Αικατερίνα ΚΟΡΝΗΛΑΚΗ και Terezinha NUNES

Οι απαρχές κατανόησης της διαίρεσης

Εισαγωγή

ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ έρχονται σε επαφή με τον κόσμο των αριθμών αρκετά προτού τον διδαχτούν στο σχολείο. Μέσα στα πλαίσια της καθημερινής τους ενασχόλησης μαθαίνουν να συσχετίζουν και να συγκρίνουν ποσότητες, να τις ενώνουν, να τις χωρίζουν ή να τις διαιρούν. Πλήθος ερευνών (Carpenter & Moser, 1982· Hudson, 1983· Riley, Greeno & Heller, 1983· Hughes, 1986· Carpenter, Ansell, Franke, Fennema & Weisbeck, 1993) έχει δείξει ότι πολύ πριν τα παιδιά διδαχτούν πρόσθεση και αφαίρεση στο σχολείο μπορούν να λύνουν απλά τέτοια προβλήματα ενώνοντας και χωρίζοντας ποσότητες, αρκεί να δουλεύουν πάνω σε κάποιο υλικό, όπως είναι τα κυβάκια. Πιστεύεται ότι η πρώτη αυτή γνώση που κουβαλούν τα παιδιά, θα αποτελέσει και τη βάση πάνω στην οποία θα οικοδομήσουν την περαιτέρω γνώση που θα τους δοθεί στο σχολείο.

Η έρευνα για την κατανόηση των αριθμητικών πράξεων από παιδιά προσχολικής ηλικίας έχει περιοριστεί στο αν τα παιδιά αυτά κατανοούν προσθετικές και αφαιρετικές έννοιες και μπορούν να λύνουν τα αντίστοιχα προβλήματα. Λιγότερη όμως έρευνα υπάρχει για το τι τα μικρά παιδιά κατανοούν σχετικά με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, πριν διδαχτούν τις πράξεις αυτές στο σχολείο. Πιθανός λόγος για την έλλειψη έρευνας σε αυτό το χώρο είναι η πίστη ότι πρόκειται για πράξεις δύσκολες, δυσκολότερες από την πρόσθεση και την αφαίρεση και επομένως εκτός πεδίου γνώσης των παιδιών.

Πρόσφατες μελέτες στο χώρο της διαίρεσης, η οποία είναι και η πράξη που εξετάζεται σε αυτή την εργασία, έχουν δείξει ότι παιδιά προσχολικής ηλικίας μπορούν να εκτελούν πλήθος δραστηριοτήτων σχετικών με τη διαίρεση. Ήδη από την ηλικία των 4 ετών τα παιδιά μπορούν να μοιράζουν δίκαια μεταξύ τους αντικείμενα, όπως καραμέλες, μολύβια κ.ά. (Desforges & Desforges, 1980· Miller, 1984· Frydman & Bryant, 1988· Davis & Pitkethly, 1990· Frydman, 1990· Hunting & Davis, 1991· Davis & Pepper, 1992). Ακόμα και όταν το μοίρασμα μιας ποσότητας γίνεται από μια κούκλα, τα παιδιά μπορούν εύκολα να κρίνουν αν οι κανόνες του μοιράσματος τηρούνται ή αν η κούκλα κάνει κάποιο λάθος (Frydman, 1990). Στην ηλικία των 5 ετών πολλά παιδιά μπορούν να μοιράζουν σωστά ποσότητες στις οποίες υπάρχει και υπόλοιπο (Desforges & Desforges, 1980). Ακόμα και αν οι ποσότητες που μοιράζουν τα παιδιά είναι άνισες, μπορούν να τροποποιούν τη διαδικασία του μοιράσματος, για να καταλήξουν οι αποδέκτες με ίσα μερίδια. Σε μελέτες τους οι Frydman & Bryant (1988) έδειξαν ότι τα παιδιά θα δώσουν 2 καραμέλες στην κούκλα που τρώει μόνο τις μικρές, μονές καραμέλες, ενώ θα δώσουν 1 καραμέλα στην κούκλα που τρώει μόνο διπλές καραμέλες, για να έχουν στο τέλος και οι δύο την ίδια ποσότητα.

