



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας  
Πολυτεχνική Σχολή  
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων & Συστημάτων



# Τεχνική Μηχανική

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Μέρος Α-Στατική

### Ισοστατικοί επίπεδοι γραμμικοί φορείς

**Άνθιμος Σ. ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗΣ**

Δρ. EurIng. Πολιτικός Μηχανικός

Για τα παρακάτω σχήματα που δίνονται στις σχετικές ασκήσεις να υπολογιστούν:

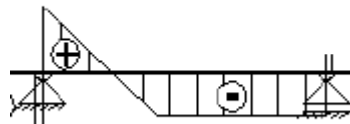
(α) οι αντιδράσεις,

(β) να υπολογιστούν και να κατασκευαστούν τα διαγράμματα αξονικών και τεμνουσών δυνάμεων καθώς και των ροπών.

**Σήμανση:**

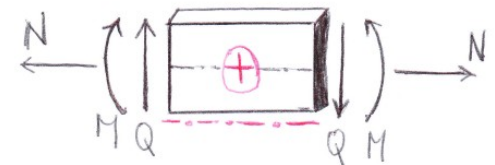
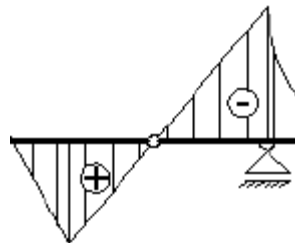
Διάγραμμα αξονικών και τεμνουσών δυνάμεων

$[N], [Q]$



$[M]$

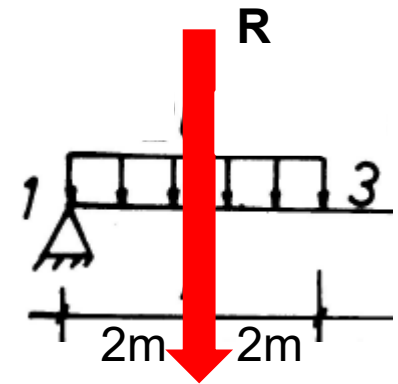
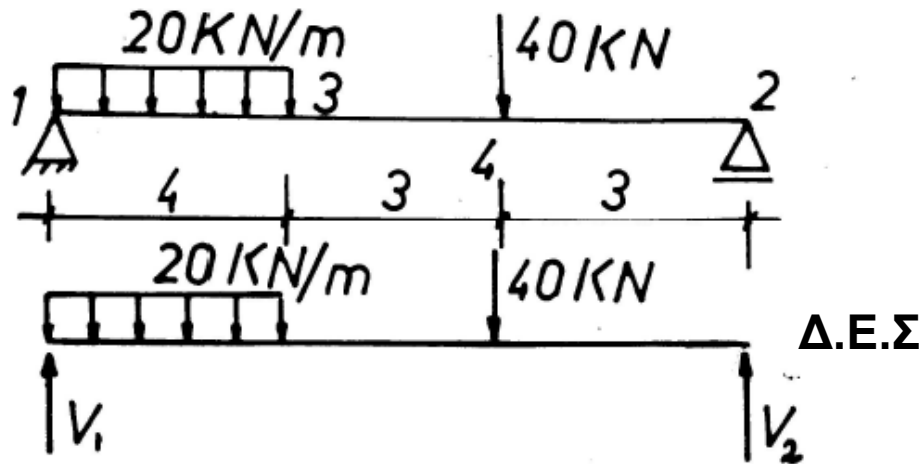
Διάγραμμα ροπών



Τομή  
αριστερά

Τομή δεξιά

# Άσκηση 1



$$R = 20 \text{ kN/m} * 4 \text{ m}$$

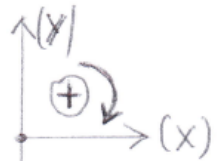
## Υπολογισμός αντιδράσεων

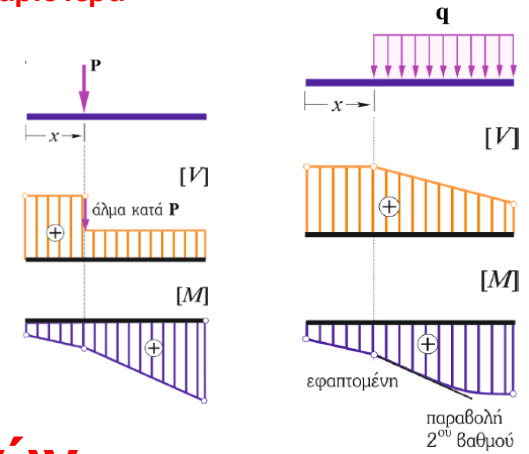
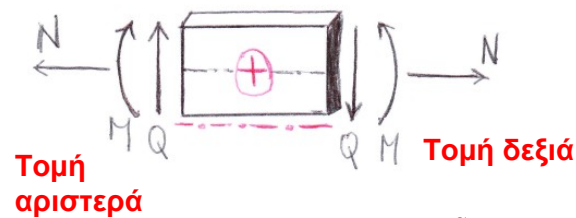
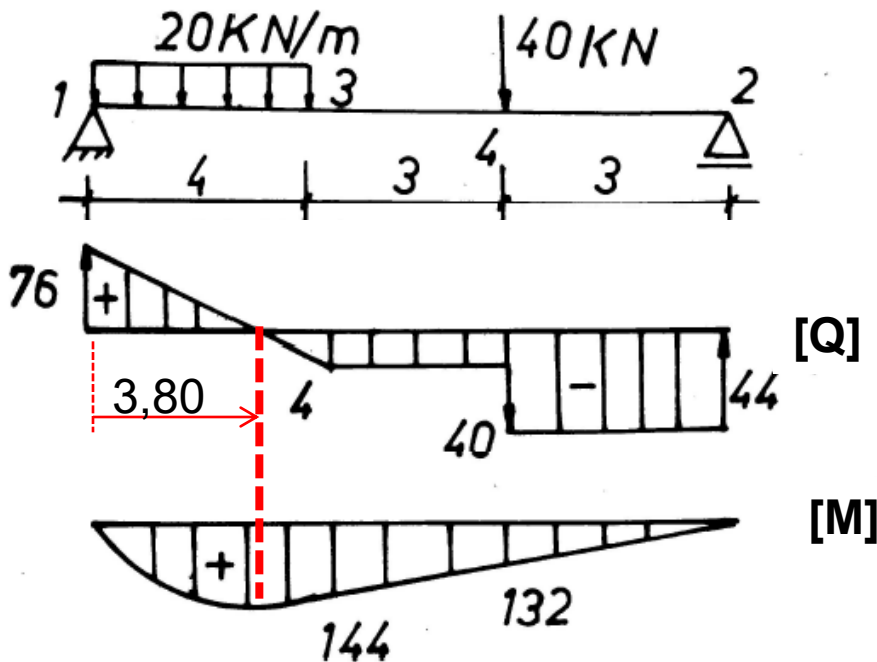
$$\Sigma M_2 = 0 \Rightarrow V_1 * 10 - 20 * 4 * 8 - 40 * 3 = 0 \Rightarrow V_1 = 76 \text{ KN}$$

$$\Sigma M_1 = 0 \Rightarrow -V_2 * 10 + 40 * 7 + 20 * 4 * 2 = 0 \Rightarrow V_2 = 44 \text{ KN}$$

