

Μαθηματικά

Δρ. Σαριαννίδης Νικόλαος

Καθηγητής

Δρ. Κοντέος Γεώργιος Αν. Καθηγητής

Φυσικοί αριθμοί

Με βάση το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, με τη χρήση των δέκα ψηφίων 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9, μπορούμε να σχηματίσουμε άπειρους αριθμούς. Οι αριθμοί αυτοί λέγονται *φυσικοί αριθμοί* και ανάμεσά τους ο ελάχιστος είναι το 0. Για κάθε φυσικό αριθμό n , εκτός από το 0, υπάρχει ένας επόμενος, ο οποίος βρίσκεται εάν προσθέσουμε την μονάδα ($n + 1$) και ένας προηγούμενος, ο οποίος βρίσκεται εάν αφαιρέσουμε τη μονάδα ($n - 1$). Για το 0 υπάρχει μόνον ο επόμενος φυσικός αριθμός, το 1.

Φυσικοί αριθμοί

Η διαδικασία κατασκευής φυσικών αριθμών μπορεί φυσικά να συνεχίζεται επ' άπειρον και έτσι δημιουργείται το σύνολο των φυσικών αριθμών που συμβολίζεται με \mathbb{N} (natural numbers). Οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το 2 ονομάζονται άρτιοι ή ζυγοί, ενώ αυτοί που δεν διαιρούνται με το 2 ονομάζονται περιττοί ή μονοί.

Στρογγυλοποίηση φυσικών αριθμών

- Την διαδικασία κατά την οποία αντικαθιστούμε έναν φυσικό αριθμό με μια προσέγγισή του,
 - δηλαδή με κάποιον άλλο λίγο μεγαλύτερο ή λίγο μικρότερό του, την ονομάζουμε στρογγυλοποίηση.
- Συχνά χρειάζεται να κάνουμε στρογγυλοποιήσεις, ιδιαίτερα όταν έχουμε να κάνουμε με πολύ μεγάλους αριθμούς.
 - Για παράδειγμα, ο πληθυσμός της Ελλάδας είναι 10.787.690 άτομα, σύμφωνα με τα πρώτα προσωρινά στοιχεία της απογραφής του 2011.
 - Ωστόσο, σχεδόν ποτέ δεν λέμε αυτόν τον αριθμό ολόκληρο.
 - Όταν αναφερόμαστε στον πληθυσμό της χώρας λέμε συνήθως
 - “ο πληθυσμός της Ελλάδας είναι 11 εκατομμύρια” αντί “10,7 εκατομμύρια”,
 - στρογγυλεύουμε δηλαδή τον αριθμό προς τα πάνω.

Στρογγυλοποίηση φυσικών αριθμών

- Η στρογγυλοποίηση ενός φυσικού αριθμού γίνεται ως εξής:
 - Προσδιορισμός της τάξης στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση
 - (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες, δεκάδες χιλιάδες, εκατοντάδες χιλιάδες, εκατομμύρια, κλπ.)
- Αν το ψηφίο της επόμενης προς τα δεξιά τάξης είναι μικρότερο του 5 (δηλαδή , 1, 2, 3, 4) τότε αντικαθιστούμε με 0 το ψηφίο αυτό καθώς και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων, ενώ τα υπόλοιπα ψηφία παραμένουν στην πρότερή τους μορφή



Στρογγυλοποίηση φυσικών αριθμών

- Αν το ψηφίο της επόμενης προς τα δεξιά τάξης είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5
 - (δηλαδή 5, 6, 7, 8, 9)
 - τότε αυξάνουμε κατά μία μονάδα το ψηφίο της τάξης που γίνεται η στρογγυλοποίηση και αντικαθιστούμε με μηδενικά όλα τα επόμενα προς τα δεξιά ψηφία του
- Εξυπακούεται ότι δεν στρογγυλοποιούνται οι αριθμοί τηλεφώνων, ο αριθμός φορολογικού μητρώου (Α.Φ.Μ.), διάφοροι κωδικοί αριθμοί, κλπ.