Οι παραπάνω μελέτες δείχνουν ότι τα μικρά παιδιά έχουν μια πολύ καλή κατανόηση του σχήματος δράσης του μερισμού και ξέρουν τι πρέπει να κάνουν, για να σχηματίσουν ίσα πηλίκα. Το ερώτημα που τίθεται λοιπόν είναι τι κατανοούν τα παιδιά για τη διαίρεση ως πράξη από τη διαδικασία αυτή του μοιράσματος. Οι Correa, Nunes & Bryant (1998) υπέθεσαν ότι το να μπορεί κανείς να μοιράζει, δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι κατανοεί τη διαίρεση ως πράξη. Υποστήριξαν ότι ένα σημαντικό βήμα από τη διαδικασία του μοιράσματος στη διαίρεση είναι η κατανόηση κάποιων βασικών διαιρετικών σχέσεων. Σημαντική θεωρήθηκε η κατανόηση της αντίστροφης σχέσης διαιρέτη-πηλίκου, δηλαδή του ότι, όσο πιο πολλοί μοιράζονται κάτι, τόσο πιο λίγο θα πάρει ο καθένας τους. Μάλιστα, σε μια σχετική μελέτη που έκαναν οι παραπάνω ερευνητές με ασυνεχείς ποσότητες, βρήκαν ότι μόνο το 30% των 5χρονων, το 55% των 6χρονων και το 85% των 7χρονων που ήξεραν να μοιράζουν, έδειξαν να κατανοούν την αντίστροφη αυτή σχέση.

Ο σκοπός αυτής της έρευνας είναι να εξετάσει την κατανόηση της αντίστροφης σχέσης διαιρέτη-πηλίκου, στο πλαίσιο προβλημάτων διαίρεσης τόσο με ασυνεχείς, όσο και συνεχείς ποσότητες. Η κατανόηση διαιρετικών σχέσεων στο πλαίσιο μερισμού συνεχών ποσοτήτων παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και αυτό γιατί, κατά τον Kieren (1994), η διαίρεση συνεχών ποσοτήτων οδηγεί σε κλασματικά πηλίκα. Ως γνωστόν, τα παιδιά στο σχολείο έχουν πρόβλημα να κατανοήσουν τα κλάσματα, αλλά και να μοιράσουν μια συνεχή ποσότητα

σε ίσα μέρη μια και πρέπει να έχουν εκ των προτέρων ένα σχήμα για το πού και πόσες τομές θα φέρουν. Επομένως, η εισαγωγή συνεχών ποσοτήτων μπορεί να δείξει, αν τα παιδιά κατανοούν την αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου και σε περιπτώσεις που η εκτέλεση του μερισμού είναι δυσκολότερη.

Η κατανόηση της αντίστροφης σχέσης διαιρέτη-πηλίκου εξετάστηκε στο πλαίσιο δύο ανεξάρτητων πειραμάτων. Η πρώτη μελέτη εξέταζε την αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου στο πλαίσιο προβλημάτων μερισμού και η δεύτερη μελέτη στο πλαίσιο προβλημάτων διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης.

Μεθοδολογία

Υποκείμενα

ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ των διαιρετικών σχέσεων με προβλήματα μερισμού έλαβαν μέρος 128 παιδιά, τα οποία χωρίστηκαν στις εξής ηλικιακές ομάδες: *α)* 32 παιδιά μέσης ηλικίας 4,06 ετών (ηλικιακό εύρος από 4 έως 4,11), *β)* 32 παιδιά μέσης ηλικίας 5,05 ετών (ηλικιακό εύρος από 5 έως 5,11), *γ)* 32 παιδιά μέσης ηλικίας 6,06 ετών (ηλικιακό εύρος από 6 έως 6,11) και *δ)* 32 παιδιά μέσης ηλικίας 7,06 ετών (ηλικιακό εύρος από 7 έως 7,11).

Στη μελέτη των διαιρετικών σχέσεων με προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης έλαβαν μέρος 96 παιδιά από τρεις ηλικιακές ομάδες: *α)* 32 παιδιά μέσης ηλικίας 5,07 ετών (ηλικιακό εύρος από 5 έως 5,11), *β)* 32 παιδιά μέσης ηλικίας 6,07 ετών (ηλικιακό εύρος από 6,01 έως 6,11) και *γ)* 32 παιδιά μέσης ηλικίας 7,06 ετών (ηλικιακό εύρος από 7 έως 7,10).

Όλα τα παιδιά παρακολουθούσαν δημόσια σχολεία στην περιοχή του βόρειου Λονδίνου και δεν είχαν εισαχθεί στην πράξη της διαίρεσης στο σχολείο.