## Επαλήθευση

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow -76 - 44 + 20 * 4 + 40 = 0$$





## Υπολογισμός διαγράμματος τεμνουσών

$$(1) \rightarrow V_1 = +76 \text{ KN}$$

$$(1-3) \rightarrow V_3 = +76 - 20 \cdot 4 = -4 \text{ KN [τομή αριστερά]}$$

$$(2) \rightarrow V_2 = +76 - 20 \cdot 4 - 40 = -44 \text{ KN [τομή αριστερά]}$$

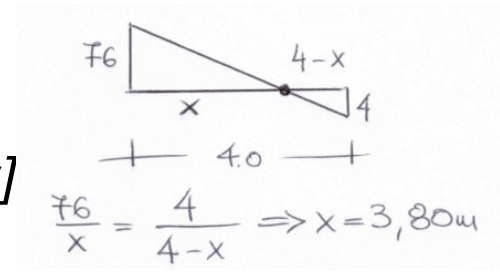
## Υπολογισμός διαγράμματος ροπών

$$(1) \rightarrow M_1 = 0,0 \text{ KNm}$$

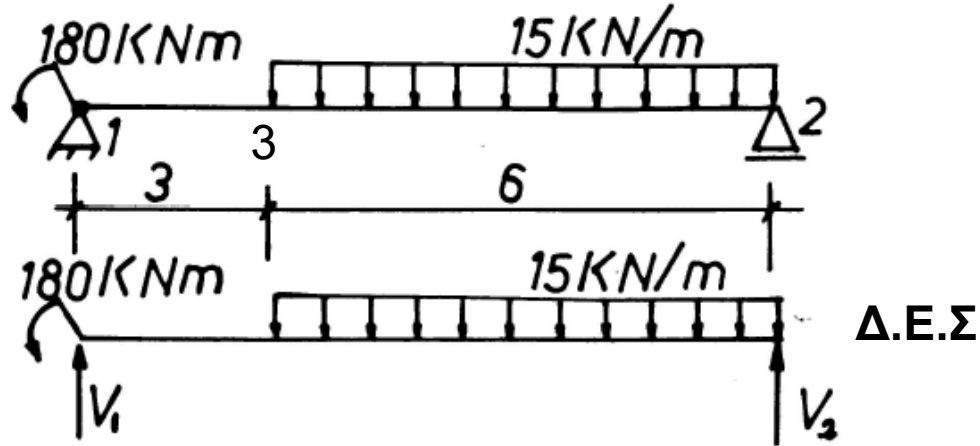
$$(3) \rightarrow M_3 = +76 \cdot 3,8 - 20 \cdot 3,8 \cdot 1,9 = +144 \text{ KNm [Μέγιστη ροπή]}$$

$$(4) \rightarrow M_4 = +76 \cdot 7 - 20 \cdot 4 \cdot 5 = +132 \text{ KNm}$$

$$(2) \rightarrow M_2 = 0,0 \text{ KNm [κύλιση δεν παραλαμβάνει ροπή]}$$



## Άσκηση 2



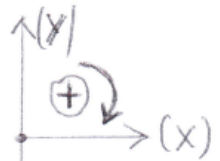
### Υπολογισμός αντιδράσεων

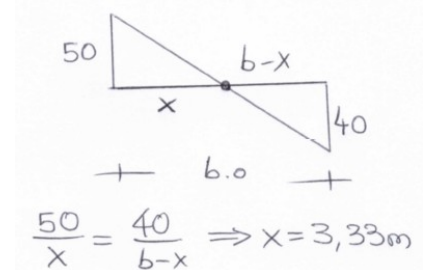
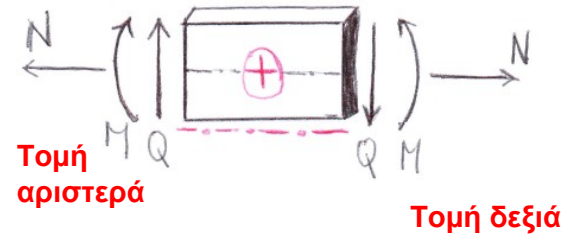
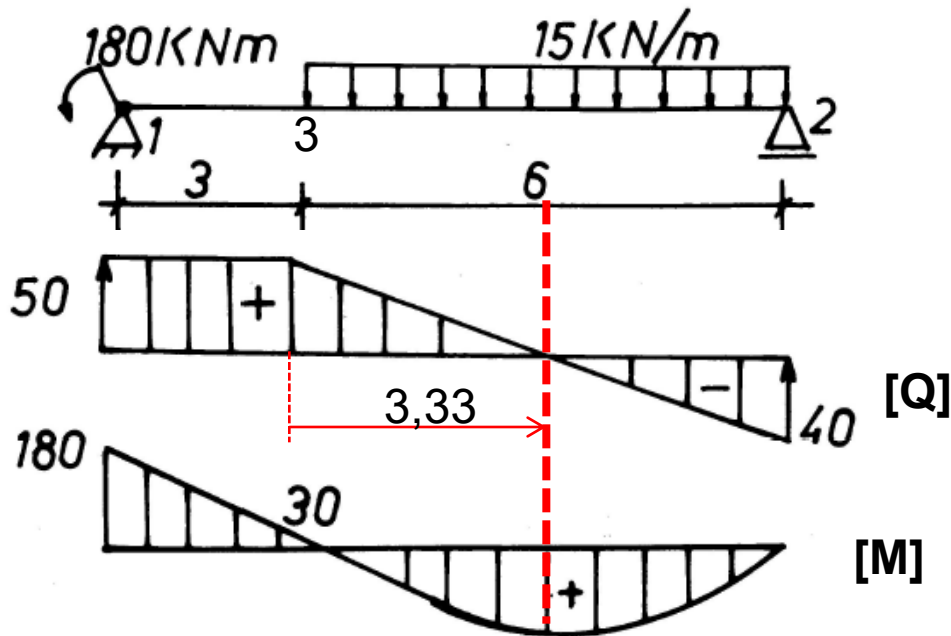
$$\Sigma M_2 = 0 \Rightarrow -180 + V_1 \cdot 9 - 15 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_1 = \mathbf{50 \text{ KN}}$$

$$\Sigma M_1 = 0 \Rightarrow -180 - V_2 \cdot 9 + 15 \cdot 6 \cdot 6 = 0 \Rightarrow V_2 = \mathbf{40 \text{ KN}}$$

### Επαλήθευση

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow -50 - 40 + 15 \cdot 6 = \mathbf{0}$$





$$6,0 - 3,33 = 2,67 \text{ m}$$

## Υπολογισμός διαγράμματος τεμνουσών

(1)  $\rightarrow V_1 = +50 \text{ KN}$  [τομή αριστερά]

(1-3)  $\rightarrow$  Το διάγραμμα παραμένει σταθερό διότι δεν υπάρχει φόρτιση.

