



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων & Συστημάτων



Τεχνική Μηχανική

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μέρος Β-Αντοχή Υλικών

Κάμψη-Στρέψη

Άνθιμος Σ. ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗΣ

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, EurIng

Άσκηση 1

Για την δοκό, του παρακάτω σχήματος, η οποία φορτίζεται με ομοιόμορφο φορτίο 10 KN/m , είναι κατασκευασμένη από δομικό χάλυβα με όριο διαρροής $f_y = 23,50 \text{ KN/cm}^2$ και το μέτρο ελαστικότητας $E = 210 \text{ GPa}$, και έχει διατομή διπλού τάυ, I:

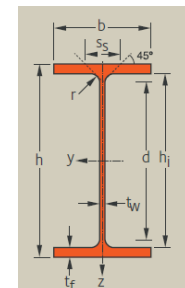
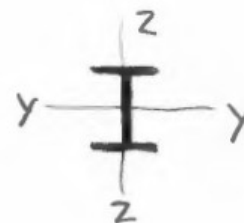
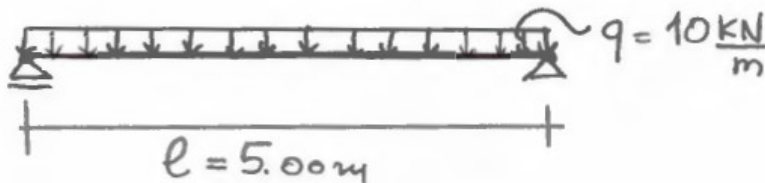
Ζητούνται:

(α) Να βρεθεί η μέγιστη ροπή.

(β) Να διαστασιολογηθεί η δοκός.

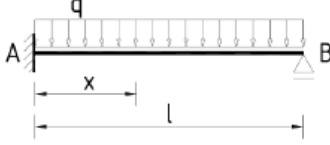
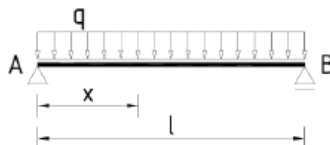

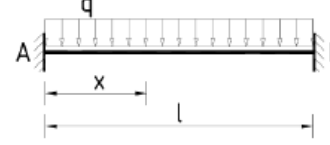
(γ) Να γίνει ο έλεγχος του βέλους κάμψης για μια επιτρεπόμενη τιμή της τάξης του $I/250$, και στην περίπτωση που δεν υπάρχει επάρκεια να βρεθεί ποια διατομή είναι επαρκής.

(δ) Για την διατομή που έχει προκύψει από το ερώτημα (γ) να βρεθεί ποια είναι η μέγιστη ροπή κάμψης που μπορεί να παραλάβει καθώς και οι τάσεις στις ακραίες ίνες.



(α) Να βρεθεί η μέγιστη ροπή.

Πίνακες [από βιβλιογραφία]

	$M_x = \frac{q \cdot (l - x)}{8} \cdot (4 \cdot x - l)$ $M_A = -\frac{q \cdot l^2}{8}$ $M_{max} = 0,0703 \cdot q \cdot l^2$ $x = 0,625 \cdot l$	$A = -\frac{5}{8} \cdot q \cdot l$ $B = -\frac{3}{8} \cdot q \cdot l$	$\delta_{max} = \frac{q \cdot l^4}{185 \cdot E \cdot I}$ $x = 0,4215 \cdot l$
	$M_x = \frac{q \cdot l^2}{2} \cdot \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$ $M_{l/2} = \frac{q \cdot l^2}{8}$	$A = B = -\frac{q \cdot l}{2}$	$\delta_{l/2} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$
	$M_x = -\frac{q}{2} \cdot (a - x)^2$ $M_A = -\frac{q \cdot a^2}{2}$	$A = -q \cdot a$	$\delta_m = \frac{q \cdot a^4}{8 \cdot E \cdot I}$
	$M_{l/2} = \frac{q \cdot l^2}{24}$ $M_A = M_B = -\frac{q \cdot l^2}{12}$	$A = B = -\frac{q \cdot l}{2}$	$\delta_{l/2} = \frac{q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$

