

αναπαραστάσεις στα
μαθηματικά και την
ανάπτυξη της
μαθηματικής σκέψης

Αναπαραστάσεις

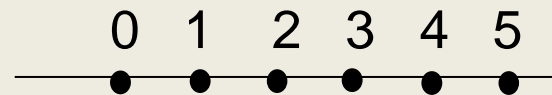
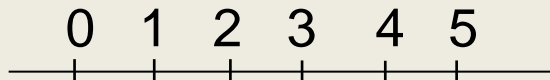
- τα μαθηματικά αντικείμενα αποδίδονται με τη χρήση διαφορετικών αναπαραστατικών μέσων.
- Μια ιδιαίτερη κατηγορία των μέσων αυτών είναι οι λεκτικές περιγραφές και τα γραπτά σύμβολα.
- Τα υπόλοιπα αφορούν εξωτερικές αναπαραστάσεις (external representations) που περιλαμβάνουν:
 - τα μοντέλα πραγματικών καταστάσεων
 - χειριστικά μοντέλα
 - σχηματικά μοντέλα ή εικόνες.

Αναπαραστάσεις

- Με βάση αυτά τα αναπαραστατικά μέσα
 - ο εκπαιδευτικός αποδίδει νόημα στα (μαθηματικά) αντικείμενα και καταστάσεις που διαπραγματεύεται.
 - οι μαθητές τα προσεγγίζουν και δημιουργούν τις *εσωτερικές αναπαραστάσεις* (internal representations) των εννοιών.
- Δηλαδή τα μέσα αυτά διαμεσολαβούν στην εννοιολογική συγκρότηση του ατόμου.

αναπαραστάσεις

- Ανάλογα με τη μορφή τους:
 - βοηθούν στην κατάλληλη εννοιολογική οικοδόμηση,
 - επιτρέπουν την κατανόηση ιδιοτήτων και σχέσεων
 - επιτρέπουν ανακατασκευές.
- Σε κάποιες περιπτώσεις τα μέσα που χρησιμοποιούνται στηρίζουν το σχηματισμό εννοιών, αλλά σε κάποιες άλλες εμποδίζουν ή δημιουργούν λανθασμένες αντιλήψεις για τις έννοιες.



ζητήματα ορολογίας

- αναπαράσταση
- παράσταση
- απεικόνιση
- εξεικόνιση

γνωστική προσέγγιση

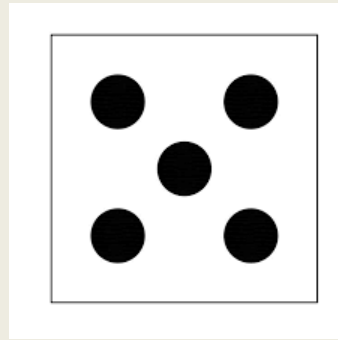
- η (εσωτερική) αναπαράσταση είναι το αποτέλεσμα, το τελικό προϊόν της κωδικοποίησης και επεξεργασίας της προηγούμενης εμπειρίας, η οποία μάλιστα γίνεται έτσι ώστε αυτή να είναι σημαντική και χρησιμοποιήσιμη όταν την χρειάζεται το άτομο (J. Bruner)

τρόποι εσωτερικής / εξωτερικής αναπαράστασης

- ενεργής ή εμπράγματα
- εικονική
- συμβολική

παραδείγματα αναπαραστάσεων

- Τι αναπαραστάσεις είναι αυτές;



5

Εξωτερικές αναπαραστάσεις με βάση τον Bruner

- Εμπράγματα
 - Με υλικά αντικείμενα
- Εικονικές
 - Εικόνες που παραπέμπουν στο σημαινόμενο
- Συμβολικές
 - Τα στοιχεία δεν παραπέμπουν στο σημαινόμενο

σημειωτικός/διαμεσολαβητικός ρόλος
των εξωτερικών αναπαραστάσεων

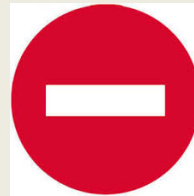
σημαίνον ή σήμα

σημαινόμενο

–σχέση μεταξύ ενός σήματος και της
σημασίας αυτού

παραδείγματα αναπαραστάσεων

- Τι αναπαραστάσεις είναι αυτές;



αναπαραστάσεις στα μαθηματικά

κατάλληλη αναπαράσταση ή συμβολισμός άνοιξε δρόμους εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών

