = 105$$

$$\frac{105}{3} = 35$$

$$\frac{35}{5} = 7$$

$$\frac{7}{7} = 1$$

$$2.520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$EKП(864, 702, 2520) = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 393.120$$

- **Να βρείτε το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών**
- **96 και 360**

• Να βρείτε το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών

• 96	2	360	2
• 48	2	180	2
• 24	2	90	2
• 12	2	45	3
• 6	2	15	3
• 3	3	5	5
• 1		1	
• $2^5 * 3$		$2^3 * 3^2 * 5$	

• ΜΚΔ $2^3 * 3 = 24$ ΕΚΠ = $2^5 * 3^2 * 5$

Κλάσματα

Προσέξτε ότι:

- Κάθε φυσικός αριθμός α γράφεται και με τη μορφή κλάσματος ως
$$\frac{\alpha}{1} = \alpha$$
- Όταν οι όροι του κλάσματος είναι ίσοι, τότε το κλάσμα ισούται με την μονάδα. Δηλαδή, $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$, για $\alpha \neq 0$.
- Όταν ο αριθμητής του κλάσματος ισούται με μηδέν, τότε το κλάσμα είναι ίσο με το μηδέν. Δηλαδή, $\frac{0}{\alpha} = 0$, για $\alpha \neq 0$
- Στο κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$ εάν $\kappa > \nu$ τότε $\frac{\kappa}{\nu} > 1$, ενώ εάν $\kappa < \nu$ τότε $\frac{\kappa}{\nu} < 1$

Κλάσματα

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε κλάσματα θα πρέπει οι παρονομαστές να είναι ίδιοι, με άλλα λόγια τα κλάσματα να είναι ομώνυμα. Στη συνέχεια, για την πρόσθεση προσθέτουμε και για την αφαίρεση αφαιρούμε τους αριθμητές και απλοποιούμε όσο γίνεται το κλάσμα. Για παράδειγμα:

$$\frac{7}{16} + \frac{1}{16} = \frac{7+1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, \quad \frac{7}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7-1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Κλάσματα

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε κλάσματα θα πρέπει οι παρονομαστές να είναι ίδιοι, με άλλα λόγια τα κλάσματα να είναι ομώνυμα. Στη συνέχεια, για την πρόσθεση προσθέτουμε και για την αφαίρεση αφαιρούμε τους αριθμητές και απλοποιούμε όσο γίνεται το κλάσμα. Για παράδειγμα:

$$\frac{7}{16} + \frac{1}{16} = \frac{7+1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, \quad \frac{7}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7-1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

- Εάν όμως οι παρονομαστές δεν είναι ίδιοι τότε τα κλάσματα είναι *ετερώνυμα*.
- Η μετατροπή ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα γίνεται με τη χρήση του κοινού παρονομαστή, ο οποίος προκύπτει από το γινόμενο όλων των παρονομαστών.

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$$

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων

Για να πολλαπλασιάσουμε κλάσματα πολλαπλασιάζουμε τους αντίστοιχους όρους μεταξύ τους, αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή, στη συνέχεια απλοποιούμε όσο γίνεται και έχουμε το αποτέλεσμα. Για παράδειγμα,

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 5} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$$

Η διαίρεση δύο κλασμάτων γίνεται με ένα μικρό τρικ: αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τα κλάσματα. Για παράδειγμα,

$$\frac{3}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 2} = \frac{15}{16}$$

Δυνάμεις αριθμών

Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με τον εαυτό του παίρνουμε δυνάμεις αυτού του αριθμού. Για παράδειγμα, η έκφραση $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ γράφεται 5^4 . Γενικά, για έναν αριθμό a , το γινόμενο $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ όπου παίρνουμε n φορές το a , ονομάζεται νιοστή δύναμη του a ή δύναμη του a στη n , και συμβολίζεται με a^n .

Το n λέγεται **δύναμη ή εκθέτης** και ο αριθμός a λέγεται **βάση της δύναμης**.