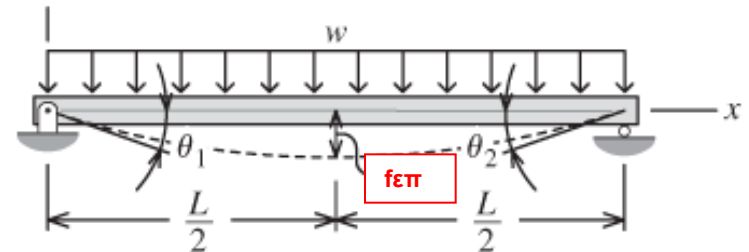
Αμφιέρειστη δοκός με ομοιόμορφη γραμμική φόρτιση

$$M_{max} = \frac{q l^2}{8} = \frac{10 \times 5^2}{8} = 31,25 \text{ kNm} \quad (3125 \text{ kNcm})$$

Ροπή ως προς τον άξονα y-y

(γ) Να γίνει ο έλεγχος του βέλους κάμψης για μια επιτρεπόμενη τιμή της τάξης του $1/250$, και στην περίπτωση που δεν υπάρχει επάρκεια να βρεθεί ποια διατομή είναι επαρκής.

$$f = \frac{5q l^4}{384 EI} \leq f_{\text{επ}} = \frac{l}{250} = \frac{500}{250} = 2,0 \text{ cm}$$



$$f = \frac{5 \times 0,10 \times 500^4}{384 \times 21.000 \times 1317} = 2,94 \text{ cm} > 2,0 \text{ cm}$$

$$\text{IPE } 180 \rightarrow I_y = 1317 \text{ cm}^4$$

$$E = 21.000 \text{ kN/cm}^2$$

$$f = f_{\text{επ}} \Rightarrow \frac{5q l^4}{384 EI} = 2,0 \Rightarrow I_{\text{νεκ}} = \frac{5q l^4}{768 E} = \frac{5 \times 0,10 \times 500^4}{768 \times 21.000} = 1937,62 \text{ cm}^4$$

$$I_{\text{νεκ}} = 1937,62 \text{ cm}^4 \xrightarrow{\text{ΠΙΝΑΚΕΣ ΔΙΑΤΟΜΩΝ}} I_{\text{IPE } 200} = 1943,00 \text{ cm}^4$$

$$I_{\text{νεκ}} = 1937,62 \text{ cm}^4 < I_{\text{IPE } 200} = 1943,00 \text{ cm}^4 \leftarrow \text{ΕΛΕΓΧΟΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ}$$

Άσκηση 2

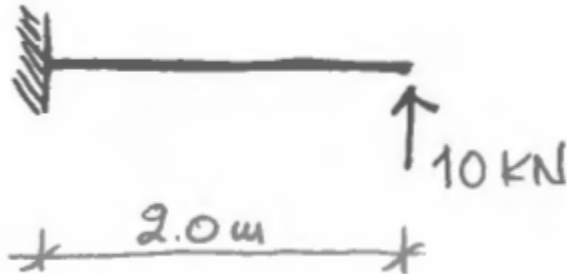
Για την δοκό μορφής προβόλου, του παρακάτω σχήματος, η οποία φορτίζεται με σημειακό φορτίο 10 kN, είναι κατασκευασμένη από δομικό χάλυβα και έχει διατομή μορφής T:

Ζητούνται:

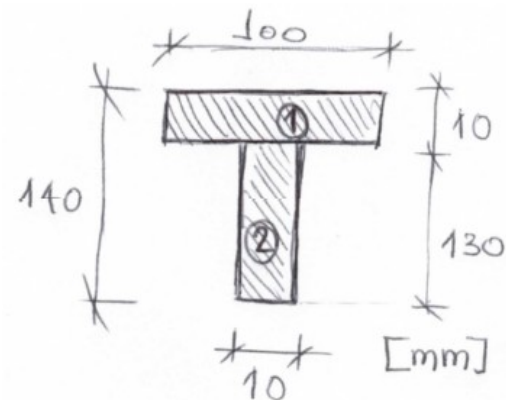
(α) Να βρεθεί η μέγιστη ροπή.

