

ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης (έννοιες, αντιλήψεις, αναπαραστάσεις)

οργάνωση περιεχομένου μαθηματικών,
εννοιολογικές αντιλήψεις στα μαθηματικά
και στους μαθητές

Μαρία Καλδρυμίδου

Θέματα

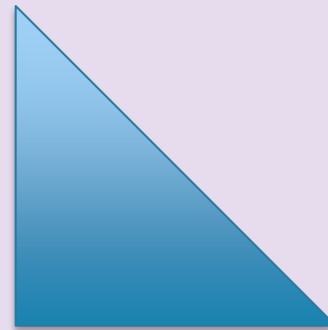
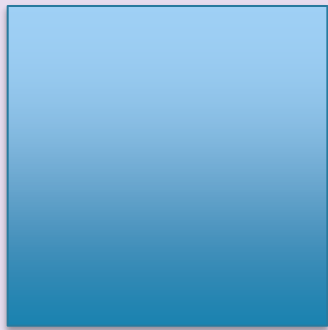
- οργάνωση περιεχομένου μαθηματικών (μαθηματικά αντικείμενα, έννοιες, ιδιότητες, σχέσεις, διαδικασίες, αναπαραστάσεις, επιχειρηματολογία),
- εννοιολογικές αντιλήψεις στα μαθηματικά και στους μαθητές

Μια εισαγωγή...

- Τι εμπλέκεται στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών;
- Ας δούμε κάποια προβλήματα....

Διδακτική Μαθηματικών

- Σχεδιάστε ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο



Διδακτική Μαθηματικών

- Μία τάξη από 26 παιδιά θέλουν να πάνε επίσκεψη στο Μουσείο. Για το σκοπό αυτό νοικιάζουν ταξί. Κάθε ταξί θα πάρει 4 παιδιά. Πόσα ταξί θα χρειαστούν;
- Η πλειοψηφία παιδιών Β' Δημοτικού απάντησαν 6,5 ταξί

Διδακτική Μαθηματικών

- Η κ. Μαρία θέλει να φυτέψει τριανταφυλλιές κατά μήκος μιας πλευράς του φράκτη, που έχει μήκος 10 μέτρα. Οι τριανταφυλλιές πρέπει να απέχουν 1,5 μέτρο μεταξύ τους. Πόσες τριανταφυλλιές θα φυτέψει;
- Η πλειοψηφία απαντά 6 τριανταφυλλιές