Ειδικές περιπτώσεις δυνάμεων:

- Η πρώτη δύναμη ενός αριθμού a , είναι ο ίδιος ο αριθμός a . Δηλαδή,
$$a^1 = a$$
- Η μηδενική δύναμη ενός αριθμού a , δίνει ως αποτέλεσμα πάντα την μονάδα. Δηλαδή, $a^0 = 1$
- Οι δυνάμεις του 1 είναι όλες ίσες με 1. Δηλαδή, $1^n = 1$

Ιδιότητες Δυνάμεων

1^η ιδιότητα: $\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}$

Παράδειγμα: $5^4 \cdot 5^5 = 5^{4+5} = 5^9$

2^η ιδιότητα: $\frac{\alpha^m}{\alpha^n} = \alpha^{m-n}$

Παράδειγμα: $\frac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4$

3^η ιδιότητα: $\alpha^n \cdot \beta^n = (\alpha \cdot \beta)^n$

Παράδειγμα: $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3$

Ιδιότητες Δυνάμεων

4^η ιδιότητα: $\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$

Παράδειγμα: $\frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

5^η ιδιότητα: $(\alpha^n)^m = \alpha^{n \cdot m}$

Παράδειγμα: $(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6$

6^η ιδιότητα $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-n} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$

Παράδειγμα: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$

Άσκηση: Να γράψετε στη μορφή μιας δύναμης με βάση x τους αριθμούς:

$$x^5 \cdot x^4, \quad (x^{12})^3, \quad \frac{x^{32}}{x^{12}}$$

Άσκηση: Να γράψετε στη μορφή μιας δύναμης με βάση x τους αριθμούς:

$$x^5 \cdot x^4, \quad (x^{12})^3, \quad \frac{x^{32}}{x^{12}}$$

Απάντηση:

$$x^5 \cdot x^4 = x^{5+4} = x^9$$

$$(x^{12})^3 = x^{12 \cdot 3} = x^{36}$$

$$\frac{x^{32}}{x^{12}} = x^{32-12} = x^{20}$$

Πρόσημο δύναμης

Οποιαδήποτε δύναμη με **βάση θετικό αριθμό** είναι **θετικός αριθμός**.

Δηλαδή, εάν $a > 0$, τότε $a^n > 0$.

Εάν η βάση είναι **αρνητικός αριθμός** και ο **εκθέτης άρτιος (ζυγός)** τότε η

δύναμη είναι **θετικός αριθμός**. Δηλαδή, εάν $a > 0$, και n άρτιος, τότε

$a^n > 0$. Παράδειγμα: $(-2)^2 = 4$.

Εάν η βάση είναι **αρνητικός αριθμός** και ο **εκθέτης περιττός (μονός)** τότε η

δύναμη είναι **αρνητικός αριθμός**. Δηλαδή, εάν $a > 0$, και n περιττός, τότε

$a^n < 0$. Παράδειγμα: $(-2)^3 = -8$.

Προτεραιότητα των πράξεων

Η σειρά των πράξεων είναι η εξής:

- Εάν η παράσταση δεν περιέχει παρενθέσεις:
 - Υπολογισμός δυνάμεων
 - Υπολογισμός πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων
 - Υπολογισμός προσθέσεων και αφαιρέσεων

Παράδειγμα: Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = 3 \cdot (5^2 - 2^3) - 2 \cdot (7 + 3^1) - 8 \cdot 5 + 6^2$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = 3 \cdot (5^2 - 2^3) - 2 \cdot (7 + 3^1) - 8 \cdot 5 + 6^2$$

Απάντηση:

$$\begin{aligned} A &= 3 \cdot (5^2 - 2^3) - 2 \cdot (7 + 3^1) - 8 \cdot 5 + 6^2 \\ &= 3 \cdot 17 - 2 \cdot 10 - 8 \cdot 5 + 36 = 51 - 20 - 40 + 36 = 27 \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$B = \frac{[(6 + 4)^2 - (5^2 + 3^2)]}{2}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$B = \frac{[(6 + 4)^2 - (5^2 + 3^2)]}{2}$$

Απάντηση:

$$B = \frac{[(6 + 4)^2 - (5^2 + 3^2)]}{2} = \frac{[10^2 - (25 + 9)]}{2} = \frac{[100 - 34]}{2} = \frac{66}{2} = 33$$

Τετραγωνικές ρίζες

Είδαμε ότι εάν το 5 υψωθεί στο τετράγωνο παίρνουμε τον αριθμό 25, δηλαδή, $5^2 = 25$.