(β) Να βρεθούν οι τάσεις στις ακραίες ίνες.

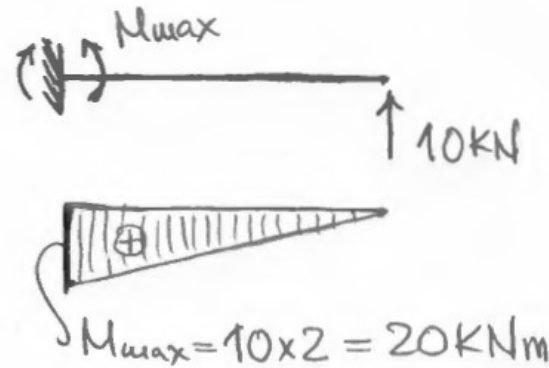
Δοκός



Διατομή δοκού



(α) Να βρεθεί η μέγιστη ροπή.



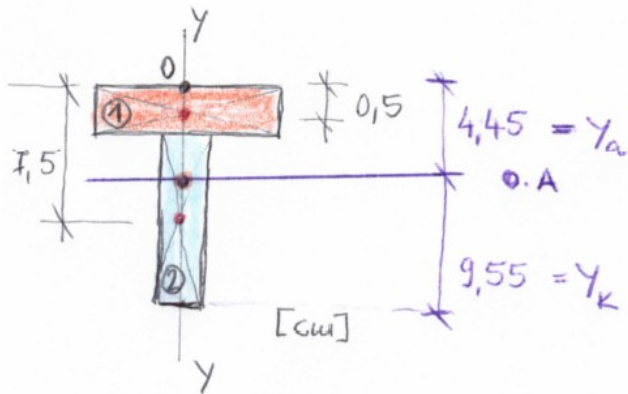
(β) Να βρεθούν οι τάσεις στις ακραίες ίνες.

Γνωρίζουμε ότι: $\sigma = M/W$

Για να βρεθούν οι τάσεις θα πρέπει να υπολογιστεί η ροπή αντίστασης της διατομής, η οποία ισούται με: $W = I/y$.

Συνεπώς είναι αναγκαίο να προσδιοριστούν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής, το κέντρο βάρους και η ροπή αδράνειας συνολικά της διατομής.

(I) Αρχικά πρέπει να βρεθεί το κέντρο βάρους της διατομής



$$x_{κ.Β} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{0}{(1,0 \times 10) + (13 \times 1,0)} = 0,0$$

$$y_{κ.Β} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{7,5 \times (1 \times 13) + 0,5 \times (1 \times 10)}{(1,0 \times 10) + (13 \times 1,0)} = 4,45 \text{ cm}$$

$$y_a = 4,45 ; y_k = 9,55 \quad [\text{cm}]$$

(II) Προσδιορισμός ροπής αδράνειας

$$x_1 = 4,45 - 0,5 = 3,95 \text{ cm}$$

$$x_2 = 9,55 - 7,5 = 2,05 \text{ cm}$$

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} + A_1 x_1^2 = \frac{10 \times 1^3}{12} + (1 \times 10) \times 3,95^2 = 156,85 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{bh^3}{12} + A_2 x_2^2 = \frac{1 \times 13^3}{12} + (1 \times 13) \times 2,05^2 = 237,17 \text{ cm}^4$$