(3-2)  $\rightarrow$  Το διάγραμμα μεταβάλλεται και τείνει στον άξονα της δοκού.

(2)  $\rightarrow V_2 = -40 \text{ KN}$  [τομή δεξιά]

## Υπολογισμός διαγράμματος ροπών

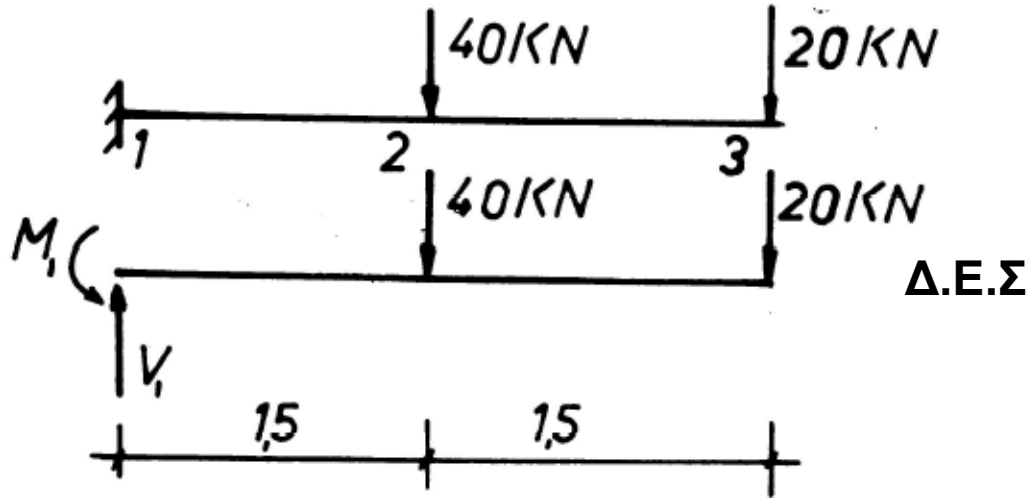
(1)  $\rightarrow M_1 = -180,0 \text{ KNm}$

(3)  $\rightarrow M_3 = -180 + 50 \cdot 3 = -30 \text{ KNm}$

$M_{\max (+)}$   $\rightarrow 40 \cdot 2,67 - 15 \cdot 2,67 \cdot 1,33 = 53,53 \text{ KNm}$  [τομή δεξιά]

(2)  $\rightarrow M_2 = 0,0 \text{ KNm}$  [κύλιση δεν παραλαμβάνει ροπή]

# Άσκηση 3

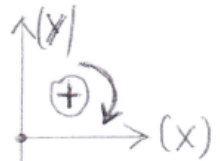


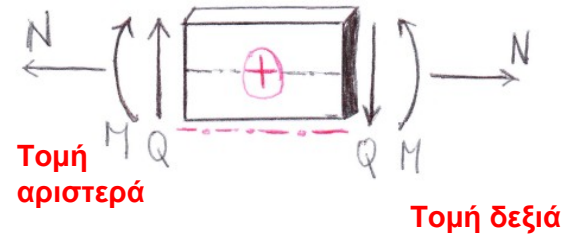
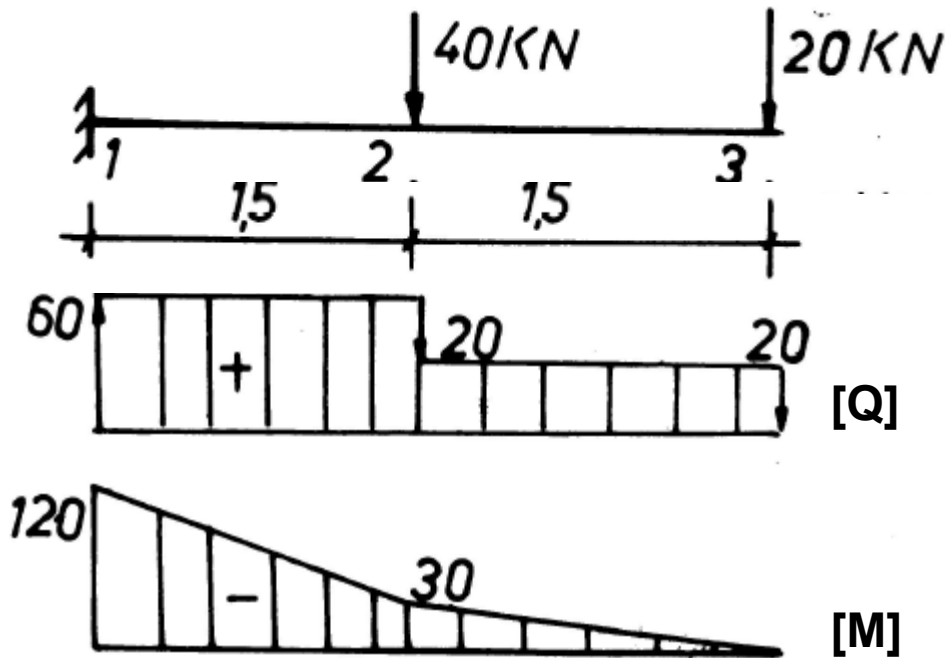
Άγνωστοι: Η αντίδραση  $V$  και η ροπή  $M$  στην στήριξη

## Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\Sigma M_1 = 0 \Rightarrow +20 \cdot 3 + 40 \cdot 1,5 - M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = \mathbf{120 \text{ KNm}}$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow +20 + 40 - V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = \mathbf{60 \text{ KN}}$$





## Υπολογισμός διαγράμματος τεμνουσών

- (1)  $\rightarrow V_1 = +60 \text{ KN}$  [τομή αριστερά]
- (1-2)  $\rightarrow +60 - 40 = 20 \text{ KN}$  [τομή αριστερά]
- (3)  $\rightarrow +20 \text{ KN}$  [τομή δεξιά]