- αριθμητικά συστήματα
 - εισαγωγή του ινδο-αραβικού συστήματος δημιούργησε δυνατότητες γρήγορου υπολογισμού και έδωσε οντότητα στους δεκαδικούς αριθμούς
- άλγεβρα
 - εισαγωγή του αλφαβήτου ως μέσον για την αναπαράσταση των γενικών αριθμών έδωσε τη δυνατότητα γενικών υπολογισμών

αναπαραστάσεις στα μαθηματικά

- στην άλγεβρα – ανάλυση
 - η θεώρηση της συνάρτησης ως ποσότητα αποτελούμενη από μεταβλητή και σταθερές (*Bernoulli*)
 - $2x^2 + 3x + 1$
 -
 - $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$
 - ο συμβολισμός της παραγώγου ως df/dx άνοιξε το δρόμο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων και τη διαχείριση των διαφορικών εξισώσεων

αναπαραστάσεις στα μαθηματικά

- με λίγα λόγια οι αναπαραστάσεις αποτελούν συστατικό του μαθηματικού περιεχομένου και μέρος του εννοιολογικού πεδίου των μαθηματικών εννοιών

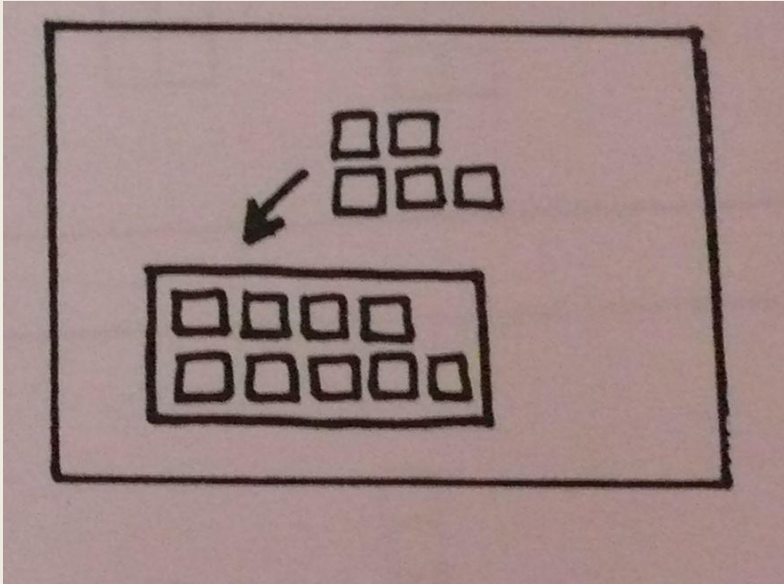
ζητήματα αναπαραστάσεων στη μάθηση των μαθηματικών

- οι στερεότυπες αναπαραστάσεις
- λειτουργούν διευκολυντικά στα μαθηματικά
- αλλά δημιουργούν εμπόδια στους μαθητές
 - $\alpha^2 x^3 + 3 \alpha x + 2 = 0$
 - η «ομοιότητα» αναπαράστασης δεκαδικών και φυσικών διευκολύνει στους υπολογισμούς, αλλά δημιουργεί εννοιολογικά εμπόδια στους μαθητές
 - $2, 10 > 2,5$