Υλικό

ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΜΕΛΕΤΗ το υλικό αποτελούνταν από 48 ψαράκια, 2 κέικ, 6 καφετιές και 6 γκρίζες γάτες.

Σχεδιασμός

Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΧΕΣΗ διαιρέτη-πηλίκου εξετάστηκε στο πλαίσιο προβλημάτων μερισμού (Μελέτη Ι) και διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης (Μελέτη ΙΙ) με ασυνεχείς και συνεχείς ποσότητες.

Στα προβλήματα μερισμού ζητήθηκε από τα παιδιά να συγκρίνουν δύο διαιρέσεις και να κρίνουν σε ποια από τις δύο το πηλίκο θα ήταν μεγαλύτερο. Για παράδειγμα, στις συνεχείς ποσότητες τα παιδιά έπρεπε να σκεφτούν ποιες γάτες θα έτρωγαν περισσότερο, π.χ. 2 καφετιές που μοιράζονταν 12 ψαράκια ή 3 γκρίζες που μοιράζονταν και αυτές 12 ψαράκια. Στην περίπτωση των ασυνεχών ποσοτήτων οι γάτες μοιράζονταν ένα κέικ.

Τα προβλήματα με ασυνεχείς και συνεχείς ποσότητες δόθηκαν σε δύο πειραματικές συνθήκες: *α)* Στη συνθήκη των ταυτόσημων διαιρετών οι γάτες ήταν οι ίδιες σε αριθμό και στις δύο συγκρινόμενες ομάδες. Επρόκειτο για συνθήκη ελέγχου, για να ελεγχθεί, αν τα παιδιά κατανοούσαν το πρόβλημα. *β)* Στη συνθήκη των διαφορετικών διαιρετών, που ήταν και η πειραματική συνθήκη, κάθε ομάδα είχε διαφορετικό αριθμό από γάτες. Για να βρουν τα παιδιά ποιες γάτες θα έτρωγαν περισσότερο, έπρεπε να εφαρμόσουν την αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου, δηλαδή να σκεφτούν ότι όσο περισσότεροι μοιράζονται μια ποσότητα, τόσο λιγότερο θα πάρει ο καθένας. Σημειωτέον ότι και στις δύο πειραματικές συνθήκες κάθε ζεύγος σύγκρισης είχε τον ίδιο διαιρετέο.

Ως διαιρετέοι επιλέχθηκαν οι αριθμοί 12 και 24 και ως διαιρέτες οι αριθμοί 2, 3, 4 και 6. Σε κάθε συνθήκη κάθε παιδί απάντησε συνολικά σε 4 προβλήματα. Οι αριθμητικοί συνδυασμοί που δόθηκαν σε κάθε παιδί διέφεραν συστηματικά, για να ελεγχθεί το κατά πόσο το μέγεθος των αριθμών επηρέαζε την επίδοσή τους.

Διαδικασία

ΚΑΘΕ ΠΑΙΔΙ εξετάστηκε ατομικά στο χώρο του σχολείου του. Στα προβλήματα μερισμού με ασυνεχείς ποσότητες δείξαμε στα παιδιά δύο ομάδες από γάτες, π.χ. 3 καφετιές και 4 γκρίζες, και τους εξηγήσαμε ότι κάθε ομάδα θα μοιραζόταν, π.χ. 12 ψαράκια. Μάλιστα μετρήσαμε μαζί με τα παιδιά τα ψαράκια, για να είναι βέβαια ότι και οι δύο ομάδες είχαν ακριβώς τον ίδιο αριθμό. Τονίστηκε ότι οι γάτες θα μοιράζονταν δίκαια μεταξύ τους τα ψάρια και θα τα έτρωγαν όλα. Ζητήσαμε από τα παιδιά να μας πουν ποιες γάτες θα έτρωγαν περισσότερο, οι 3 καφετιές ή οι 4 γκρίζες. Στα αντίστοιχα προβλήματα με συνεχείς ποσότητες οι γάτες μοιράζονταν μεταξύ τους ένα κέικ.