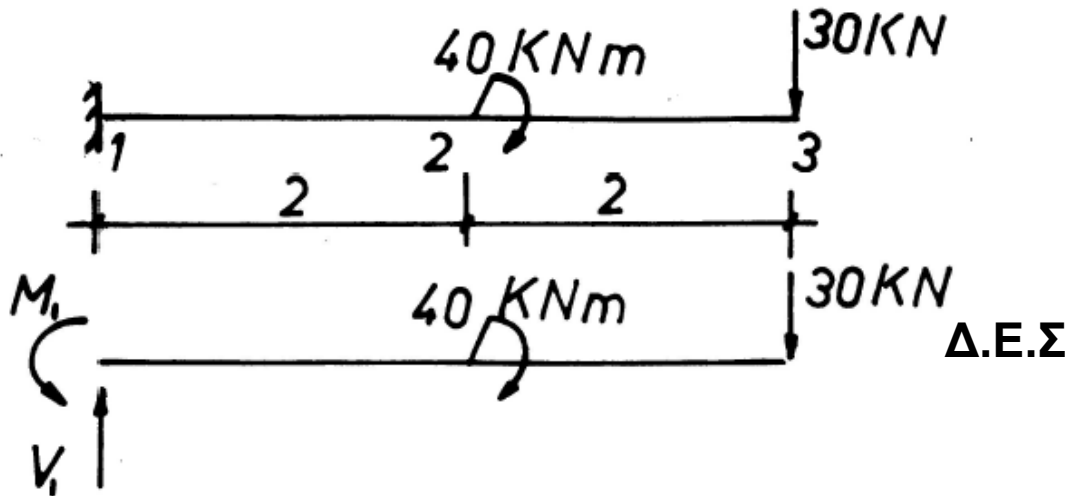
## Υπολογισμός διαγράμματος ροπών

- (1)  $\rightarrow M_1 = -120,0 \text{ KNm}$
- (2)  $\rightarrow M_2 = -120 + 60 \cdot 1,5 = -30 \text{ KNm}$  [τομή αριστερά]
- (3)  $\rightarrow M_3 = -120 + 60 \cdot 3 - 40 \cdot 1,5 = 0,00 \text{ KNm}$  [τομή αριστερά]

[στην άκρη του προβόλου η ροπή πάντα είναι μηδέν]



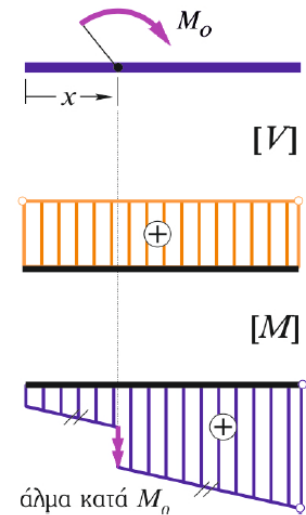
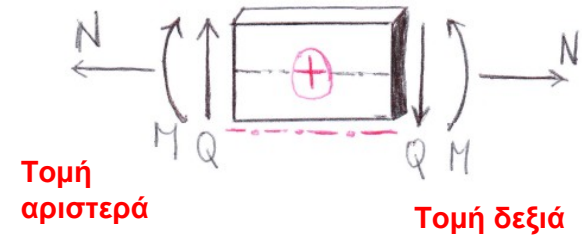
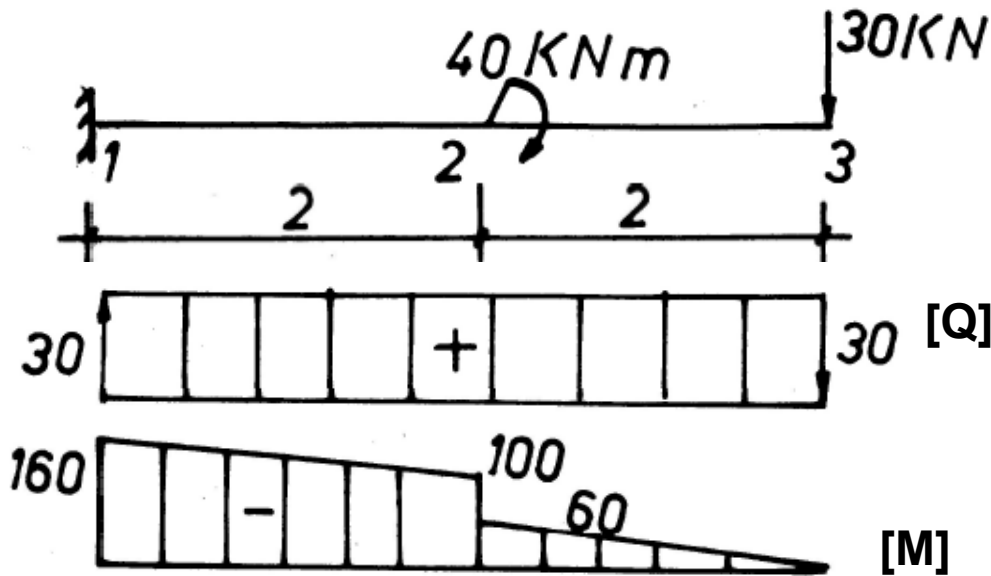
# Άσκηση 4



## Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\Sigma M_1 = 0 \Rightarrow +30 \cdot 4 + 40 - M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = 160 \text{ KNm}$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow +30 - V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 30 \text{ KN}$$



## Υπολογισμός διαγράμματος τεμνουσών

$$(1) \rightarrow V_1 = +30 \text{ KN} \quad [\text{τομή αριστερά}]$$

$$(3) \rightarrow V_3 = +30 \text{ KN} \quad [\text{τομή δεξιά}]$$

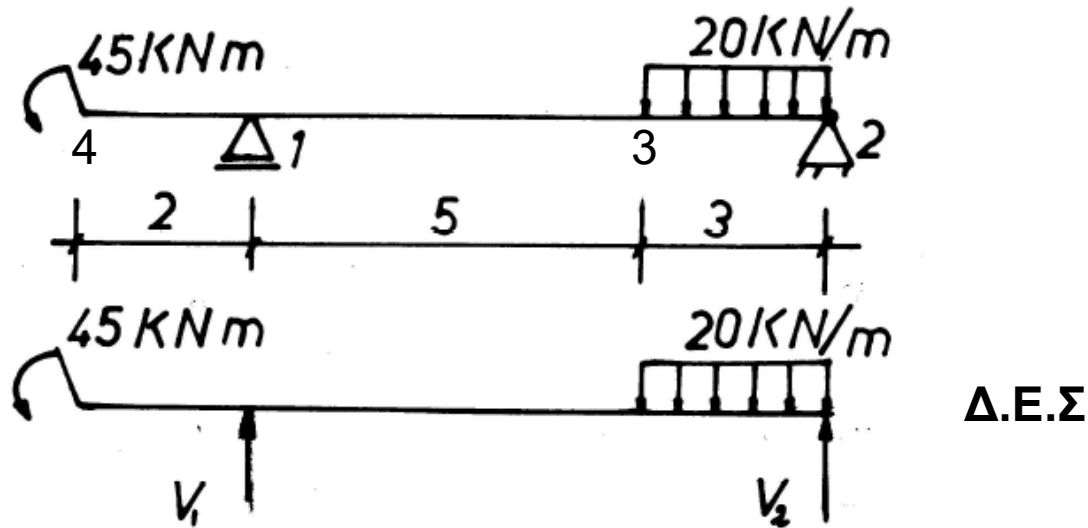
## Υπολογισμός διαγράμματος ροτών

$$(1) \rightarrow M_1 = -160,0 \text{ KNm}$$

$$(2) \rightarrow M_2 = -160 + 30 \cdot 2 + 40 = -100 \text{ KNm} \quad [\text{τομή αριστερά}]$$

$$(3) \rightarrow M_3 = -30 \cdot 2 = -60,0 \text{ KNm} \quad [\text{τομή δεξιά}]$$