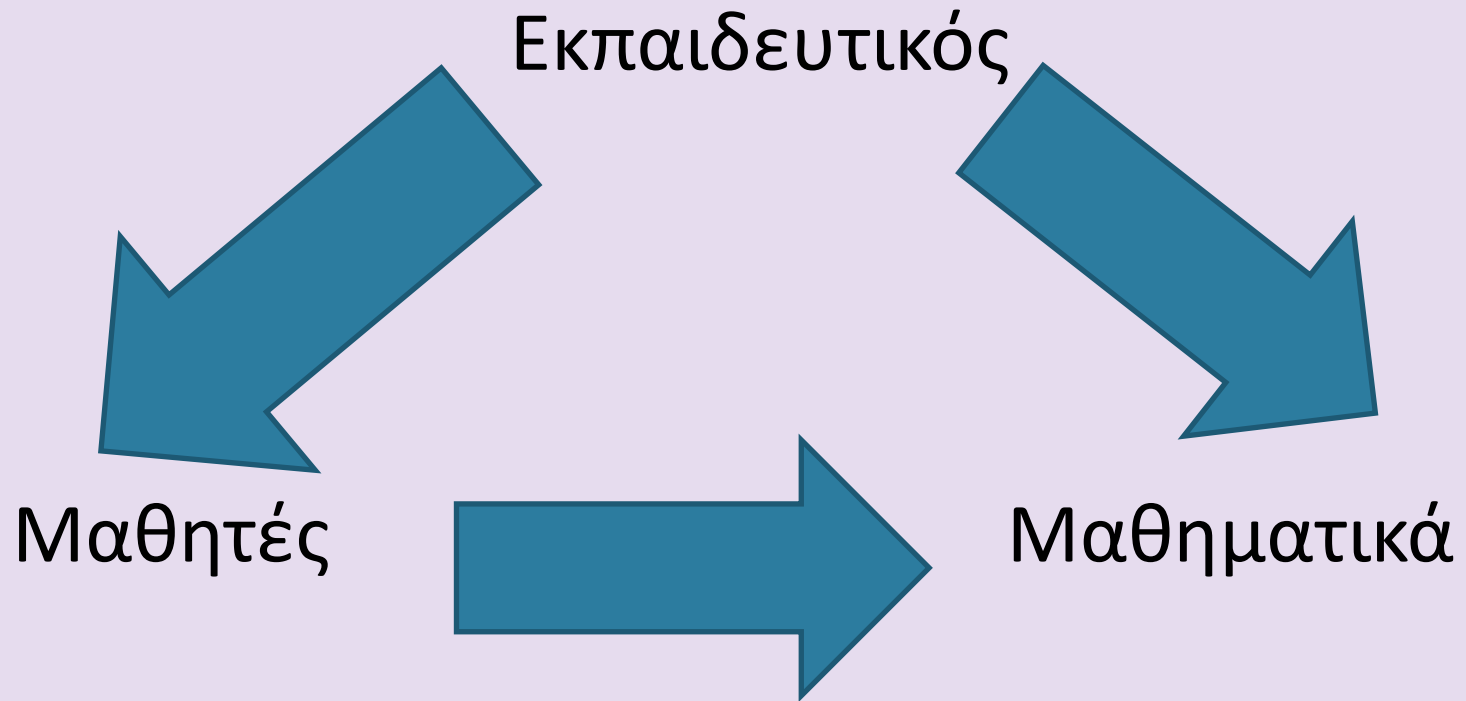
Διδακτική Μαθηματικών

- Συμπερασματικά
 - Ψυχολογικοί παράγοντες
 - Διδακτικοί παράγοντες
 - Χαρακτηριστικά του αντικειμένου

Διδακτική Μαθηματικών

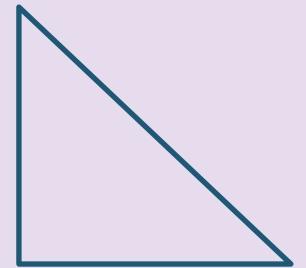
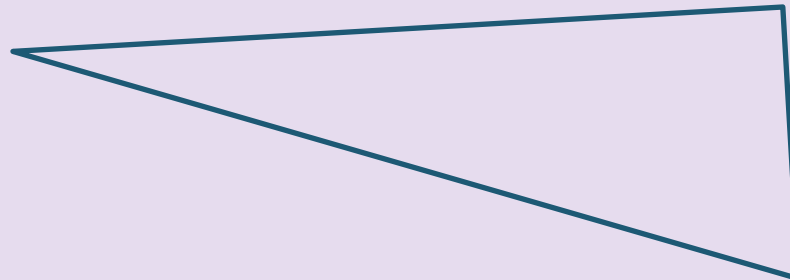
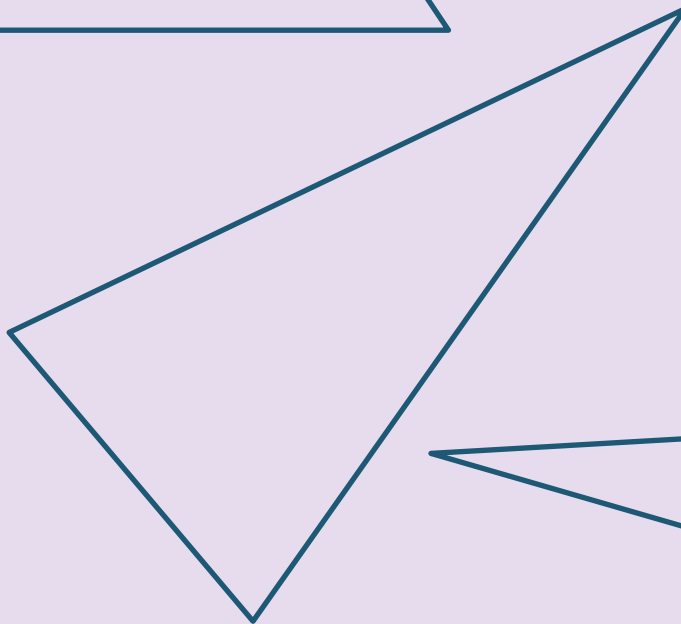