Παράδειγμα 1.1: Να στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός 19.139.527 στις:

α) εκατοντάδες, β) χιλιάδες, γ) δεκάδες χιλιάδες, δ) εκατομμύρια

Απάντηση:

α) Τάξη στρογγυλοποίησης: εκατοντάδες: Προηγούμενη τάξη: $2 < 5$
επομένως όλα τα δεξιά ψηφία μηδενίζονται.

$$19.139.527 \rightarrow 19.139.500$$

Παράδειγμα 1.1: Να στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός 19.139.527 στις:

α) εκατοντάδες, β) χιλιάδες, γ) δεκάδες χιλιάδες, δ) εκατομμύρια

Απάντηση:

β) Τάξη στρογγυλοποίησης: χιλιάδες: Προηγούμενη τάξη: 5 επομένως όλα τα προς δεξιά ψηφία μηδενίζονται και το ψηφίο της τάξης που κάνουμε την στρογγυλοποίηση γίνεται: $9 + 1 = 10$

$$19.139.527 \rightarrow 19.140.000$$

Παράδειγμα 1.1: Να στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός 19.139.527 στις:

α) εκατοντάδες, β) χιλιάδες, γ) δεκάδες χιλιάδες, δ) εκατομμύρια

Απάντηση:

γ) Τάξη στρογγυλοποίησης: δεκάδες χιλιάδες: Προηγούμενη τάξη: $9 > 5$

επομένως όλα τα προς δεξιά ψηφία μηδενίζονται και το ψηφίο της τάξης

που κάνουμε την στρογγυλοποίηση γίνεται: $3 + 1 = 4$

$$19.139.527 \rightarrow 19.140.000$$

Παράδειγμα 1.1: Να στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός 19.139.527 στις:

α) εκατοντάδες, β) χιλιάδες, γ) δεκάδες χιλιάδες, δ) εκατομμύρια

Απάντηση:

δ) Τάξη στρογγυλοποίησης: εκατομμύρια: Προηγούμενη τάξη: $1 < 5$

επομένως όλα τα δεξιά ψηφία μηδενίζονται.

$$19.139.527 \rightarrow 19.000.000$$

Άσκηση 1.1:

i) Να στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός 117.348.453:

α) στις δεκάδες, β) στις χιλιάδες, γ) στις δεκάδες χιλιάδες, δ) στα εκατομμύρια

ii) Να στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός 5.472.149:

α) στις δεκάδες, β) στις δεκάδες χιλιάδες, γ) στα εκατομμύρια

Ακέραιοι Αριθμοί

Είδαμε ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι το μηδέν και όλοι οι θετικοί αριθμοί.

Υπάρχουν βεβαίως και οι αντίστοιχοι αρνητικοί αριθμοί. Εάν μαζί με τους

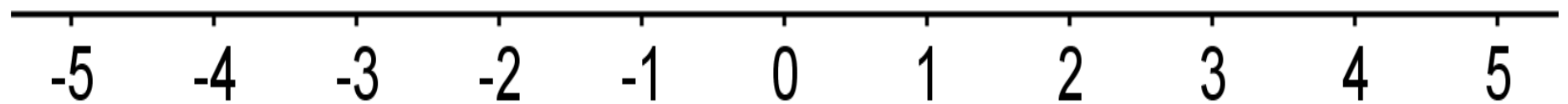
φυσικούς αριθμούς πάρουμε και τους αρνητικούς, τότε σχηματίζουμε το

σύνολο των *ακεραίων αριθμών*, το οποίο συμβολίζεται με \mathbb{Z} από τη

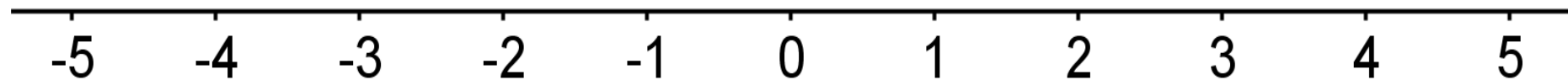
γερμανική λέξη Zahl, που σημαίνει αριθμός. Έτσι, λοιπόν, το σύνολο \mathbb{Z}

περιλαμβάνει τους αριθμούς $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, κλπ.