# Άσκηση 5



## Υπολογισμός αντιδράσεων

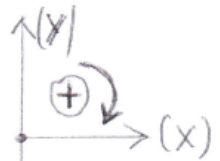
$$\Sigma M_1 = 0 \Rightarrow -45 + 20 \cdot 3 \cdot 6,5 - V_2 \cdot 8 = 0 \Rightarrow V_2 = 43.10 \text{ KN}$$

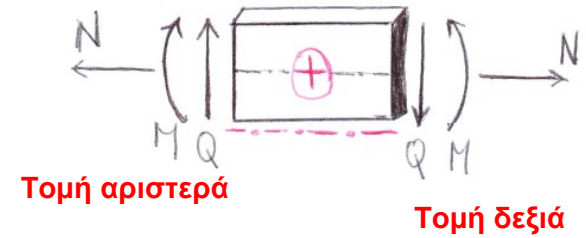
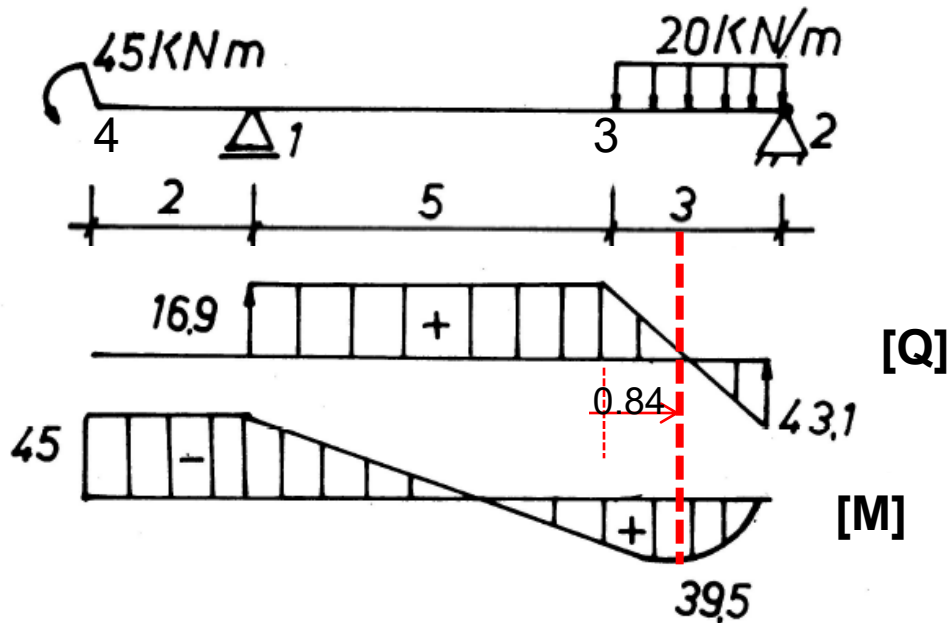
$$\Sigma M_2 = 0 \Rightarrow -45 - 20 \cdot 3 \cdot 1.5 + V_1 \cdot 8 = 0 \Rightarrow V_1 = 16.90 \text{ KN}$$

## Επαλήθευση

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow 16.90 + 43.10 + 20 \cdot 3 = 0$$

$$\Sigma M_4 = 0 \Rightarrow -45 + 20 \cdot 3 \cdot 8.5 - 43.10 \cdot 10 - 16.90 \cdot 2 = 0$$





## Υπολογισμός διαγράμματος τεμνουσών

(4-1) → Στο προεξέχον τμήμα η τέμνουσα είναι 0.

(1) →  $V_1 = +16,90 \text{ KN}$  [τομή αριστερά]

(1-3) → Σταθερό το διάγραμμα, δεν υπάρχει φόρτιση.

(2) →  $V_2 = -43,10 \text{ KN}$  [τομή δεξιά]

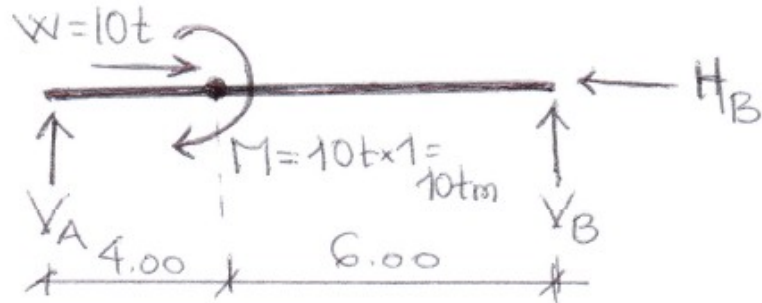
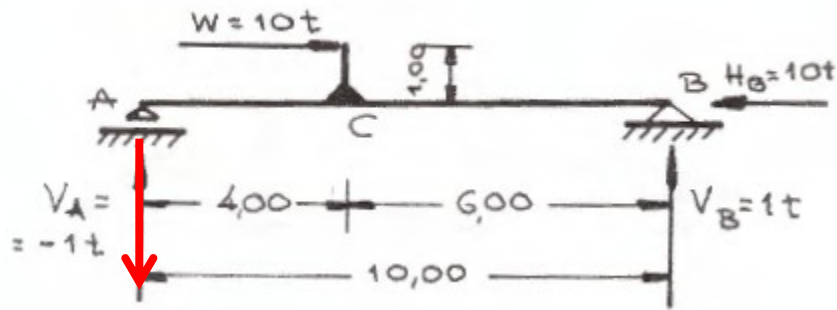
## Υπολογισμός διαγράμματος ροπών

(4) →  $M_4 = -45,00 \text{ KNm}$  [τομή αριστερά]

$M_{\max} = -45 + 16,90 \cdot 5,84 - 20 \cdot 0,84 \cdot 0,42 = +46,64 \text{ KNm}$  [τομή αριστερά]

(2) → Η ροπή στην στήριξη είναι 0

# Άσκηση 6



Δ.Ε.Σ

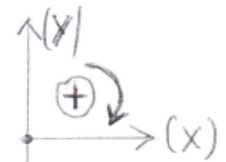
Η έκκεντρα ασκούμενη δύναμη ανάγεται στο σημείο C με μία δύναμη και μια ροπή.