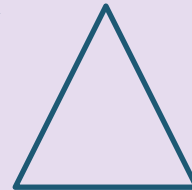
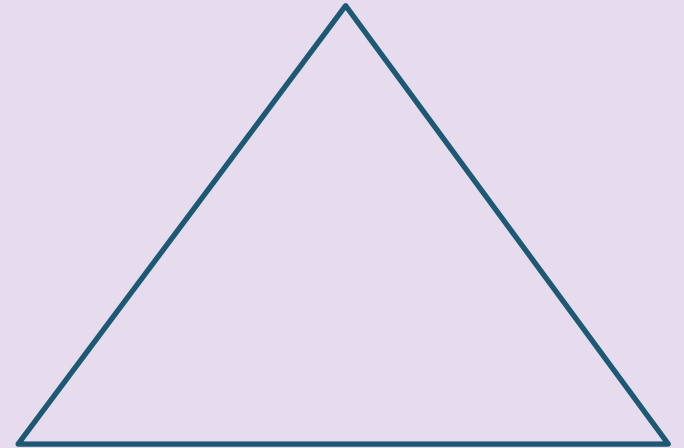
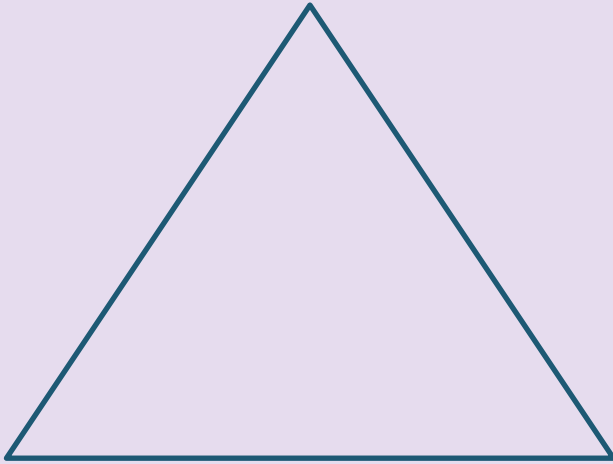
- Το αντικείμενο της Διδακτικής Μαθηματικών είναι η διερεύνηση των φαινομένων που εμπλέκονται στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών

Διδακτικό Σύστημα - Διδακτικό Τρίγωνο

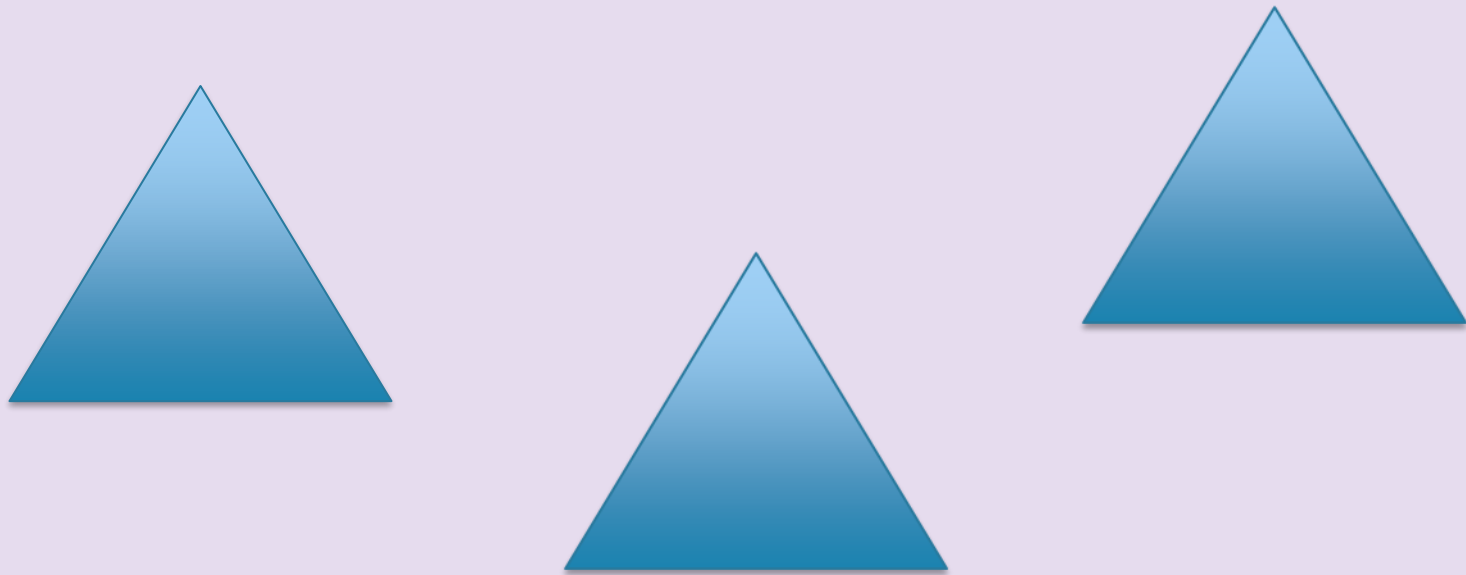


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΙ ΒΛΕΠΕΤΕ; ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΑΥΤΑ;



Τι είναι αυτά;



3 ίσα τρίγωνα ή ένα τρίγωνο;

ένα άλλο ζήτημα...

- έννοια του αριθμού
- έννοια της συμμετρίας

- έννοια
- concept/notion

μαθηματική δραστηριότητα

- επινόηση ιδεατών αντικειμένων.....

μαθηματική δραστηριότητα

- επινόηση ιδεατών αντικειμένων και οργάνωσή τους σε έννοιες (κατηγορίες ομοειδών αντικειμένων)

Περιεχόμενο μαθηματικών

- Μαθηματικά αντικείμενα
- Έννοιες
- Ιδιότητες (θεωρήματα, πορίσματα)
- Σχέσεις
- Ενέργειες
- Διαδικασίες
- Αναπαραστάσεις
- Επιχειρηματολογία και τρόποι συλλογισμού (αποδείξεις)

Ένα παράδειγμα

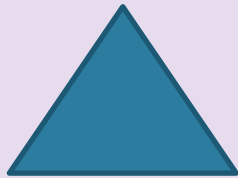
- Μαθηματικά αντικείμενα
 - τα τρίγωνα
- Έννοιες
 - **τρίγωνο**, ορθογώνιο τρίγωνο, αμβλυγώνιο τρίγωνο, οξυγώνιο τρίγωνο, ισόπλευρο τρίγωνο, ισοσκελές τρίγωνο, σκαληνό τρίγωνο
- Ιδιότητες
 - το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180 μοίρες
 - τα ύψη τέμνονται σε ένα σημείο.....


Ένα παράδειγμα

- Σχέσεις
 - σχέση ομοιότητας δύο τριγώνων
- Ενέργειες
 - κατασκευή ενός τριγώνου ίσου με δοθέν
 - υπολογισμός του εμβαδού ενός τριγώνου
- Διαδικασίες
 - κατασκευή με κανόνα και διαβήτη
 - υπολογισμός του εμβαδού με χρήση του τύπου ή με καταμέτρηση των μονάδων που καλύπτουν το τρίγωνο

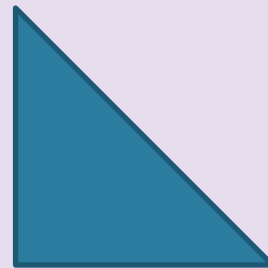
Ένα παράδειγμα

- Αναπαραστάσεις



-  $AB\Gamma$ με $AB=\gamma$, $A\Gamma=\beta$, $B\Gamma=\alpha$, α , β , γ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha < \beta + \gamma$

- Επιχειρηματολογία
 - από το γενικό στο ειδικό



μαθηματικές έννοιες

ορισμός της έννοιας

- Πλάτος της έννοιας
- Βάθος της έννοιας
- Σύνολο των μαθηματικών αντικειμένων που ανήκουν στην έννοια
- Σύνολο των ιδιοτήτων που ισχύουν για όλα τα στοιχεία του πλάτους

μαθηματικές έννοιες

- έννοια του τριγώνου

ορισμός

πλάτος

βάθος

μαθηματικές έννοιες

- ορισμός της έννοιας του τριγώνου
 - τα κλειστά, κυρτά σχήματα που αποτελούνται από τρεις πλευρές
- ένα στοιχείο του πλάτους
 - το τρίγωνο με πλευρές 3, 4, 5 εκατοστά
- ένα στοιχείο του βάθους
 - το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180 μοίρες