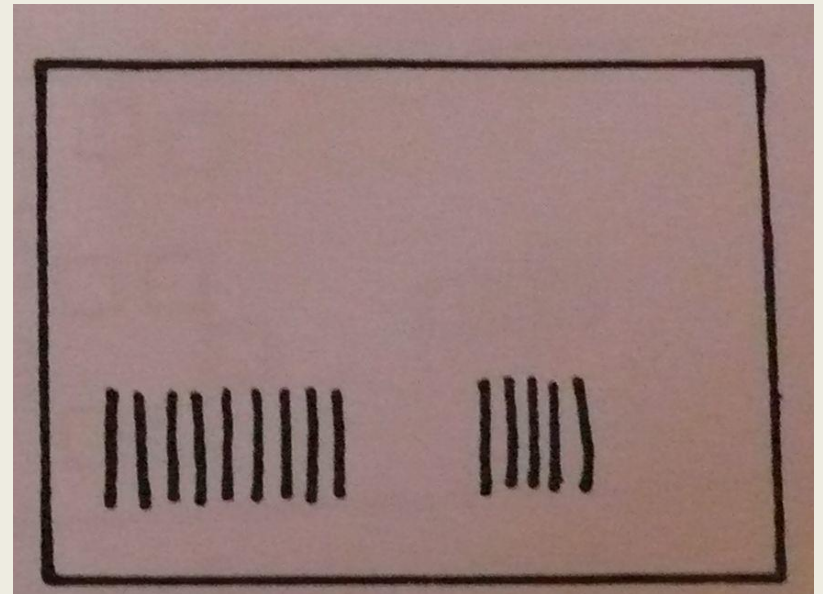
κάποια παραδείγματα

- αυθόρμητων αναπαραστάσεων
- εκπαιδευτικού υλικού

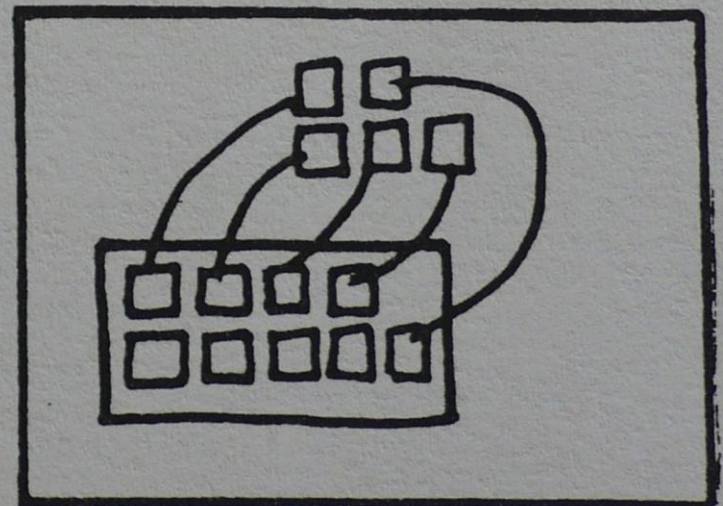
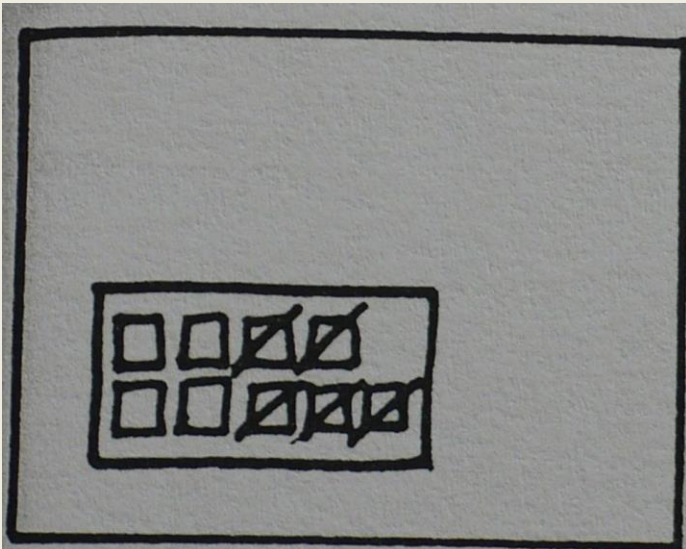
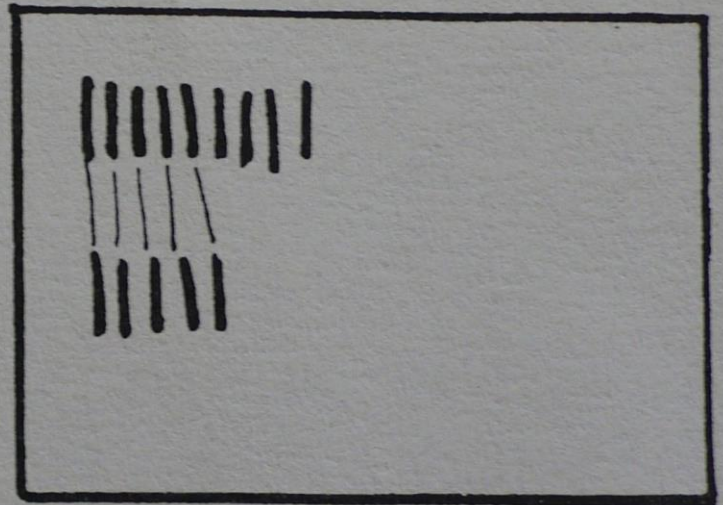
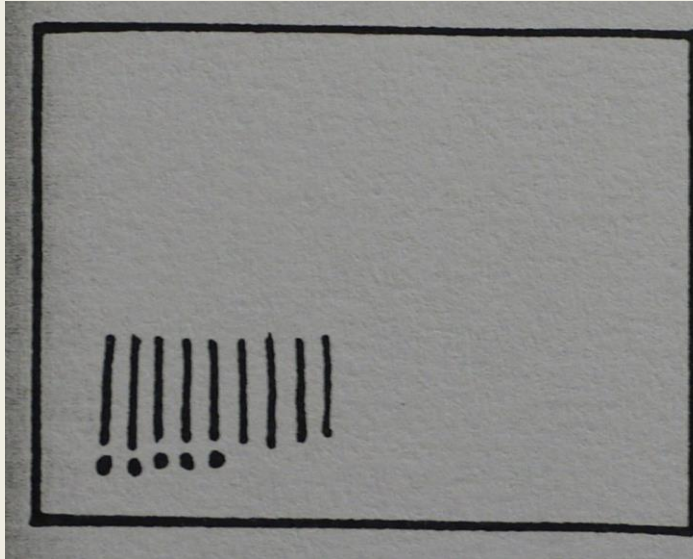
Πρόσθεση