Για να απεικονίσουμε τους ακέραιους αριθμούς σε μια ευθεία γραμμή βάζουμε σε κάποιο σημείο το μηδέν και έχοντας ορίσει κάποια απόσταση ως μονάδα, προσθέτουμε διαδοχικά τη μονάδα στα δεξιά του μηδενός και αφαιρούμε διαδοχικά τη μονάδα από τα αριστερά του μηδενός, οπότε έχουμε:



Σχήμα 1.1. Διάταξη των ακεραίων αριθμών σε ευθεία



Σχήμα 1.1. Διάταξη των ακεραίων αριθμών σε ευθεία

Η θέση κάθε σημείου που ορίζεται από έναν αριθμό πάνω στην ευθεία ονομάζεται *τετμημένη* του σημείου. Παρατηρούμε ότι ανάμεσα στους ακέραιους αριθμούς υπάρχουν κενά τα οποία μπορεί να καλυφθούν από αριθμούς που είναι μικρότεροι από τον δεξιά τους ακέραιο αριθμό και μεγαλύτεροι από τον αριστερά τους ακέραιο αριθμό.

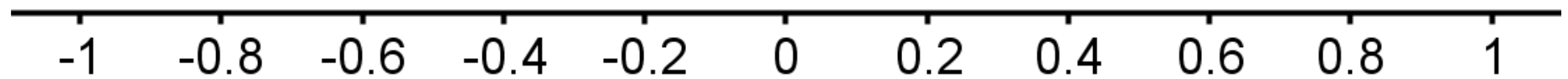
Ρητοί αριθμοί

Θεωρώντας το πηλίκο m/n δύο ακεραίων αριθμών δημιουργούμε ένα κλάσμα (προσοχή: πρέπει πάντα $n \neq 0$).

Κάθε κλάσμα έχει μια συγκεκριμένη τιμή, η οποία μπορεί να είναι ένας ακέραιος αριθμός εάν η διαίρεση του αριθμητή m με τον παρονομαστή n γίνεται ακριβώς,

- ή μπορεί να είναι ένας δεκαδικός αριθμός εάν η διαίρεση δεν γίνεται ακριβώς.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι για κάθε ρητό αριθμό μπορούμε να βρούμε επακριβώς τη θέση του στην ευθεία:



Σχήμα 1.2. Διάταξη ρητών αριθμών σε ευθεία

Προσέξτε ότι οι ακέραιοι αριθμοί είναι επίσης ρητοί, αφού μπορούν να γραφτούν ως κλάσματα. Για παράδειγμα, ο ακέραιος αριθμός 3 μπορεί να γραφτεί ως $\frac{3}{1}$ ή $\frac{9}{3}$ ή $\frac{150}{50}$ ή άπειρα ακόμα κλάσματα που δίνουν πηλίκο 3. Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με \mathbb{Q} , από την αγγλική λέξη Quotient, που σημαίνει πηλίκο.

Άρρητοι αριθμοί

Κάποια κλάσματα δίνουν πηλίκο με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Τους αριθμούς αυτούς δεν μπορούμε να τους κατονομάσουμε, αφού εάν αρχίσουμε να τους λέμε δεν θα τελειώσουμε ποτέ. Οι αριθμοί αυτοί λέγονται *άρρητοι αριθμοί*, ακριβώς γιατί δεν μπορούμε να τους πούμε, δεν είναι ρητοί.

Άρρητοι αριθμοί

Χαρακτηριστικό παράδειγμα άρρητου αριθμού είναι το γνωστό π , που είναι ο λόγος της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του και είναι ο αριθμός 3,141592653589793 ... με άπειρα ακόμα δεκαδικά ψηφία.