Στα προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης με ασυνεχείς ποσότητες δείξαμε ξανά στα παιδιά δύο γάτες. Τους εξηγήσαμε ότι η κάθε γάτα είχε μια ποσότητα από 12 ψαράκια. Η μια γάτα, η καφετιά, θα μοίραζε τα ψαράκια της δίνοντας 2 σε κάθε φίλο της, ενώ η άλλη γάτα, η γκρι, θα τα μοίραζε δίνοντας 3 σε κάθε φίλο της. Η ερώτηση ήταν ποια γάτα θα μπορούσε να κεράσει περισσότερους φίλους της. Μάλιστα, για να υποβοηθήσουμε τη μνήμη των παιδιών τους δείξαμε σε μια καρτελίτσα τη μια γάτα να μοιράζει σε 2άδες και την άλλη σε 3άδες. Στα αντίστοιχα προβλήματα με συνεχείς ποσότητες δείξαμε στα παιδιά τη μια γάτα να μοιράζει ένα κέικ σε μικρά και την άλλη σε μεγαλύτερα κομμάτια και τα ρωτήσαμε να μας πουν ποια γάτα θα έκοβε περισσότερα κομμάτια, για να κεράσει τους φίλους της.

Μετά από κάθε απάντηση ζητήθηκε από τα παιδιά να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.

Αποτελέσματα

ΥΠΗΡΧΕ ΠΑΝΤΑ η πιθανότητα τα παιδιά να έδιναν τυχαίες απαντήσεις. Για το λόγο αυτό χωρίστηκαν σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με τον αν απαντούσαν συστηματικά σωστά ή λάθος σε κάθε πειραματική συνθήκη. Ο αριθμός των παιδιών, που απάντησαν συστηματικά σωστά στα προβλήματα μερισμού και επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης με ασυνεχείς και συνεχείς ποσότητες, φαίνεται στους Πίνακες 1 και 2.

Τα αποτελέσματα των παιδιών ηλικίας 4 ετών δεν συμπεριλήφθηκαν στην ανάλυση, γιατί τα περισσότερα από αυτά έδωσαν τυχαίες απαντήσεις.

Ειδικότερα, στα προβλήματα μερισμού όπως προκύπτει από τα δεδομένα του Πινάκα 1 ένας σημαντικός αριθμός παιδιών απάντησε σωστά μόνο στη συνθήκη των ταυτόσημων διαιρετών, που ήταν και η συνθήκη ελέγχου. Αυτό σημαίνει ότι τα περισσότερα παιδιά κατανοούσαν την προβληματική της δραστηριότητας που τους δόθηκε. Όμως αυτό δεν ήταν επαρκής προϋπόθεση για

ΠΙΝΑΚΑΣ 1: *Η επίδοση των παιδιών στα προβλήματα μερισμού με ασυνεχείς και συνεχείς ποσότητες ανά ηλικία.*

Ασυνεχείς ποσότητες

	Απέτυχαν και στις δύο συνθήκες	*Πέτυχαν μόνο στη συνθήκη των ταυτόσημων διαιρετών*	*Απέτυχαν και στις δύο συνθήκες*
5 ετών	12	9	11
6 ετών	5	10	17
7 ετών	–	6	26
Σύνολο	17	25	54

Συνεχείς ποσότητες

	Απέτυχαν και στις δύο συνθήκες	*Πέτυχαν μόνο στη συνθήκη των ταυτόσημων διαιρετών*	*Απέτυχαν και στις δύο συνθήκες*
5 ετών	12	10	10
6 ετών	5	11	16
7 ετών	–	6	26
Σύνολο	17	27	52

ΠΙΝΑΚΑΣ 2: *Η επίδοση των παιδιών στα προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης με ασυνεχείς και συνεχείς ποσότητες ανά ηλικία.*

Ασυνεχείς ποσότητες

	Απέτυχαν και στις δύο συνθήκες	Πέτυχαν μόνο στη συνθήκη των ταυτόσημων διαιρετών	Απέτυχαν και στις δύο συνθήκες
5 ετών	16	11	5
6 ετών	5	15	12
7 ετών	–	10	22
Σύνολο	21	36	39

Συνεχείς ποσότητες

	Απέτυχαν και στις δύο συνθήκες	Πέτυχαν μόνο στη συνθήκη των ταυτόσημων διαιρετών	Απέτυχαν και στις δύο συνθήκες
5 ετών	13	12	7
6 ετών	4	14	14
7 ετών	–	9	23
Σύνολο	17	35	44