Πηγή: M. Hughes, Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών, Gutenberg

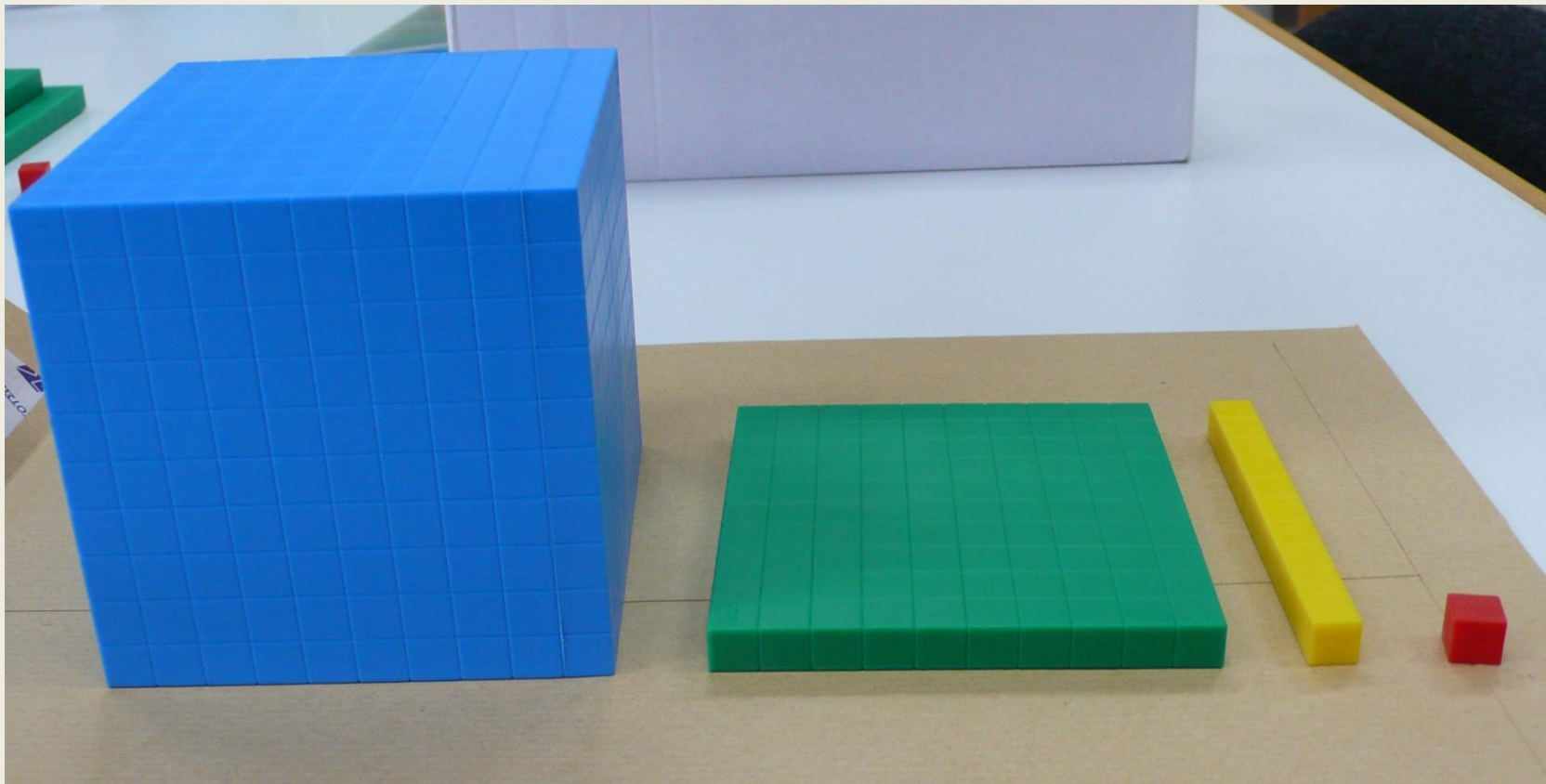


Αφαίρεση



Εκπαιδευτικό υλικό

Αριθμητικά μπλοκ του Dienes



ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

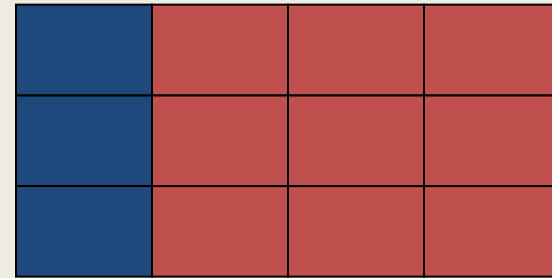
ΚΛΑΣΜΑΤΑ

εννοιολογικές δυσκολίες της έννοιας κλάσμα

- η αντίληψη του κλάσματος ως δύο αριθμών
- η σύνδεση του κλάσματος με την απόλυτη αξία των φυσικών αριθμών
- η διακριτή αντίληψη
 - πράξεις σε αριθμητές και παρονομαστές ανεξάρτητα του ενός από τον άλλο
 - λανθασμένες συγκρίσεις κλασμάτων, π.χ. θεωρείται ότι το $\frac{3}{12}$ είναι μεγαλύτερο από το $\frac{2}{4}$
 - επόμενο κλάσμα του $\frac{2}{5}$ είναι το $\frac{3}{5}$

εννοιολογικές δυσκολίες της έννοιας κλάσμα

- η σύνδεση του κλάσματος με τη σχέση μέρους - όλου



$3/12$ και όχι $1/4$

- η αντίληψη του κλάσματος ως μέγεθος ή ως ποσότητα