Η αντίστροφη διαδικασία είναι να βρούμε την τετραγωνική ρίζα του 25 που είναι το 5. Η τετραγωνική ρίζα του 25 συμβολίζεται ως $\sqrt[2]{25} = 5$ ή πιο απλά $\sqrt{25} = 5$.

Επομένως, τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α , καλείται ο θετικός αριθμός, ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει σαν αποτέλεσμα τον αριθμό α , δηλαδή εάν $\sqrt{\alpha} = \beta$ τότε $\beta^2 = \alpha$.

Όμως, παρατηρούμε ότι και το $(-5)^2 = 25$.

Επομένως, τετραγωνική ρίζα του 25 δεν είναι μόνο το 5 αλλά μπορεί να είναι και το -5 .

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι κάθε θετικός αριθμός έχει δύο τετραγωνικές ρίζες (ή πιο απλά, ρίζες), μία θετική και μία αρνητική.

Προσέξτε ότι οι αρνητικοί αριθμοί δεν έχουν τετραγωνικές ρίζες, αφού δεν υπάρχει αριθμός ο οποίος υψωμένος στο τετράγωνο να μας δώσει αρνητικό αριθμό.

Ιδιότητες Ριζών

$$\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} \quad \text{και} \quad \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$$

$$\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25} \quad \text{και} \quad \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha| \text{ εάν το } n \text{ είναι άρτιος}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha \text{ εάν το } n \text{ είναι περιττός}$$

$$\sqrt[5]{-1} = -1 \quad \bullet \text{ Αφού } (-1)^5 = -1.$$

$$\sqrt[3]{-0,125} = -0,5 \quad \bullet \text{ Αφού } (-0.5)^3 = -0.125.$$

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} \quad \alpha, \beta \geq 0 \text{ (προσοχή: πρέπει } \beta \neq 0)$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Κλασματικές δυνάμεις

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{ή αλλιώς} \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Παραδείγματα:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9},$$

$$\frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x},$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Κλασματικές δυνάμεις

Εάν η δύναμη είναι εκφρασμένη σε κλάσμα ισχύει ότι $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.

Επομένως,

η τετραγωνική ρίζα του a γράφεται $\sqrt{a} = a^{1/2}$,

η κυβική ρίζα του a γράφεται $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$

η τέταρτη ρίζα του a γράφεται $\sqrt[4]{a} = a^{1/4}$

ΠΟΣΟΣΟΣΤΑ

100% =	$\frac{100}{100} =$	1,00
10% =	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$	0,1
1% =	$\frac{1}{100}$	0,01
0,1% =	$\frac{0,1}{100} = \frac{1}{1000}$	0,001

$$\frac{9}{10} \leftrightarrow 90\%$$

$$\frac{4}{5} \leftrightarrow 80\%$$

$$\frac{3}{4} \leftrightarrow 75\%$$

$$\frac{1}{2} \leftrightarrow 50\%$$

$$\frac{2}{5} \leftrightarrow 40\%$$

$$\frac{1}{3} \leftrightarrow 33,33\%$$

$$\frac{1}{4} \leftrightarrow 25\%$$

$$\frac{1}{5} \leftrightarrow 20\%$$

$$\frac{1}{6} \leftrightarrow 16,67\%$$

$$\frac{1}{8} \leftrightarrow 12,5\%$$

$$\frac{1}{10} \leftrightarrow 10\%$$

$$\frac{1}{20} \leftrightarrow 5\%$$

$$\frac{1}{25} \leftrightarrow 4\%$$

$$\frac{1}{100} \leftrightarrow 1\%$$

$$\frac{1}{1000} \leftrightarrow 0,1\%$$

Παράδειγμα: Να μετατραπούν τα παρακάτω ποσοστά σε κλάσματα:

α) 8%

β) 39,5%

γ) 105%

Παράδειγμα: Να μετατραπούν τα παρακάτω ποσοστά σε κλάσματα:

Απάντηση:

$$\alpha) 8\% = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

$$\beta) 39,5\% = \frac{39,5}{100} = \frac{395}{1000} = \frac{79}{200}$$

$$\gamma) 105\% = \frac{105}{100} = \frac{21}{20}$$

Παράδειγμα: Να μετατραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε ποσοστά επί τοις εκατό:

$$\alpha) \left(\frac{14}{200} \right) \quad \beta) \left(\frac{5}{10} \right) \quad \gamma) \left(\frac{7}{8} \right)$$

Παράδειγμα: Να μετατραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε ποσοστά επί τοις εκατό:

Απάντηση:

$$\alpha) \frac{14}{200} = \frac{7}{100} = 7\%$$

$$\beta) \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50\%$$

$$\alpha) \frac{7}{8} = 0,875 = 87,5\%$$

Παράδειγμα: Να μετατραπούν τα παρακάτω ποσοστά, σε δεκαδικούς αριθμούς: α) 21% β) 2,8% γ) 107%

Παράδειγμα: Να μετατραπούν τα παρακάτω ποσοστά, σε δεκαδικούς αριθμούς: α) 21% β) 2,8% γ) 107%

Απάντηση:

$$\alpha) 21\% = \frac{21}{100} = 0,21$$

$$\beta) 2,8\% = \frac{2,8}{100} = 0,028$$

$$\gamma) 107\% = \frac{107}{100} = 1,07$$

Παράδειγμα: Να μετατραπούν οι παρακάτω δεκαδικοί σε ποσοστά επί
τοις εκατό: α) 0,345 β) 0,071 γ) 3,4

Παράδειγμα: Να μετατραπούν οι παρακάτω δεκαδικοί σε ποσοστά επί τοις εκατό: α) 0,345 β) 0,071 γ) 3,4

Απάντηση:

$$\alpha) 0,345 = \frac{34,5}{100} = 34,5\%$$

$$\beta) 0,071 = \frac{7,1}{100} = 7,1\%$$

$$\gamma) 3,4 = \frac{340}{100} = 340\%$$

- Έστω η τιμή της μετοχής του ΟΤΕ έκλεισε στα 10 ευρώ χθες και σήμερα 12. Ποια είναι η ποσοστιαία αύξηση του ΟΤΕ

- Έστω η τιμή της μετοχής του ΟΤΕ έκλεισε στα 10 ευρώ χθες και σήμερα 12. Ποια είναι η ποσοστιαία αύξηση του ΟΤΕ.

- $\frac{p_2}{p_1} = \frac{12}{10} = 1,2 \quad 1,2 - 1 = 0,2 \quad \eta' \quad 20 \%$

- $\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{12 - 10}{10} = 0,2 \quad \eta' \quad 20 \%$

- Έστω η τιμή της μετοχής του ΟΤΕ έκλεισε στα 10 ευρώ χθες και σήμερα ανέβηκε κατά 20 %. Ποια είναι η νέα τιμή του ΟΤΕ.

- Έστω η τιμή της μετοχής του ΟΤΕ έκλεισε στα 10 ευρώ χθες και σήμερα ανέβηκε κατά 20 %. Ποια είναι η νέα τιμή του ΟΤΕ.
- $10 * 0,2 = 2$ επομένως $10 + 2 = 12$ ή
- $10 * 1,2 = 12$

- Έστω η τιμή της μετοχής της ΔΕΗ έκλεισε στα 5 ευρώ εχθές και σήμερα είναι 4. Ποια είναι η ποσοστιαία μείωση της τιμής της ΔΕΗ

- Έστω η τιμή της μετοχής της ΔΕΗ έκλεισε στα 5 ευρώ εχθές και σήμερα είναι 4. Ποια είναι η ποσοστιαία μείωση της τιμής της ΔΕΗ
- $\frac{p_2}{p_1} = \frac{4}{5} = 0,8$ $0,8 - 1 = -0,2$ $\eta' = -20 \%$
- $\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{4 - 5}{5} = -0,2$ $\eta' = -20 \%$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ποιο ποσοστό του 75 είναι ο αριθμός 39.