μαθηματικές έννοιες

- ο ορισμός αποτελεί τη βάση προσέγγισης μιας έννοιας στα Μαθηματικά και προσδιορίζει πλήρως την έννοια
 - όμως
- δεν μπορεί να αποτελέσει τη βάση οικοδόμησης και κατανόησης μιας έννοιας

μαθηματικές έννοιες

- η οικοδόμηση μιας έννοιας στο μαθητή γίνεται με βάση τη δραστηριότητά του, η οποία δίνει **νόημα** και **σημασία** στην έννοια
- η **διαφοροποίηση** μεταξύ νοήματος/σημασίας και ορισμού είναι απαραίτητο εργαλείο για τη **διδακτική ανάλυση μιας έννοιας και το σχεδιασμό της διδακτικής προσέγγισης** (A. Sierpinska, 1992)

μαθηματικές έννοιες – εννοιολογικό πεδίο (Vergnaud, 1996)

μαθηματικές έννοιες

- (S, I, S)

S : το σύνολο των καταστάσεων

I : το σύνολο των αναλλοίωτων

S : το σύνολο των σημαινόντων
(αναπαραστάσεις)

αντίληψη έννοιας

- το ανάλογο της μαθηματικής έννοιας, η γνώση του υποκειμένου

ποιες καταστάσεις

ποιες ιδιότητες

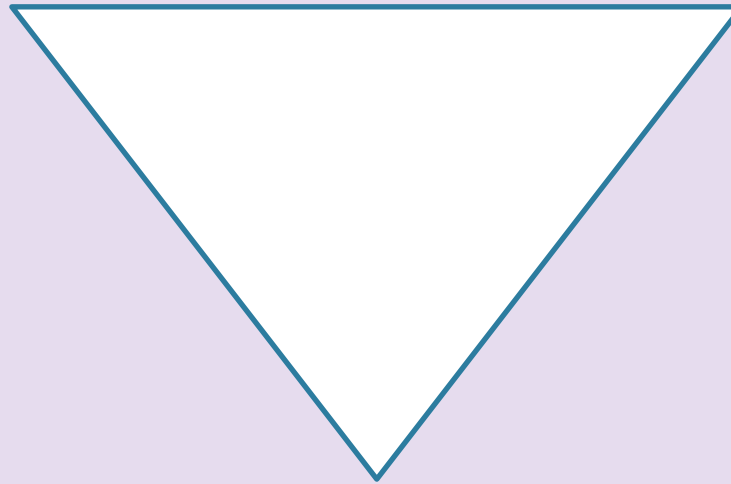
ποιες αναπαραστάσεις

γνωρίζει το υποκείμενο

επιστημολογικό τρίγωνο (Steinbring, 1997, 2005, 2006)

αντικείμενο/
πλαίσιο αναφοράς

σημείο/σύμβολο

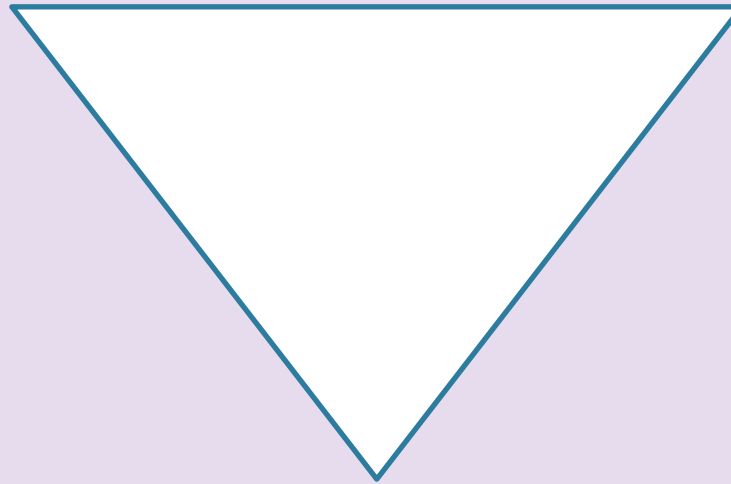


έννοια

τρίγωνο του νοήματος

αντικείμενο/
πλαίσιο αναφοράς

σημείο/σύμβολο



έννοια

μαθηματικές έννοιες

ΜΕ ΛΙΓΑ ΛΟΓΙΑ...