- το $\frac{1}{2}$ μιας σοκολάτας μπορεί να είναι μικρότερο από το $\frac{1}{4}$ μιας άλλης σοκολάτας

εννοιολογικές δυσκολίες της έννοιας κλάσμα

- μη υπέρβαση της κλασματικής ποσότητας και μη οικοδόμηση της έννοιας του κλασματικού αριθμού

Κλάσματα - Γ' Δημοτικού

Γράφω και διαβάζω τις κλασματικές μονάδες.

Αριθμητής

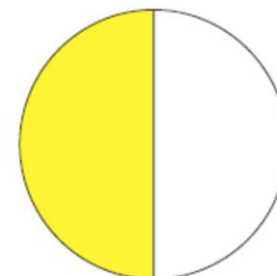
1

Πόσα ίσα μέρη παίρνουμε;



Διαβάζουμε:

Ένα δεύτερο

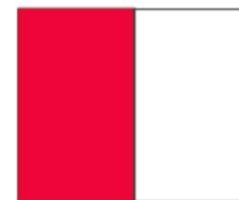
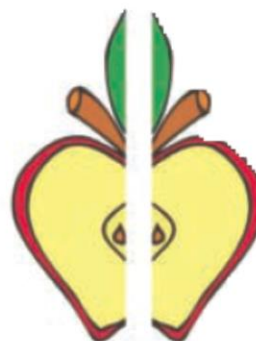


Πόσα ίσα μέρη χωρίζουμε;



2

Παρονομαστής

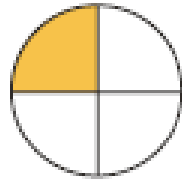


Κλάσματα - Γ' Δημοτικού

Συνδέω με μια γραμμή κάθε κλάσμα με την εικόνα που αντιστοιχεί.



$$\frac{1}{7}$$



$$\frac{1}{5}$$



$$\frac{1}{3}$$



$$\frac{1}{4}$$

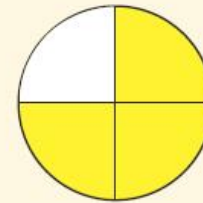
Κλάσματα - Γ' Δημοτικού

συμπεραίνω

Έτσι γράφουμε τα κλάσματα:



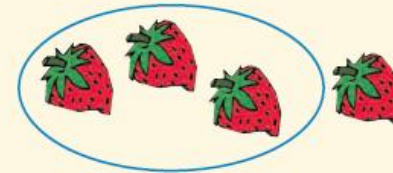
Πόσα ίσα μέρη παίρνουμε;



Διαβάζουμε:
Τρία τέταρτα



Πόσα ίσα μέρη χωρίζουμε;



Κλάσματα - Γ' Δημοτικού




Τα παιδιά έχουν από μια ίδια σοκολάτα και έφαγαν:



Η Άννα  το $\frac{1}{2}$ της σοκολάτας

Ο Γιώργος  τα $\frac{2}{4}$ της σοκολάτας

Η Δανάη  το $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας

Ο Θωμάς  τα $\frac{2}{6}$ της σοκολάτας

- Ποια παιδιά έφαγαν την ίδια ποσότητα σοκολάτας;
- Ποια κλάσματα έχουν την ίδια αξία;



Ζητήματα στην Άλγεβρα

- Νοηματοδότηση παραστάσεων
- Γενίκευση της αριθμητικής
- Άλμα από το συγκεκριμένο στο γενικό

Ζητήματα στην Άλγεβρα

- Παράδειγμα 1
 - Τριώνυμο $2x^2 + 3x + 1$
 - Πολυώνυμο $p(x) = 2x^2 + 3x + 1$
 - Συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

Ζητήματα στην Άλγεβρα

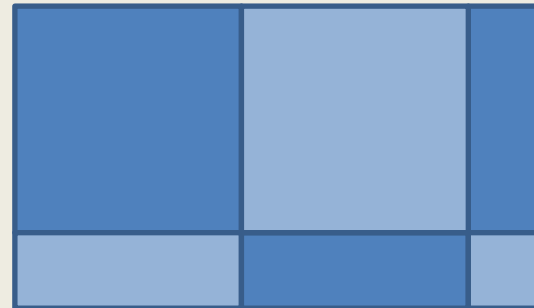
- Παράδειγμα 2

- Παραγοντοποίηση παράστασης

$$2x^2 + 3x + 1$$

Ζητήματα Άλγεβρας

- $2x^2 + 3x + 1$



Υλικό Dienes

Ζητήματα Άλγεβρας

- Παράδειγμα 3
- Η έννοια της συνάρτησης
 - επιστημολογική πολυμορφία
 - αναπαραστατική πολυπλοκότητα
 - ευρύ εννοιολογικό πεδίο
 - πλήθος χρήσεων
 - διδακτική προσέγγιση

Επιστημολογική πολυπλοκότητα

- ανάλογα με το πλαίσιο που δουλεύουμε η συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως:
 - *σχέση, απεικόνιση μετασχηματισμός αντικείμενο...*
- οι αναπαραστάσεις και οι διαδικασίες είναι διαφορετικές και επιβάλλουν ή απαιτούν διαφορετικές αντιλήψεις:
 - *σημειακή επεξεργασία – τοπική αντίληψη γραφικής παράστασης*
 - *οι πράξεις στο δεξί μέλος μιας αναλυτικής έκφρασης – αντίληψη πράξης / ενέργειας για τη συνάρτηση*

Αναπαραστατική πολυπλοκότητα

- τρεις αναπαραστάσεις για τη συνάρτηση:
 - τύπος
 - γραφική παράσταση
 - πίνακας τιμών
- κάθε μορφή αναπαράστασης ανα-δεικνύει διαφορετικές πληροφορίες, απαιτεί διαφορετική "ανάγνωση", έχει άλλες γνωστικές απαιτήσεις

Αναπαραστατική πολυπλοκότητα

- η μετάβαση από τον έναν τύπο στον άλλο δεν είναι αυτόματη
- κάθε τύπος αναπαράστασης "αναπαριστά" κάποια στοιχεία της συνάρτησης
- κανένας τύπος αναπαράστασης δεν "αναπαριστά" πλήρως τη συνάρτηση, δεν στέκει στη θέση της

Δυσκολίες και παρανοήσεις

- προαπαιτούμενες και προϋπάρχουσες γνώσεις και αντιλήψεις
- επιστημολογικά χαρακτηριστικά της συνάρτησης
- αναπαραστατικά χαρακτηριστικά της συνάρτησης
- οργάνωση και περιορισμός του εννοιολογικού πεδίου