Ένας τρόπος για να δούμε εάν η τετραγωνική ρίζα ενός φυσικού αριθμού είναι ρητός ή άρρητος αριθμός είναι ο εξής:

- εάν ο φυσικός αριθμός είναι αποτέλεσμα της ύψωσης στο τετράγωνο άλλου φυσικού αριθμού,
 - τότε η τετραγωνική ρίζα του είναι ρητός αριθμός.
- Για παράδειγμα, ο αριθμός 16 προκύπτει από την ύψωση στο τετράγωνο του αριθμού 4 ($4^2 = 16$).
- **Οπότε ο αριθμός $\sqrt{16}$ είναι ρητός αριθμός.**

- Επίσης, ο αριθμός $\sqrt{4}$ είναι ρητός αριθμός, είναι το 2.
- Αντίθετα, οι αριθμοί $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, είναι άρρητοι αριθμοί
 - γιατί το 3, το 5, το 6, το 7, το 8, το 10 δεν προκύπτουν από την ύψωση κάποιου φυσικού αριθμού στο τετράγωνο.

Οι πραγματικοί αριθμοί

Εάν πάρουμε το σύνολο των ρητών και των άρρητων αριθμών μαζί σχηματίζουμε το σύνολο των *πραγματικών αριθμών* που συμβολίζεται με \mathbb{R} , από την αγγλική λέξη Real numbers, που σημαίνει πραγματικοί αριθμοί.

Πρόσημα

Ένας θετικός αριθμός συνήθως δεν έχει πρόσημο, ενώ αντίθετα ένας αρνητικός αριθμός γράφεται και αναγνωρίζεται ως αρνητικός από το πρόσημό του.

Εάν δύο αριθμοί έχουν το ίδιο πρόσημο λέγονται **ομόσημοι**, ενώ εάν έχουν αντίθετο πρόσημο λέγονται **ετερόσημοι**.

Για παράδειγμα, οι αριθμοί 231 και 346 είναι ομόσημοι, καθώς επίσης και οι αριθμοί -91 , -38 , -2 , ενώ οι αριθμοί 14 και -28 , καθώς επίσης και οι αριθμοί -246 και 4 είναι ετερόσημοι αριθμοί.

Απόλυτες τιμές

Με την *απόλυτη τιμή*, που συμβολίζεται με δυο κάθετες γραμμές μέσα στις οποίες γράφουμε τον αριθμό, εννοούμε **τον αριθμό χωρίς το πρόσημό**.

Όταν γράφουμε $|-7|$ και $|7|$ εννοούμε το ίδιο πράγμα, τον αριθμό 7.

Επομένως, η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός
ενώ η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί που έχουν την ίδια απόλυτη τιμή και είναι ετερόσημοι (όπως οι -7 και 7 που είδαμε προηγουμένως).

Άλλα παραδείγματα: $|-3,5| = 3,5 = -(-3,5)$,

$|11,2| = 11,2$. Προσέξτε ότι $|0| = 0$.

Δεκαδικοί αριθμοί

Οι δεκαδικοί αριθμοί αποτελούνται

από ένα ακέραιο μέρος στο οποίο οι τάξεις των ψηφίων είναι όπως και στους φυσικούς αριθμούς (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, κλπ.)

και ένα δεκαδικό μέρος (μετά την υποδιαστολή) όπου οι τάξεις των ψηφίων είναι με τη σειρά:

δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά, δεκάκις χιλιοστά, εκατοντάκις χιλιοστά, εκατομμυριοστά κλπ.

Δεκαδικοί αριθμοί

- Έτσι, ο αριθμός 317.615,35 είναι δεκαδικός αριθμός με δύο δεκαδικά ψηφία.
- Μπορούμε να πούμε ότι κάθε ακέραιος αριθμός είναι δεκαδικός αριθμός με μηδενικά στη θέση των δεκαδικών ψηφίων.
- Δηλαδή, ο αριθμός 4 γράφεται επίσης 4,0 ή ακόμα 4,000.