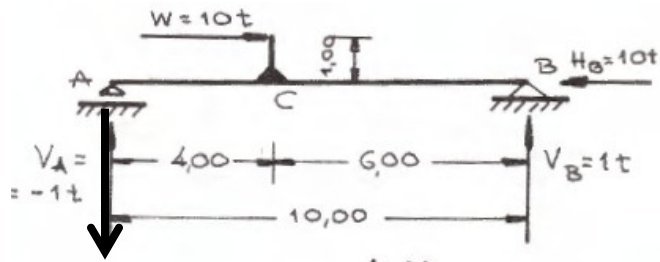
## Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow V_A * 10 + 10 = 0 \Rightarrow V_A = -1,00 \text{ t}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -V_B * 10 + 10 = 0 \Rightarrow V_B = 1,00 \text{ t}$$

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow -H_B + 10 = 0 \Rightarrow H_B = 10,00 \text{ t}$$

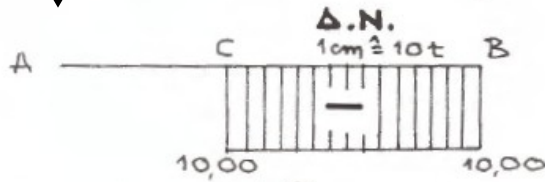




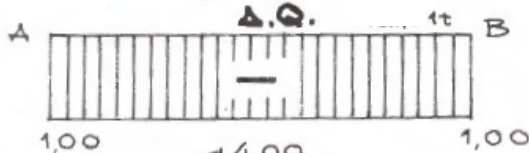
## Υπολογισμός διαγράμματος αξονικής

(AC)  $\rightarrow N_c = 0,00 \text{ t}$

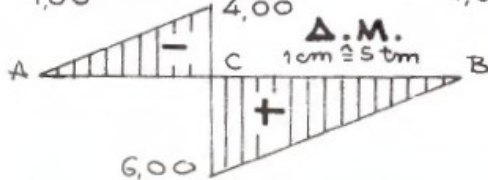
(CB)  $\rightarrow N_B = -10,00 \text{ t}$



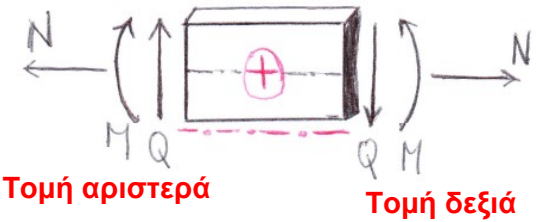
[N]



[Q]



[M]



Τομή αριστερά

Τομή δεξιά

## Υπολογισμός διαγράμματος τεμνουσών

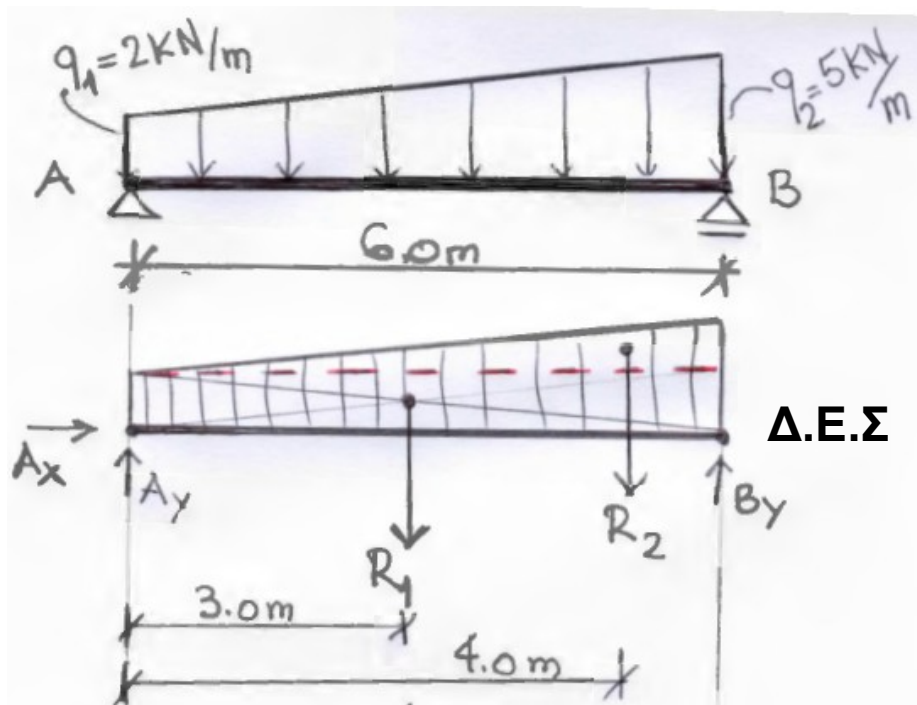
(AB)  $\rightarrow V_A = -1.0 \text{ t}$  [τομή αριστερά], σταθερό διότι δεν μεσολαβεί κάθετη δύναμη.

## Υπολογισμός διαγράμματος ροπών

(A)  $\rightarrow M_A = 0,00 \text{ KNm}$ , (B)  $\rightarrow M_B = 0,00 \text{ KNm}$

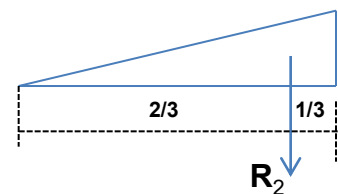
(C)  $\rightarrow M_{\text{Cαριστερά}} = -1 \cdot 4 + 10 = 6,00 \text{ KNm}$  /  $M_{\text{Cδεξιά}} = 1 \cdot 6 - 10 = -4,00 \text{ KNm}$

# Άσκηση 7



Χωρίζουμε την επιφάνεια φόρτισης σε ένα ορθογώνιο και ένα τρίγωνο και υπολογίζουμε την συνισταμένη δύναμη που θα ασκείται στο κέντρο βάρους.

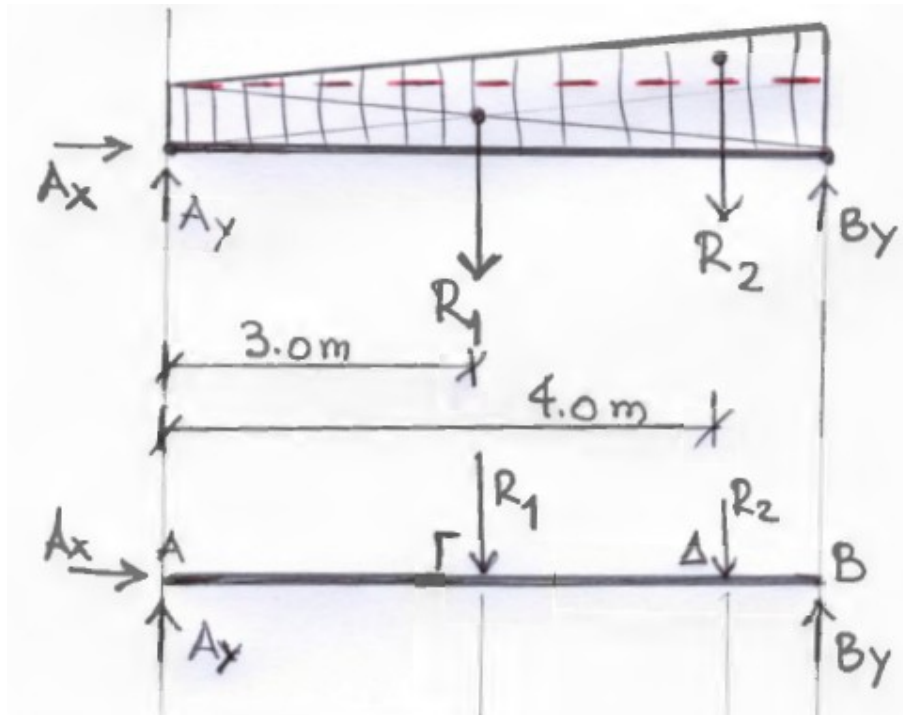
Κέντρο βάρους τριγώνου



## Υπολογισμός συνισταμένης

$R_1 = 2 \text{ kN/m} * 6.0 \text{ m} = \mathbf{12.00 \text{ kN}}$  και ασκείται στα 3.0 m από το σημείο A.