Δυσκολίες και παρανοήσεις

- γενικές:
 - κανονικότητα μορφών
 - ορισμός / περιγραφή μαθηματικού αντικειμένου
- ειδικές:
 - μεταβλητή / άγνωστος
 - αριθμός / ποσότητα
 - συναρτησιακές / αιτιώδεις σχέσεις

Δυσκολίες και παρανοήσεις

- ταύτιση αναπαράστασης με τη συνάρτηση
- σχέση ανεξάρτητης / εξαρτημένης μεταβλητής
- εστίαση στην εξαρτημένη μεταβλητή
- εστίαση στην ανεξάρτητη μεταβλητή
- εστίαση στην καμπύλη

Δυσκολίες και παρανοήσεις

- ταύτιση συνάρτησης με τον τύπο
- γεωμετρική αντίληψη της γραφικής παράστασης
- απαραίτητο στοιχείο στον τύπο μιας συνάρτησης να υπάρχει το x

Δυσκολίες και παρανοήσεις

- ειδικές συναρτήσεις
- υπεροχή των συναρτήσεων που ορίζονται από αναλυτικούς τύπους
- διαπραγμάτευση της συνέχειας σε ειδικές μορφές και κυρίως μόνο σε συνεχή πεδία ορισμού
- μη πλήρεις ορισμοί / περιγραφές
- χρήση όρων "μηχανή" και "κανόνας"

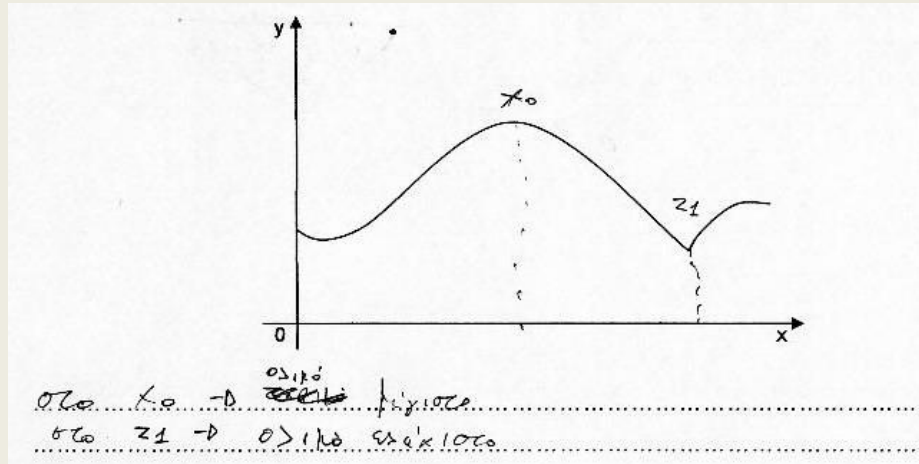
Παραδείγματα αντιλήψεων

- πρέπει να υπάρχει τύπος
- δύο συναρτήσεις με τον ίδιο τύπο και διαφορετικό πεδίο ορισμού θεωρούνται ως ίδια συνάρτηση
- κανονικός και ομαλός τρόπος αναπαράστασης, κυρίως της γραφικής παράστασης
- υποχρεωτική μεταβολή στην ανεξάρτητη μεταβλητή

Παραδείγματα αντιλήψεων

- ταύτιση της συνάρτησης με τον τύπο της (π.χ. συνάρτηση είναι το x^2)
- ταύτιση της έννοιας με το γνωστό πλάτος της έννοιας
- συνάρτηση με μη συνεχές γράφημα δεν θεωρείται συνεχής (π.χ. η συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση $y=x, x \in \mathbb{N}$)

Παραδείγματα αντιλήψεων



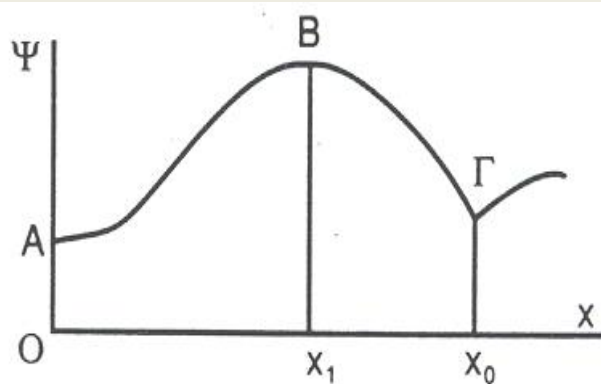
γεωμετρική αντίληψη - 30%

- από το 0 ως το Γ είναι αύξουσα
- από το Γ ως το Δ φθίνουσα....