Παράδειγμα: Να βρεθεί ποιο ποσοστό του 75 είναι ο αριθμός 39.

Απάντηση: Έχει ζητηθεί να βρεθεί το κλάσμα $\frac{x}{100}$ του 75, το οποίο είναι ίσο με το 39. Δημιουργείται δηλαδή η εξίσωση:

$$\frac{x}{100} \cdot 75 = 39 \Leftrightarrow 0,75x = 39 \Leftrightarrow x = 52\%$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ποιού αριθμού το 25% είναι 37.

Παράδειγμα: Να βρεθεί ποιού αριθμού το 25% είναι 37.

Απάντηση: Ζητείται να βρεθεί ο αριθμός για τον οποίο γνωρίζουμε το ποσοστό. Δημιουργούμε την εξίσωση:

$$25\% \cdot x = 37 \Leftrightarrow \frac{25}{100} \cdot x = 37 \Leftrightarrow 25x = 3700 \Leftrightarrow x = 148$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ποιος αριθμός θα προκύψει εάν αυξηθεί ο αριθμός 450 κατά 15%.

Παράδειγμα: Να βρεθεί ποιος αριθμός θα προκύψει εάν αυξηθεί ο αριθμός 450 κατά 15%.

Απάντηση: Υπολογισμός αύξησης:

$$15\% \cdot 450 = \frac{15}{100} \cdot 450 = 67,5$$

Ο αριθμός 450 θα αυξηθεί κατά 67,5 οπότε θα γίνει $450 + 67,5 = 517,5$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ποιος αριθμός θα προκύψει εάν μειωθεί ο αριθμός 830 κατά 22%

Παράδειγμα: Να βρεθεί ποιος αριθμός θα προκύψει εάν μειωθεί ο αριθμός 830 κατά 22%

Απάντηση: Υπολογισμός μείωσης:

$$22\% \cdot 830 = \frac{22}{100} \cdot 830 = 182,6$$

Ο αριθμός 830 θα μειωθεί κατά 182,6 οπότε θα γίνει $830 - 182,6 = 647,4$

. Η ποσοστιαία μεταβολή βρίσκεται από τον τύπο

$$\text{ποσοστιαία μεταβολή} = \frac{\text{παλιά τιμή} - \text{νέα τιμή}}{\text{παλιά τιμή}} \cdot 100$$

Έτσι, εάν η τιμή ενός προϊόντος ήταν 200€ και την επόμενη χρονιά είναι 250€ η ποσοστιαία μεταβολή είναι

$$\frac{250 - 200}{200} \cdot 100 = \frac{50}{200} \cdot 100 = 20\%$$

Εάν η νέα τιμή είναι υψηλότερη από την παλιά τότε βρίσκουμε το ποσοστό αύξησης, εάν όμως η νέα τιμή είναι χαμηλότερη από την παλιά τότε βρίσκουμε αρνητικό αποτέλεσμα, δηλαδή έχουμε το ποσοστό μείωσης.

Άσκηση

Να βρεθεί η ημερήσια ποσοστιαία αύξηση της τιμής της μετοχής ΑΑΑ

Ημερ/νιες	X	$\frac{p_2 - p_1}{p_1}$
20/7/2014	15	
19/7/2014	13	
18/7/2014	10	
17/7/2014	11	
16/7/2014	12	
15/7/2014	9	

Λύση της Άσκησης

Να βρεθεί η ημερήσια ποσοστιαία αύξηση της τιμής της μετοχής ΑΑΑ

Ημερ/νιες	X	$\frac{p_2 - p_1}{p_1}$
20/7/2014	15	0.15
19/7/2014	13	0.3
18/7/2014	10	-0.09
17/7/2014	11	-0.08
16/7/2014	12	0.33
15/7/2014	9	