- Το νόημα και η σημασία μιας έννοιας συνδέονται με το πλαίσιο λειτουργίας μιας έννοιας: τις **καταστάσεις** όπου τα αντικείμενα εμπλέκονται, τις **διαδικασίες** που χρησιμοποιούνται, τις **ιδιότητες** που ανακαλύπτονται, τις **αναπαραστάσεις** που χρησιμοποιούνται, τις **σχέσεις** με τις άλλες μαθηματικές έννοιες

ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

έννοιες

- γεωμετρικές
 - ταξινομήσεις / κατηγορίες με κριτήριο μια «ειδοποιό διαφορά» που όμως δεν πληρεί τα αριστοτελικά κριτήρια
- αριθμητικές – αλγεβρικές
 - ταξινομήσεις / κατηγορίες με σχέση ισοδυναμίας

ταξινόμηση / ομαδοποίηση

γένος

```
graph TD; A[γένος] --- B[είδος 1]; A --- C[είδος 2]; A --- D[είδος 3];
```

The diagram illustrates a taxonomic classification. At the top level is a box labeled 'γένος' (genus). A vertical line descends from this box and branches into three horizontal lines, each leading to a box below. These three boxes are labeled 'είδος 1' (species 1), 'είδος 2' (species 2), and 'είδος 3' (species 3) from left to right. All boxes have a light blue background and a darker blue shadow on the left side.