$R_2 = [5 \text{ kN/m} - 2 \text{ kN/m}] * 6.0 \text{ m} / 2 = \mathbf{9.00 \text{ kN}}$  και ασκείται στα 4.0 m από το σημείο A ( $6 * (2/3) = 4.0 \text{ m}$ ), [κέντρου βάρους τριγώνου στα  $1/3$  από την βάση ή  $2/3$  από την κορυφή].



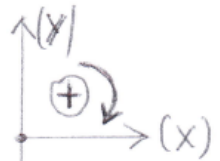
Δ.Ε.Σ

## Υπολογισμός αντιδράσεων

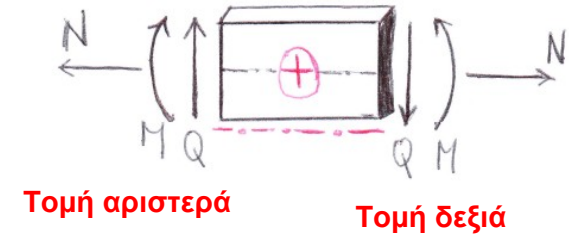
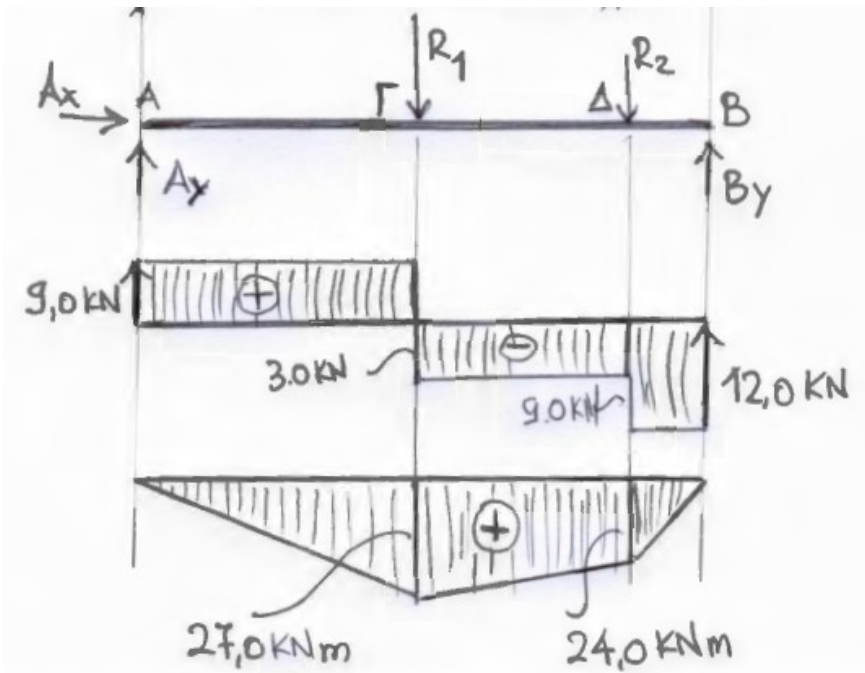
$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow A_Y * 6 - 12 * 3 - 9 * 2 = 0 \Rightarrow A_Y = 9,00 \text{ KN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -B_Y * 6 + 12 * 3 + 9 * 4 = 0 \Rightarrow B_Y = 12,00 \text{ KN}$$

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow A_X = 0,00 \text{ KN}$$







[Q]

[M]

## Υπολογισμός διαγράμματος τεμνουσών

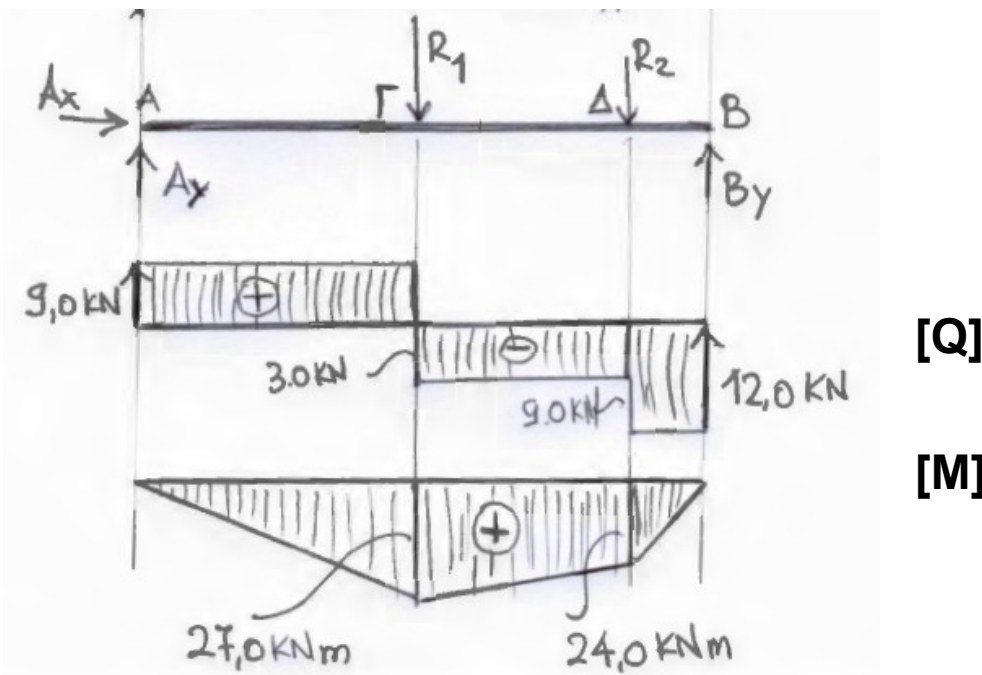
(A) →  $A_y = 9,0 \text{ KN}$  [τομή αριστερά].

(AΓ) → Το διάγραμμα παραμένει σταθερό.

(Γ) →  $+9,0 \text{ KN} - 12,00 \text{ KN} = -3,00 \text{ KN}$  [τομή αριστερά].

(ΓΔ) → Το διάγραμμα παραμένει σταθερό.

(B) →  $B_y = -12,00 \text{ KN}$  [τομή δεξιά].