ΦΠΑ

Ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ) είναι ένας γενικός φόρος ο οποίος επιβάλλεται σχεδόν σε όλα τα αγαθά και τις παρεχόμενες υπηρεσίες. Οπότε εάν για ένα αγαθό ο συντελεστής ΦΠΑ είναι $x\%$, τότε στο αγαθό αντιστοιχεί

$$\text{ΦΠΑ} = \frac{x}{100} \cdot (\text{αρχική αξία})$$

- Αξία αγαθού **με ΦΠΑ** είναι **123** να βρεθεί το ΦΠΑ όταν ο συντελεστής του ΦΠΑ είναι 23 %
- Λύση
- **Βήμα 1°**: $23\% = 0,23$ αθροίζουμε τη μονάδα $1+0,23=1,23$
- **Βήμα 2°**: $\frac{123}{1,23} = 100$ υπολογίζουμε την αξία χωρίς το ΦΠΑ
- **Βήμα 3°**: υπολογίζουμε το ΦΠΑ $=123-100=23$ Ευρώ

- Αξία αγαθού **χωρίς ΦΠΑ** είναι 123 να βρεθεί το ΦΠΑ, όταν ο συντελεστής του ΦΠΑ είναι 23 %
- **Βήμα 1°**: ΦΠΑ $=123*0,23=28,29$
- **Βήμα 2°**: Τελική τιμή αγαθού $= 123+28,9=151,29$

- Αξία αγαθού με ΦΠΑ είναι 200 να βρεθεί το ΦΠΑ όταν ο συντελεστής του ΦΠΑ είναι 25 %
 - Λύση
-
- Αξία αγαθού χωρίς ΦΠΑ είναι 200 να βρεθεί το ΦΠΑ όταν ο συντελεστής του ΦΠΑ είναι 25 %
 - Λύση

- Αξία αγαθού **με ΦΠΑ** είναι 200 να βρεθεί το ΦΠΑ όταν ο συντελεστής του ΦΠΑ είναι 25 %
- Λύση
- $25\% = 0,25$ αθροίζουμε τη μονάδα $1 + 0,25 = 1,25$
- $\frac{200}{1,25} = 160$ αξία χωρίς ΦΠΑ
- $\text{ΦΠΑ} = 200 - 160 = 40$ Ευρώ

- Αξία αγαθού **χωρίς ΦΠΑ** είναι 200 να βρεθεί το ΦΠΑ όταν ο συντελεστής του ΦΠΑ είναι 25 %
- $\text{ΦΠΑ} = 200 * 0,25 = 50$
- Τελική τιμή αγαθού = $200 + 50 = 250$

Παράδειγμα: Για την αγορά ενός προϊόντος που έχει συντελεστή ΦΠΑ 19% διαθέσαμε συνολικά (συμπεριλαμβάνοντας το ΦΠΑ) 357€. α) Να βρεθούν το ΦΠΑ και η αξία του προϊόντος χωρίς το ΦΠΑ. β) Ο ΦΠΑ αυξήθηκε σε 23%. Ποιά είναι η επιβάρυνση αυτής της αύξησης στην τελική τιμή του προϊόντος;

- Αξία αγαθού **με ΦΠΑ είναι 357** να βρεθεί το ΦΠΑ όταν ο συντελεστής του ΦΠΑ είναι 19 %
- Λύση
- **Βήμα 1°:** $19\% = 0,19$ αθροίζουμε τη μονάδα $1+0,19=1,19$
- **Βήμα 2°:** $\frac{357}{1,19} = 300$ υπολογίζουμε την αξία χωρίς το ΦΠΑ
- **Βήμα 3°:** υπολογίζουμε το ΦΠΑ $=357-300=57$ Ευρώ
- **0 ΦΠΑ αυξήθηκε 23 %**
- Λύση
- **Βήμα 1°:** Αξία αγαθού χωρίς ΦΠΑ 300
- **Βήμα 2°:** ΦΠΑ $=300*0,23=69$
- **Βήμα 3°:** Τελική τιμή αγαθού $= 300+69=369$
- **Βήμα 4°:** Επιβάρυνση $= 369-357 = 12$ Ευρώ