είδος 1

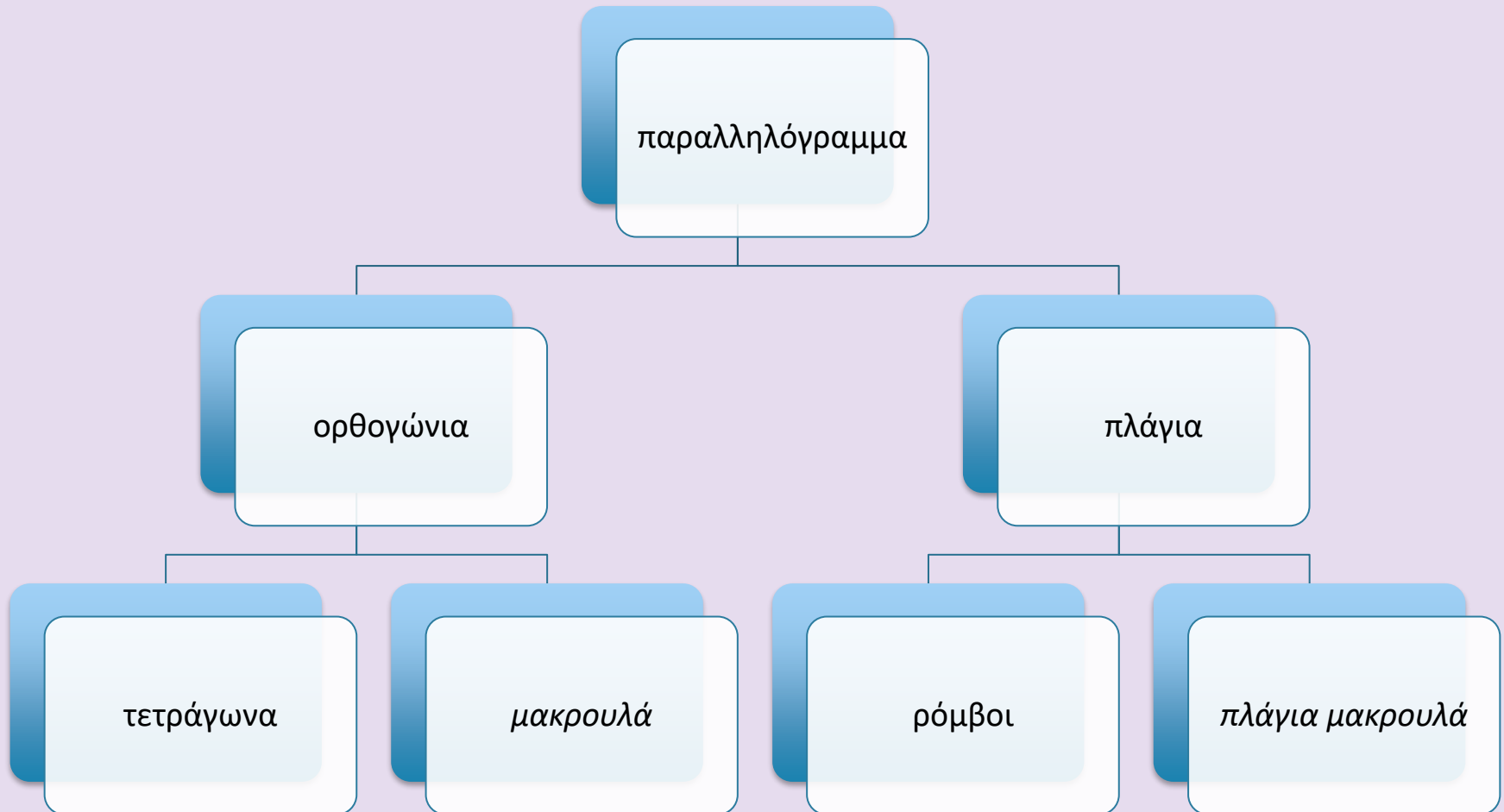
είδος 2

είδος 3

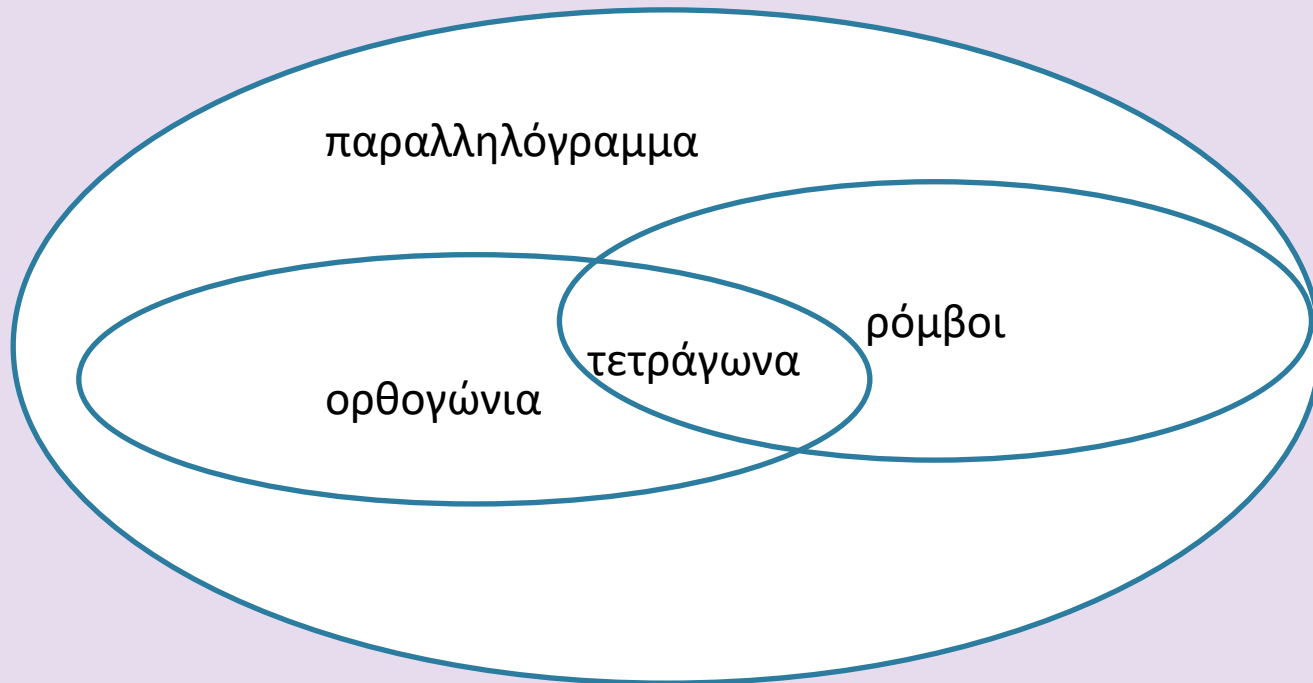
αριστοτελικό κριτήριο ταξινόμησης

- όλα τα αντικείμενα του γένους ανήκουν σε μια και μόνο μια κατηγορία είδους


ταξινόμηση παραλληλογράμμων κατά αριστοτέλη



σύγχρονα μαθηματικά



Ορισμός των Cantor, Frege, Russel & Whitehead



Ομάδα όλων
των συνόλων

Ταξινόμηση με
κριτήριο το πλήθος

Διάταξη με κριτήριο το
πλήθος

Η διατεταγμένη ακολουθία των ομάδων
ισοπληθών συνόλων αποτελεί το
σύνολο των φυσικών αριθμών

Ρητοί

Καρτεσιανό
γινόμενο των
ακεραίων

Σχέση ισοδυναμίας:
 $(\alpha, \beta) \approx (\gamma, \delta)$ αν και
μόνο εάν $\alpha\delta = \beta\gamma$

Ταξινόμηση με κριτήριο τη
σχέση ισοδυναμίας

Το σύνολο πηλίκου που προκύπτει
αποτελεί τους ρητούς αριθμούς

ΑΡΧΙΚΕΣ

ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ ΣΥΓΚΡΟΤΗΣΗΣ ΕΝΝΟΙΩΝ

αρχική συγκρότηση εννοιών

- μέσα από ειδικές περιπτώσεις μαθηματικών αντικειμένων και περιορισμένες καταστάσεις
- με (αυθόρμητες) νοητικές διεργασίες
 - ομαδοποίηση
 - ταξινόμηση
 - αφαίρεση
 - γενίκευση

αφαίρεση

- με αποκοπή
- με εξιδανίκευση

γενίκευση

- επέκταση του πεδίου αλήθειας μιας πρότασης

ζητήματα εννοιολογικών παρανοήσεων

- η γενίκευση των κοινών χαρακτηριστικών των ειδικών περιπτώσεων και καταστάσεων οδηγεί συχνά μέσα από ενσωμάτωση των επιπλέον κοινών χαρακτηριστικών στην εννοιολογική αντίληψη

φαινόμενα υπεργενίκευσης και υπογενίκευσης

- π.χ. το τρίγωνο έχει πάντα τη βάση οριζόντια ή «δεν γέρνει» (δηλ. έχει άξονα συμμετρίας)

ζητήματα εννοιολογικών παρανοήσεων