Παραδείγματα αντιλήψεων

αλγεβρική αντίληψη - 35%

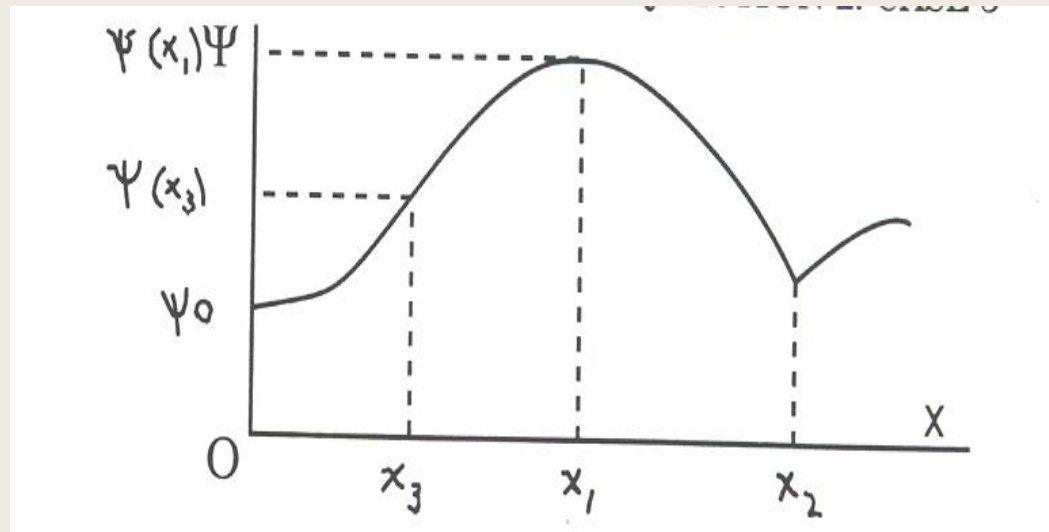
- Η συνάρτηση είναι συνεχής και έχει παράγωγο σε όλα τα σημεία εκτός από το x_0 , έχει μέγιστο



Παραδείγματα αντιλήψεων

συναρτησιακή αντίληψη – 30%

- Η συνάρτηση έχει μέγιστο στο (x_0, y_0)



Παραδείγματα αντιλήψεων

- Συνάρτ. Όχι συν.

- $\{(x, 2x), x \in \mathbb{R}\}$

- 75% 25%

- $\{(1,3),(2,5),(3,4)\}$

- 65% 35%

- $\{(x,y) / x \in \mathbb{N}, y=1\}$

- 60% 40%

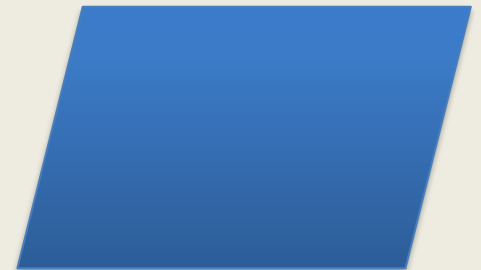
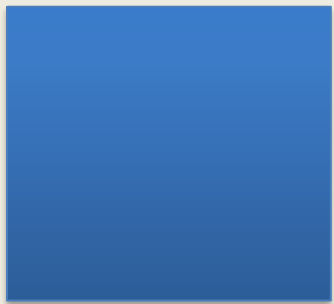
Hitt, 1998

Ζητήματα Γεωμετρίας

- Αναπαραστατικό πλαίσιο
- Στερεότυπα και πρωτοτυπικά σχήματα
- Συγκεκριμένο σχήμα και γενικός παραγωγικός λόγος
- Αλλαγή πλαισίου αναπαράστασης
- Περιορισμοί και ελευθερίες του υλικού και εικονικού γεωμετρικού περιβάλλοντος

Ζητήματα Γεωμετρίας

- ΣΤΕΡΕΟΤΥΠΑ ΣΧΗΜΑΤΑ



Ζητήματα Γεωμετρίας

- ΜΗ ΣΤΕΡΕΟΤΥΠΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