να απαντήσουν σωστά και στην πειραματική συνθήκη. Αν και όλα τα παιδιά που απάντησαν σωστά στην πειραματική συνθήκη έδωσαν τη σωστή απάντηση στη συνθήκη ελέγχου, το αντίστροφο δεν ήταν αληθές. Ο αριθμός παιδιών που πέτυχαν στην πειραματική συνθήκη αυξήθηκε σημαντικά με την ηλικία. Το ένα τρίτο των 5χρονων, τα μισά από τα 6χρονα και το 80% των 7χρονων έδωσαν τη σωστή απάντηση στις ασυνεχείς και τις συνεχείς ποσότητες. Η στατιστική ανάλυση έδειξε ότι η επίδοση των παιδιών επηρεάστηκε από την ηλικία τους τόσο στις ασυνεχείς ($X^2 = 14{,}47$, df=2, $p < .001$) όσο και τις συνεχείς ποσότητες ($X^2 = 16{,}44$, df = 2, $p < .001$). Το McNemar τεστ έδειξε ότι η επίδοση δεν επηρεάστηκε από το είδος της μοιραζόμενης ποσότητας ($p < .5$) ή το μέγεθος του διαιρετέου. Όλα τα παιδιά, εκτός από δύο, που ήταν επιτυχή με τις ασυνεχείς ποσότητες, εξακολουθούσαν να δίνουν τις σωστές απαντήσεις και στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων.

Παρόμοια ήταν η εικόνα των αποτελεσμάτων και στη μελέτη κατανόησης διαιρετικών σχέσεων στο πλαίσιο προβλημάτων διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης (Πίνακας 2). Ένας σημαντικός αριθμός παιδιών έδωσε τη σωστή απάντηση, αλλά μόνο στη συνθήκη ελέγχου. Η επίδοση των παιδιών στην πειραματική συνθήκη αυξήθηκε σημαντικά με την ηλικία τόσο με τις

ασυνεχείς ($X^2 = 18{,}91$, df = 2, $p < .001$) όσο και με τις συνεχείς ποσότητες ($X^2 = 14{,}23$, df = 2, $p < .001$). Το 16% των 5χρονων, το 38% των 6χρονων και το 69% των 7χρονων έδωσε τη σωστή απάντηση στα προβλήματα με τις ασυνεχείς ποσότητες. Ελαφρά αυξημένα ήταν τα ποσοστά επίδοσης με τις συνεχείς ποσότητες, όπου το 22% των 5χρονων, το 44% των 6χρονων και το 72% των 7χρονων απάντησε επιτυχώς. Παρ' όλα αυτά, το McNemar τεστ έδειξε ότι η επίδοση των παιδιών δεν επηρεάστηκε στατιστικώς σημαντικά από το είδος της μοιραζόμενης ποσότητας ($p < .06$).

Η σύγκριση της επίδοσης των παιδιών στα προβλήματα μερισμού και επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης έδειξε ότι τα προβλήματα μερισμού ήταν ευκολότερα, αλλά μόνο όταν η μοιραζόμενη ποσότητα ήταν ασυνεχής.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τον τρόπο σκέψης των παιδιών προχωρήσαμε σε μια ποιοτική ανάλυση των αιτιολογήσεων που έδωσαν στις απαντήσεις τους. Οι αιτιολογήσεις των παιδιών ταξινομήθηκαν σε 5 κατηγορίες:

α) Αιτιολογήσεις μη σχετικές με το πρόβλημα. Σε αυτή την κατηγορία περιλαμβάνονται απαντήσεις του τύπου «δεν ξέρω», απαντήσεις που αντανακλούν προσωπικές προτιμήσεις των παιδιών κ.ά.

β) Αιτιολογήσεις που επικεντρώνονται στην ισότητα των διαιρετέων. Επειδή στις συγκρινόμενες διαιρέσεις ο διαιρετέος παρέμενε σταθερός, μερικά παιδιά θεώρησαν ότι το αποτέλεσμα της διαίρεσης θα ήταν το ίδιο, αγνοώντας τις διαφορές στο μέγεθος του διαιρέτη.

γ) Αιτιολογήσεις που επικεντρώνονται στην ανάλογη σχέση διαιρέτη-πηλίκου. Υπήρξαν παιδιά που θεώρησαν ότι το μεγαλύτερο μερίδιο αντιστοιχεί στην ομάδα με τους περισσότερους αποδέκτες.