## Υπολογισμός διαγράμματος ροπών

$$(A) \rightarrow M_A = 0,00 \text{ KNm}, (B) \rightarrow M_B = 0,00 \text{ KNm}$$

$$(\Gamma) \rightarrow M_{\Gamma\text{αριστερά}} = 9 \cdot 3 = 27,00 \text{ KNm [τομή αριστερά]}$$

$$[M_{\Gamma\text{δεξιά}} = 12 \cdot 3,0 - 9 \cdot 1,0 = 27,00 \text{ KNm [τομή δεξιά]}]$$

$$(\Delta) \rightarrow M_{\Delta\text{αριστερά}} = 9 \cdot 4,0 - 12 \cdot 1,0 = 24,00 \text{ KNm [τομή αριστερά]}$$

$$[M_{\Delta\text{δεξιά}} = 12 \cdot 2,0 - 9 \cdot 1,0 = 24,00 \text{ KNm [τομή δεξιά]}]$$

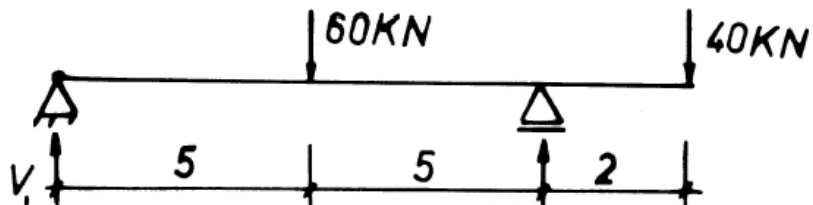
# Ασκήσεις για επίλυση

Για τα παρακάτω σχήματα που δίνονται στις σχετικές ασκήσεις να υπολογιστούν:

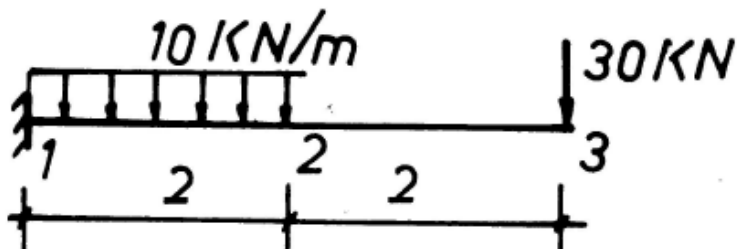
(α) οι αντιδράσεις

(β) να υπολογιστούν και να κατασκευαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών και ροπών.

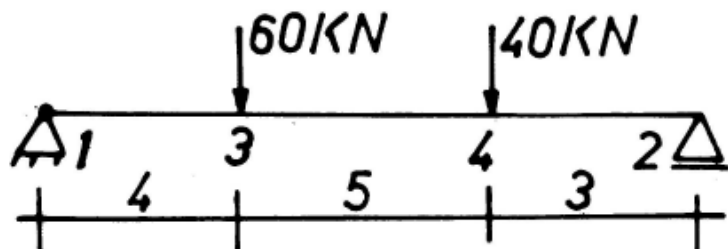
## Άσκηση 1



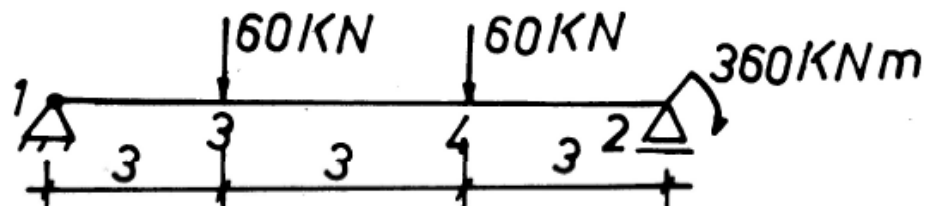
## Άσκηση 2



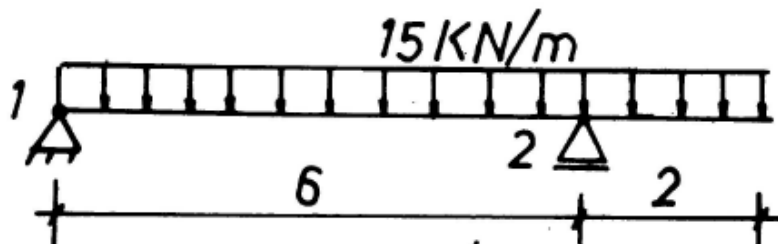
### Άσκηση 3



### Άσκηση 4



### Άσκηση 5



# Σημείωμα Αναφοράς σε έργα Τρίτων

## Βιβλιογραφία

1. Beer F., Johnston E.R., Mazurek D.: Τεχνική Μηχανική-Στατική. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 11<sup>η</sup> 2019, [κωδ. Εύδοξος 59421317].
2. Gere J., Goodno B.: Αντοχή Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 9<sup>η</sup> 2021, [κωδ. Εύδοξος 86055253].
3. Nash W.: Στατική και Μηχανική των Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 1<sup>η</sup> 2002, [κωδ. Εύδοξος 18549012].
4. Π.Α. Βουθούνης: Τεχνική Μηχανική. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 10<sup>η</sup> 2019, [ISBN 978-618-83280-4-4].
5. F.P. Beer, E.R. Johnston Jr., J.T. Wolf, D.F. Mazuerk: Μηχανική των Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 2012-2019. [ISBN: 978-960-418-381-4]. Ελληνική μετάφραση.
6. Π.Α. Βουθούνης: Στατική-Μηχανική του απαραμόρφωτου στερεού. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 6<sup>η</sup> 2017, [ISBN 978-618-83280-1-3].
7. Π.Α. Βουθούνης: Αντοχή των Υλικών-Μηχανική του παραμορφώσιμου στερεού. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 4<sup>η</sup> 2019, [ISBN 978-618-83280-3-7].
8. Μ. Ματσικούδη-Ηλιοπούλου: Τεχνική Μηχανική: Αρχές Στατικής και Εισαγωγή στην Θεωρία των Παραμορφώσιμων Σωμάτων. Εκδόσεις Ζυγός. Έκδοση 1991/2016. [ISBN13: 97896080652533], [κωδ. Εύδοξος 1753].
9. Γ. Γκρός. Μηχανική. Τόμος Α. Ευγενείδιο Ίδρυμα, 1976.

# Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

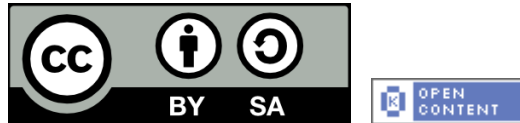
Άνθιμος Σ. Αναστασιάδης. «Τεχνική Μηχανική: Στατική και Αντοχή Υλικών». Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Πολυτεχνική Σχολή. Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων & Συστημάτων. Έκδοση 4<sup>η</sup> , Κοζάνη, 2024.

Διαθέσιμο από την διαδικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.uowm.gr/courses/MRE250/>

# Σημείωμα αδειοδότησης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [<https://creativecommons.org/>] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



## Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να περιλαμβάνει τα παρακάτω:

- ❖ Σημείωμα Αναφοράς
- ❖ Σημείωμα Αδειοδότησης
- ❖ Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ❖ Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει), μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

# Τέλος Ενότητας

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Ισοστατικοί επίπεδοι γραμμικοί φορείς