$$I_{ολ} = I_1 + I_2 = 156,85 + 237,17 = 394,02 \text{ cm}^4$$

(III) Προσδιορισμός ροπής αντοχής διατομής

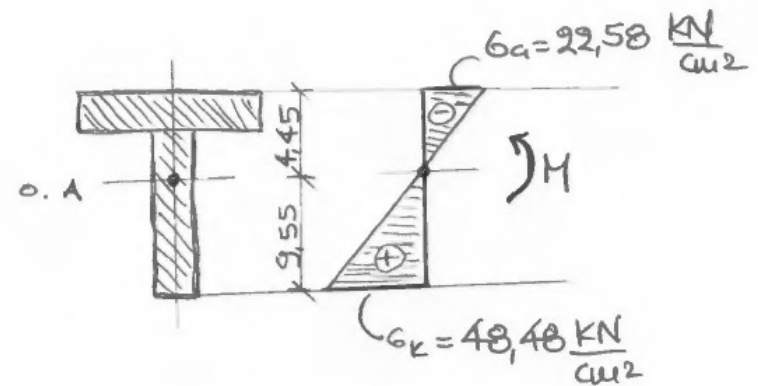
$$W_a = \frac{I_{0\lambda}}{\gamma_a} = \frac{394,02}{4,45} = 88,54 \text{ cm}^3 \quad \text{Άνω ίνα}$$

$$W_k = \frac{I_{0\lambda}}{\gamma_k} = \frac{394,02}{9,55} = 41,25 \text{ cm}^3 \quad \text{Κάτω ίνα}$$

(IV) Προσδιορισμός τάσεων διατομής από κάμψη

$$\sigma_a = \frac{M}{W_a} = \frac{20 \times 100}{88,54} = 22,58 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_k = \frac{M}{W_k} = \frac{20 \times 100}{41,25} = 48,48 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2}$$

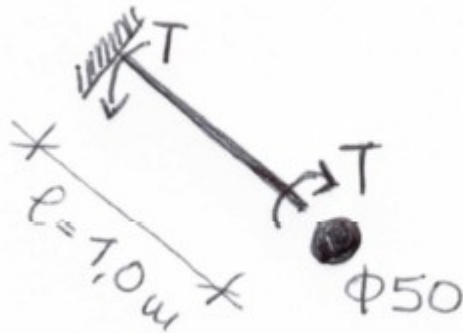


Άσκηση 3

Ευθύγραμμη μονόπακτη ράβδος, συμπαγούς κυκλικής διατομής διαμέτρου 50mm, και μήκους 1,0 m, καταπονείται στο ένα άκρο με στρεπτική ροπή 2,0 KNm. [δίδεται το μέτρο διάτμησης $G = 80 \text{ GPa}$].

Ζητούνται:

- (α) Να βρεθεί η μέγιστη διατμητική τάση.
- (β) Να υπολογισθεί η γωνία στροφής.



$$T = 2,0 \text{ KNm} = 2 \cdot 100 = 200 \text{ KNcm}$$

$$G = 80 \text{ GPa} = 80 \cdot 100 = 8000 \text{ KN/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16 \times 200}{3,14(5)^3} = 8,15 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2}$$

$$\theta_{\max} = \frac{32 \times T \times l}{G \times \pi \times d^4} = \frac{32 \times 200 \times 100}{8000 \times 3,14 \times (5)^4} = 0,040 \text{ (ακτινία) rad}$$

$$\theta_{\max} = 0,040 \frac{180}{\pi} = 2^\circ 33'$$

Άσκηση 4

Εξετάζονται 3 διαφορετικές χαλύβδινες διατομές:

(α) Συμπαγή κυκλική διατομή διαμέτρου 41,4 mm.

(β) Λεπτότοιχη σωληνωτή διατομή 76,3*6,3mm.

(γ) Τετράγωνη σωληνωτή διατομή διαστάσεων 90*4 mm

στις οποίες ασκείται ροπή στρέψης 10 KNm.

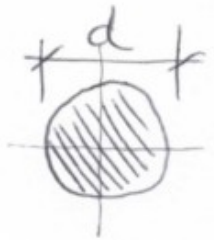
Ζητούνται:

(α) Να βρεθεί η πολική ροπή αδράνειας.

(β) Να υπολογισθεί η μέγιστη διατμητική τάση.

(γ) να γίνει συγκριτική ανάλυση των διατομών.