Δεκαδικοί αριθμοί

- Προσέχουμε ότι ένας δεκαδικός αριθμός δεν αλλάζει εάν στο δεκαδικό μέρος του προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε μηδενικά.
- Δηλαδή, ο αριθμός 35,67 είναι ίδιος με τον αριθμό 35,670 ή με τον αριθμό 35,6700000.

Ωστόσο, προσέξτε ότι στον αριθμό 35,670000010000 διαγράφονται μόνο τα μηδενικά μετά το 1, δηλαδή γίνεται 35,67000001

Πράξεις δεκαδικών αριθμών

Γράφουμε τους αριθμούς σε θέση ώστε να είναι στην ίδια ευθεία η υποδιαστολή και κάνουμε τις πράξεις:

$$11,5 + 2,347 =$$

$$\begin{array}{r} 11,5 \\ + 2,347 \\ \hline 13,847 \end{array}$$

Είναι ίσως επιβοηθητικό να συμπληρώσουμε με μηδενικά εκεί που χρειάζεται:

$$\begin{array}{r} 11,500 \\ + 2,347 \\ \hline 13,847 \end{array}$$

Πράξεις δεκαδικών αριθμών

Ανάλογα γίνεται και η αφαίρεση:

$$\begin{array}{r} 11,500 \\ - 2,347 \\ \hline 9,153 \end{array}$$

Να γίνουν οι πράξεις

- 1) $4,0034$ 3) 45
 $+0,21$
 $-0,0021$
- 2) $7,890$
 $-0,2$

Να γίνουν οι πράξεις και να παρουσιαστούν τα κρατούμενα

$$\begin{array}{r} 1) \quad 4,0034 \\ + \underline{0,2100} \\ \hline \mathbf{4,2134} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3) 45,0000 \\ - \underline{0,0021} \\ \hline \mathbf{44,9979} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad 7,890 \\ - \underline{0,200} \\ \hline \mathbf{7,690} \end{array}$$

Πολλαπλασιασμός δεκαδικών

Ο πιο εύκολος τρόπος είναι

- να πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς σαν να μην είχαν υποδιαστολή και
- στη συνέχεια να αθροίσουμε το πλήθος των δεκαδικών των δύο αριθμών
- και να τοποθετήσουμε την υποδιαστολή τόσες θέσεις αριστερά από το τέλος του αριθμού του αποτελέσματος.

Εάν έχουμε να πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς 35,5 και 2,49, τότε κάνουμε τον πολλαπλασιασμό $355 \cdot 249 = 88.395$ και επειδή έχουμε τρία συνολικά δεκαδικά ψηφία τοποθετούμε την υποδιαστολή τρεις θέσεις αριστερά από το τέλος, δηλαδή το αποτέλεσμα είναι 88,395.

Εάν πολλαπλασιάσουμε έναν δεκαδικό με τον αριθμό 10 τότε το αποτέλεσμα βρίσκεται εύκολα, απλώς μετακινούμε την υποδιαστολή μία θέση δεξιά.

Δηλαδή, $35,678 \cdot 10 = 356,78$.

Από αυτό αντιλαμβανόμαστε ότι εάν πολλαπλασιάσουμε ένα δεκαδικό αριθμό με δυνάμεις του 10, δηλαδή με το 100, με το 1.000 κλπ. τότε μετακινούμε την υποδιαστολή τόσες θέσεις δεξιά όσα μηδενικά έχει η δύναμη του 10.

Επομένως, $35,678 \cdot 100 = 3567,8$ και $35,678 \cdot 1.000 = 35678$.