δ) Αιτιολογήσεις που επικεντρώνονται στην αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου. Αυτή η αιτιολόγηση δόθηκε στις περιπτώσεις που τα παιδιά θεώρησαν ότι όσο πιο λίγοι μοιράζονται μια ποσότητα, τόσο πιο λίγο θα πάρει ο καθένας.

ε) Αιτιολογήσεις που βασίζονταν στον αριθμητικό υπολογισμό των απαντήσεων.

Περαιτέρω ανάλυση έδειξε ότι τα περισσότερα παιδιά που έδωσαν σωστές απαντήσεις, δεν τις έδωσαν στην τύχη, αλλά εφαρμόζοντας την αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου (Πίνακες 3 και 4). Τα περισσότερα παιδιά που απέτυχαν, απέτυχαν γιατί έκαναν συστηματικά ένα λάθος: εφάρμοσαν την ανάλογη αντί την αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου.

Πινακας 3: *Τα ποσοστά των αιτιολογήσεων που έδωσαν τα παιδιά που πέτυχαν ή απέτυχαν στη συνθήκη των διαφορετικών διαιρετών στο πρόβλημα μερισμού με συνεχείς και ασυνεχείς ποσότητες.*

Ασυνεχείς ποσότητες

	Μη σχετικές με το πρόβλημα	*Επικεντρωμένες στην ισότητα των διαιρετέων*	*Επικεντρωμένες στην ανάλογη σχέση διαιρέτη-πηλίκου*	*Επικεντρωμένες στην αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου*	*Προσπάθεια υπολογισμού*
Παιδιά που απέτυχαν	32%	7%	59%	2%	-
Παιδιά που πέτυχαν	5%	-	-	89%	6%

Συνεχείς ποσότητες

	Μη σχετικές με το πρόβλημα	*Επικεντρωμένες στην ισότητα των διαιρετέων*	*Επικεντρωμένες στην ανάλογη σχέση διαιρέτη-πηλίκου*	*Επικεντρωμένες στην αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου*	*Προσπάθεια υπολογισμού*
Παιδιά που απέτυχαν	28%	6%	65%	1%	-
Παιδιά που πέτυχαν	6%	-	1%	90%	3%

Πινακας 4: *Τα ποσοστά των αιτιολογήσεων που έδωσαν τα παιδιά που πέτυχαν ή απέτυχαν στη συνθήκη των διαφορετικών διαιρετών στα προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης.*

Ασυνεχείς ποσότητες

	Μη σχετικές με το πρόβλημα	*Επικεντρωμένες στην ισότητα των διαιρετέων*	*Επικεντρωμένες στην ανάλογη σχέση διαιρέτη-πηλίκου*	*Επικεντρωμένες στην αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου*	*Προσπάθεια υπολογισμού*
Παιδιά που απέτυχαν	20%	2%	78%	-%	-
Παιδιά που πέτυχαν	1%	-	-	94%	5%

Συνεχείς ποσότητες

	Μη σχετικές με το πρόβλημα	*Επικεντρωμένες στην ισότητα των διαιρετέων*	*Επικεντρωμένες στην ανάλογη σχέση διαιρέτη-πηλίκου*	*Επικεντρωμένες στην αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου*	*Προσπάθεια υπολογισμού*
Παιδιά που απέτυχαν	21%	2%	77%	-%	-
Παιδιά που πέτυχαν	4%	-	-%	92%	4%

Συζήτηση

Τα αποτελεσματα της έρευνας δίνουν μια θετική εικόνα για το τι κατανοούν τα μικρά παιδιά για τη διαίρεση. Ένα σημαντικό ποσοστό παιδιών έδειξε να κατανοεί μια βασική διαιρετική σχέση, την αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου. Το επίτευγμα αυτό είναι ακόμα πιο σημαντικό, αν σκεφτεί κανείς ότι τα παιδιά που πήραν μέρος στην έρευνα, δεν είχαν διδαχτεί διαίρεση στο σχολείο.