(α) Να βρεθεί η πολική ροπή αδράνειας.



$$d = 41,4 \text{ mm}$$

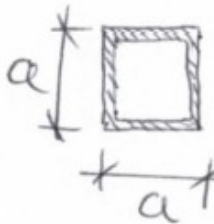
$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \times (41,4)^4}{32} = 28,82 \text{ cm}^4$$



$$d_o = 76,3 \text{ mm}$$

$$d_i = 70 \text{ mm}$$

$$J_p = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32} = \frac{3,14 \times (76,3^4 - 70^4)}{32} = 96,96 \text{ cm}^4$$



$$a = 90 \text{ mm}$$

$$t = 4 \text{ mm}$$

$$J_p = \frac{2a^3t}{3} = \frac{2 \times 9^3 \times 0,4}{3} = 194,40 \text{ cm}^4$$

(β) Να υπολογισθεί η μέγιστη διατμητική τάση.

Συμπαγής κυκλική διατομή

$$\tau_{\max} = \frac{16 T}{\pi d^3} = \frac{16 \times 1000}{3,14 \times (4,14)^3} = 71,80 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Σωληνωτή κυκλική διατομή

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2 \pi R_m^2 t} = \frac{1000}{2 \times 3,14 (3,5)^2 \times 0,63} = 20,63 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$R_m = \frac{76,3}{2} - \frac{6,3}{2} = 35 \text{ mm}$$

Σωληνωτή τετραγωνική διατομή

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2 A_m t} = \frac{1000}{2 (8,6 \times 8,6) \times 0,4} = 16,90 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$A_m = 90 - 4 = 86 \text{ mm}^2$$

(γ) να γίνει συγκριτική ανάλυση των διατομών.

Οι διατομές έχουν περίπου το ίδιο εμβαδόν και το ίδιο βάρος ανά γραμμικό μέτρο.

Διατομή Φ 76,3*6,3: Εμβαδόν 13,8 cm², Βάρος: 10,80 Kgr/m

Διατομή 90*4: Εμβαδόν 13,3 cm², Βάρος: 10,50 Kgr/m

Συμπαγής κυκλική διατομή: Εμβαδόν 13,55 cm², Βάρος: 10,63 Kgr/m

Από το (α) ερώτημα προκύπτει ότι την μεγαλύτερη πολική ροπή την διαθέτει η σωληνωτή τετραγωνική διατομή 90*4. Ως εκ τούτου διαθέτει και την μεγαλύτερη αντίσταση στην καταπόνηση της στρέψης. Αυτό αποδεικνύεται στο (β) ερώτημα, όπου η αντίστοιχη διατομή παρουσιάζει την μικρότερη μέγιστη διατμητική τάση για το ίδιο στρεπτικό φορτίο.

Συνεπώς για ράβδους του ίδιου εμβαδού και βάρους, η αντίσταση στην στρέψη εξαρτάται από την πολική ροπή, I_p . Εάν λάβουμε υπόψη και το υλικό μέσο του μέτρου ολίσθησης G , τότε ορίζεται η ικανότητα μιας διατομής για αντίσταση σε στρέψη η οποία ονομάζεται δυστρεψία. $G I_p$.

Ασκήσεις για επίλυση

Άσκηση 1

Για την δοκό την αμφιπροέχουσα δοκό που φορτίζεται σε όλο το μήκος της με ομοιόμορφο φορτίο και έχει ορθογωνική διατομή:

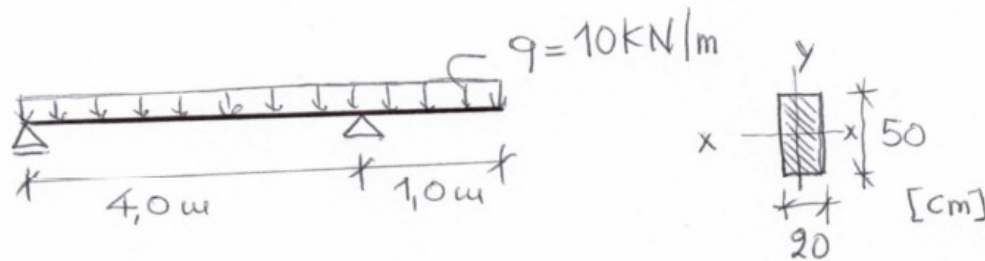
Ζητούνται:

(α) Να υπολογισθεί η μέγιστη ροπή.