Εάν η δύναμη του 10 έχει πιο πολλά μηδενικά από το πλήθος των δεκαδικών τότε προσθέτουμε στο τέλος του δεκαδικού τόσα μηδενικά όσα είναι η διαφορά του πλήθους των δεκαδικών και του πλήθους των μηδενικών της δύναμης του 10 και μετακινούμε την υποδιαστολή ανάλογες θέσεις στα δεξιά. Δηλαδή, στον πολλαπλασιασμό $35,678 \cdot 1.000.000$ η δύναμη του 10 έχει 6 μηδενικά. Επομένως, στο αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού η υποδιαστολή θα πρέπει να μετακινηθεί προς τα δεξιά έξι θέσεις, αλλά επειδή υπάρχουν μόνο τρία δεκαδικά ψηφία γράφουμε το δεκαδικό αριθμό ως 35,678000 και μετακινώντας την υποδιαστολή έξι θέσεις θα έχουμε: $35,678000 \cdot 1.000.000 = 35.678.000$.

Να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί

- 1) $24,089 \times 0,0032$
- 2) $123 \times 3,97$

Να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί

• 1) $24,089$
 $\underline{0,0032}$
 48178
 $\underline{72267}$
 $0,0770848$

2) 123
 $\underline{3,97}$
 861
 1107
 $\underline{369}$
 $488,31$

Η διαίρεση δεκαδικών γίνεται ως εξής: γράφουμε τους δεκαδικούς ως κλάσμα και μετακινούμε την υποδιαστολή δεξιά τόσες θέσεις όσες χρειάζεται ώστε κανένας από τους δύο αριθμούς να μην είναι πλέον δεκαδικός. Εάν χρειάζεται συμπληρώνουμε με μηδενικά. Στη συνέχεια, κάνουμε τη διαίρεση κανονικά και έχουμε το αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, εάν έχουμε να διαιρέσουμε το 2,85 με το 1,5 γράφουμε

$$\frac{2,85}{1,5} = \frac{285}{150} = 1,9$$

$$\frac{2,85}{1,5} = \frac{285}{150} = 1,9$$

Θα αναρωτηθεί κανείς, γιατί υπάρχει η ισότητα των δύο κλασμάτων στην παραπάνω σχέση;

Μα γιατί έχουμε πολλαπλασιάσει ουσιαστικά και τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό, με το 100, επομένως τα κλάσματα είναι ίσα, όπως λεπτομερώς θα δούμε στο παρακάτω τμήμα του κεφαλαίου αυτού που αναφέρεται στα κλάσματα.

Εάν τώρα διαιρέσουμε ένα δεκαδικό με τον αριθμό 10 τότε το αποτέλεσμα βρίσκεται εύκολα: απλώς μετακινούμε την υποδιαστολή μία θέση αριστερά.

Δηλαδή, $35,678/10 = 3,5678$. Από αυτό αντιλαμβανόμαστε ότι εάν διαιρέσουμε ένα δεκαδικό με δυνάμεις του 10, δηλαδή με το 100, με το 1.000 κλπ., τότε μετακινούμε την υποδιαστολή τόσες θέσεις αριστερά όσα μηδενικά έχει η δύναμη του 10.

Επομένως, $35,678/100 = 0,35678$ δηλαδή ο αριθμός έχασε όλο το ακέραιο μέρος του.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

Όλοι οι αριθμοί που διαιρούν έναν αριθμό λέγονται διαιρέτες.

- Για παράδειγμα, οι αριθμοί 1, 2, 4, 8 και 16 είναι διαιρέτες του 16.
Κάθε αριθμός έχει τουλάχιστον δύο διαιρέτες, το 1 και τον εαυτό του.
- Για παράδειγμα, ο αριθμός 5 έχει διαιρέτες το 1 και το 5 και κανέναν άλλο.

Οι αριθμοί που έχουν ως διαιρέτες μόνο το 1 και τον εαυτό τους λέγονται πρώτοι αριθμοί.

Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ) δύο ή περισσότερων ακεραίων είναι ο μεγαλύτερος δυνατός φυσικός αριθμός που να διαιρεί όλους τους αριθμούς ακριβώς.

Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) δύο ή περισσότερων ακεραίων είναι ο μικρότερος δυνατός φυσικός αριθμός που είναι πολλαπλάσιο όλων των αριθμών.