Τα παιδιά έδειξαν να κατανοούν την αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου και στο πλαίσιο προβλημάτων με συνεχείς ποσότητες, πράγμα που σημαίνει ότι είχαν μια εικόνα για το αναμενόμενο αποτέλεσμα, ακόμα και όταν αυτό εκφραζόταν ως κλάσμα. Αυτή η κατάκτηση είναι ιδιαίτερα σημαντική, αν λάβει κανείς υπόψη του ότι τα μικρά παιδιά έχουν δυσκολία να μοιράσουν με ακρίβεια μια συνεχή ποσότητα σε ίσα μέρη. Ακόμα και όταν τα παιδιά εισαχθούν στα κλάσματα και τη γραπτή τους αναπαράσταση, έχουν δυσκολία να τα συγκρίνουν μεταξύ τους και επηρεασμένα από τις σχέσεις των φυσικών αριθμών θεωρούν συχνά, π.χ., ότι το 1/6 είναι μεγαλύτερο από το 1/3. Όμως τα παιδιά αυτής της μελέτης έδειξαν να κατανοούν ότι ένα κέικ στα 6 καταλήγει σε μικρότερα μερίδια από ένα κέικ στα 3.

Τα αποτελέσματα της έρευνας υποστηρίζουν την αρχική θεώρηση των Correa, Nunes & Bryant (1998), ότι η δραστηριότητα του μοιράσματος δεν είναι πράξη ταυτόσημη με την πράξη της διαίρεσης, αν και το σχήμα δράσης του μερισμού οδηγεί σταδιακά το παιδί στην κατανόηση των διαιρετικών σχέσεων. Τα παιδιά της έρευνας αν και ήταν σε ηλικία που μπορούσαν να μοιράζουν, εντούτοις δεν έδειξαν να κατανοούν όλα τις διαιρετικές σχέσεις.

Τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής συγκλίνουν στην άποψη, ότι, παρόλο που η διαίρεση θεωρείται πράξη δύσκολη, εντούτοις τα παιδιά από πολύ νωρίς αρχίζουν να κατανοούν κάποιες βασικές σχέσεις στα πλαίσια της πράξης αυτής. Τα παιδιά έχουν μια γνώση για τη διαίρεση, την οποία γνώση το σχολείο αφήνει ανεκμετάλλευτη μέχρι περίπου το τέλος της δευτέρας τάξης του δημοτικού. Για το λόγο αυτό το σχολείο οφείλει να λάβει υπόψη του τη γνώση που φέρνουν τα παιδιά στην τάξη και να την αξιοποιήσει κατάλληλα επεκτείνοντάς την σε νέες κατευθύνσεις. Πάνω σε αυτές τις πρώτες γνώσεις το σχολείο θα θέσει τα θεμέλια, για να κτίσει μια πιο πολύπλευρη κατανόηση της πράξης της διαίρεσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of problems solving: A study of kindergarden children's problem solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (5), 428-441.

Carpenter, T. P. & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem solving. Στο T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds). *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (9-24). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Correa, J., Nunes, T. & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: the relationship between division terms in a non-computational task. *Journal of Educational Psychology*, 90 (2), 1-9.

Davis, G. E. & Hunting, R. P. (1990). Spontaneous partitioning: Preschoolers and discrete items. *Educational Studies in Mathematics*, 21(2), 367-374.

Davis, G. E. & Pepper, K. L. (1992). Mathematical problems solving by pre-school children. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 397-415.

Davis, G. E. & Pitkethly, A. (1990). Cognitive aspects of sharing. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (2), 145-153.

Desforges, A. & Desforges, C. (1980). Number based strategies of sharing in young children. *Educational Studies*, 6 (2), 97-109.

Frydman, O. (1990). *The role of correspondence in the development of number based strategies in young children*. Unpublished PhD thesis, Oxford University.

Frydman, O. & Bryant, P. E. (1988). Sharing and understanding of the number equivalence by young children. *Cognitive Development*, 3, 323-329.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development*, 54, 84-90.

Hughes, M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning mathematics*. Oxford: Blackwell Publishers.

Hunting, R. P. & Davis, G. E. (1991). Dimensions of young children's conceptions of the fraction one half. Στο R. P. Hunting & G. E. Davis (Eds). *Early fraction learning* (27-53). New York: Springer-Verlag.

Kieren, T. (1994). Multiple views of multiplicative structures. Στο G. Harel & J. Confrey (Eds). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (389-400). Albany, New York: State University of New York Press.

Miller, K. (1984). Measurement procedures and the development of quantitative concepts. Στο C. Sophian (Ed.). *Origins of cognitive skills. The eighteen annual carnegie symposium on cognition* (193-228). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Riley, M., Greeno, J. G. & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. Στο H. P. Ginsburg (Ed.). *The development of mathematical thinking* (153-196). New York: Academic Press.