(β) Για την μέγιστη ροπή κάμψης να υπολογισθεί η μέγιστη τάση της διατομής κατά τον άξονα τον x-x.

(γ) Για την μέγιστη ροπή κάμψης να υπολογισθεί η μέγιστη τάση της διατομής κατά τον άξονα τον y-y.

(δ) Ποίο συμπέρασμα προκύπτει από την σύγκριση των ερωτημάτων (β) και (γ).



Άσκηση 2

Σε κυκλική συμπαγή ράβδο ασκείται στρεπτική ροπή 25 KNm :

Ζητούνται:

(α) Να υπολογισθεί η μέγιστη διατμητική τάση.

(β) Για την αντίστοιχη διατμητική τάση που εμφανίζεται στην κυκλική συμπαγή διατομή να ευρεθούν οι αντίστοιχες διατομές σωληνωτής τετραγωνικής και κυκλικής διατομής, [θεωρείται ότι αυτές θα έχουν πάχος 4mm].

Σημείωμα Αναφοράς σε έργα Τρίτων

Βιβλιογραφία

1. Beer F., Johnston E.R., Mazurek D.: Τεχνική Μηχανική-Στατική. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 11^η 2019, [κωδ. Εύδοξος 59421317].
2. Gere J., Goodno B.: Αντοχή Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 9^η 2021, [κωδ. Εύδοξος 86055253].
3. Nash W.: Στατική και Μηχανική των Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 1^η 2002, [κωδ. Εύδοξος 18549012].
4. Π.Α. Βουθούνης: Τεχνική Μηχανική. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 10^η 2019, [ISBN 978-618-83280-4-4].
5. F.P. Beer, E.R. Johnston Jr., J.T. Wolf, D.F. Mazuerk: Μηχανική των Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 2012-2019. [ISBN: 978-960-418-381-4]. Ελληνική μετάφραση.
6. Π.Α. Βουθούνης: Στατική-Μηχανική του απαραμόρφωτου στερεού. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 6^η 2017, [ISBN 978-618-83280-1-3].
7. Π.Α. Βουθούνης: Αντοχή των Υλικών-Μηχανική του παραμορφώσιμου στερεού. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 4^η 2019, [ISBN 978-618-83280-3-7].
8. Μ. Ματσιοκούδη-Ηλιοπούλου: Τεχνική Μηχανική: Αρχές Στατικής και Εισαγωγή στην Θεωρία των Παραμορφώσιμων Σωμάτων. Εκδόσεις Ζυγός. Έκδοση 1991/2016. [ISBN13: 97896080652533], [κωδ. Εύδοξος 1753].
9. Γ. Γκρός. Μηχανική. Τόμος Α. Ευγενείδιο Ίδρυμα, 1976.

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

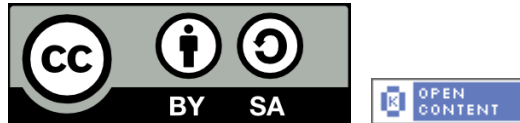
Άνθιμος Σ. Αναστασιάδης. «Τεχνική Μηχανική: Στατική και Αντοχή Υλικών». Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Πολυτεχνική Σχολή. Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων & Συστημάτων. Έκδοση 1^η, Κοζάνη, 2020.

Διαθέσιμο από την διαδικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.uowm.gr/courses/MRE250/>

Σημείωμα αδειοδότησης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [<https://creativecommons.org/>] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να περιλαμβάνει τα παρακάτω:

- ❖ Σημείωμα Αναφοράς
- ❖ Σημείωμα Αδειοδότησης
- ❖ Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ❖ Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει), μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Κάμψη-Στρέψη