- η συγκρότηση ομάδων στο ίδιο επίπεδο μαθηματικών αντικειμένων και εννοιών διαφορετικού επιπέδου

φαινόμενα υπογενίκευσης εννοιών

- π.χ. τα τετράγωνα δεν είναι ορθογώνια ή τα ορθογώνια έχουν άνισες τις δύο συνεχόμενες πλευρές τους

Κατανόηση μαθηματικών εννοιών

- Αναγνώριση
 - Ότι «κάτι» υπάρχει που αξίζει να αποτελέσει αντικείμενο μελέτης/σκέψης
- Διαφοροποίηση
 - Από άλλα αντικείμενα
- Γενίκευση
 - Επέκταση του πεδίου εφαρμογής, ανακάλυψη νέων τρόπων ερμηνείας
- Σύνθεση
 - Ανακάλυψη συσχετίσεων, οργάνωση μεμονωμένων γεγονότων, ιδιοτήτων, σχέσεων και αντικειμένων σε ένα συναφές όλον

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Paul Ernest (Ed). 1994. Constructing mathematical knowledge: epistemology and mathematics education, The Falmer Press
- A. Gutierrez & P. Boero (Eds.) 2006. Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education, Sense Publishers
- P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds). 1995. The emergence of mathematical meaning. Lawrence Erlbaum Ass.
- Sierpinska A. 1992. On understanding the notion of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-58). U.S.A: M.A.A

- Steinbring, H.(1997. Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 32 (1), 49-92.
- Steinbring H. 2005. The construction of New Mathematical Knowledge in Classroom interaction. Springer
- Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign?—An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1/2), 133–162.
- Vergnaud, G. 1996. The theory of conceptual fields. In L. Steffe & P. Nesher (Eds) *Theories of mathematical learning* (pp. 219-239). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum