



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων & Συστημάτων



Τεχνική Μηχανική

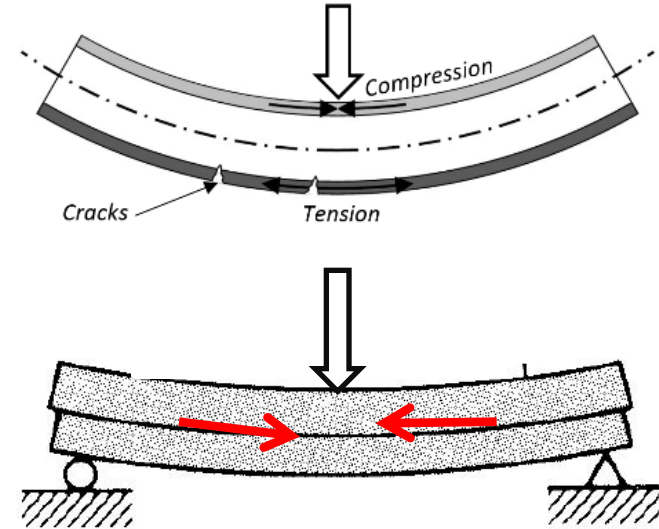
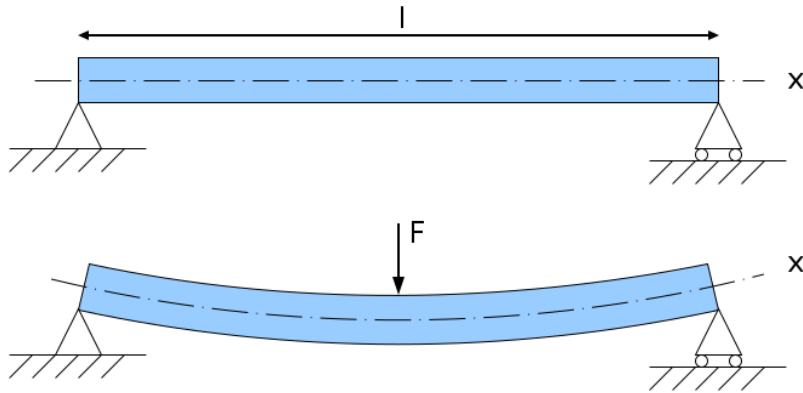
Μέρος Β - Αντοχή Υλικών

Κάμψη-Στρέψη

Άνθιμος Σ. ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗΣ
Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, EurIng

1. Κάμψη δοκών

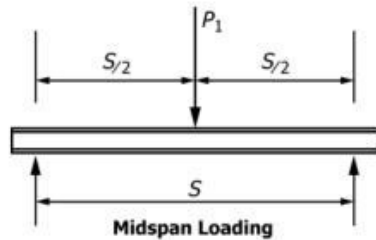
(α) Ορισμός κάμψης



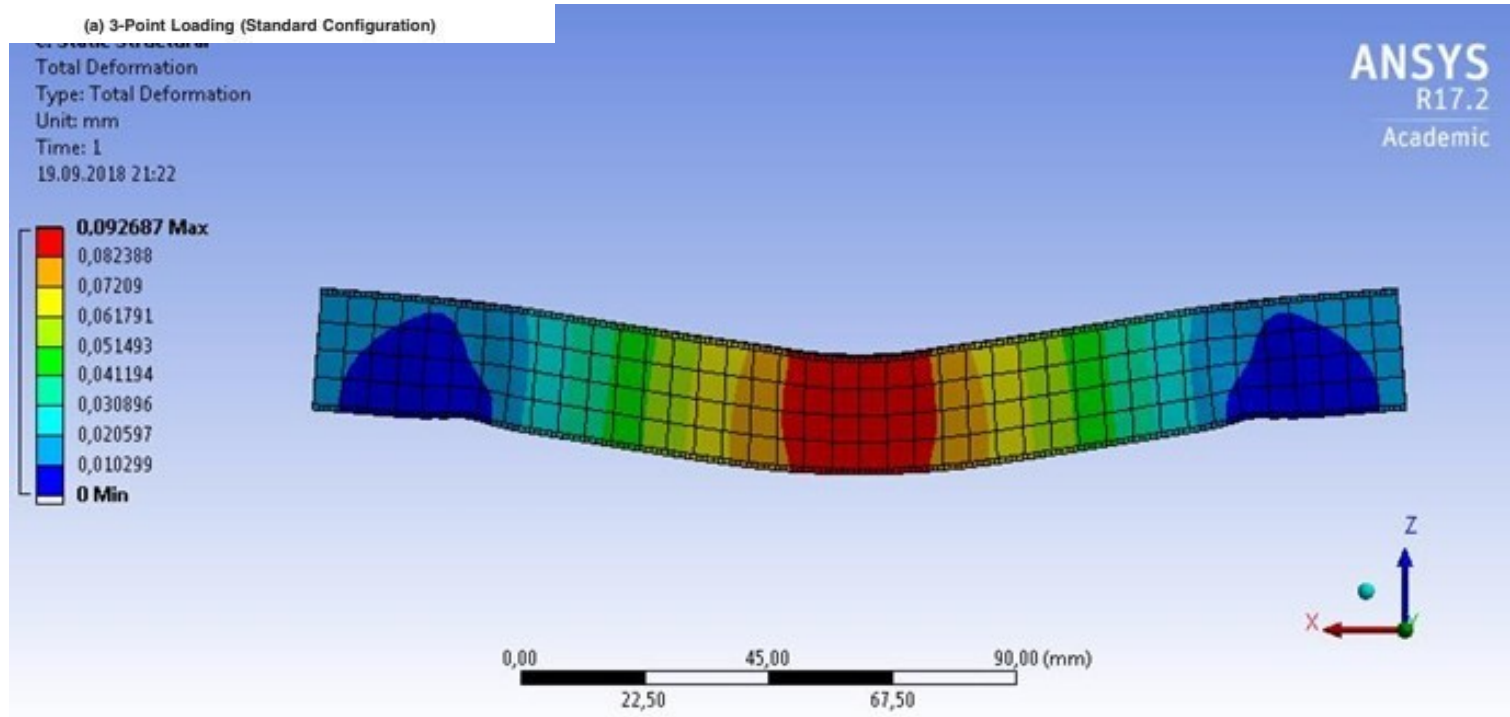
Κάμψη: Η δοκός θεωρούμε ότι κάμπτεται όταν στηρίζεται σε ένα ή και περισσότερα σημεία και οι εξωτερικές δυνάμεις [φορτίσεις] ασκούνται κάθετα στο άξονα της δοκού. Αποτέλεσμα της κάμψης είναι να αναπτύσσονται εφελκυστικές, θλιπτικές και διατμητικές καταπονήσεις στην διατομή και κατά μήκος της δοκού.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Beam_bending2.svg

<https://www.xyztec.com/en/news/newsletter-30/Fracture-strength-of-thin-wafers-and-die>

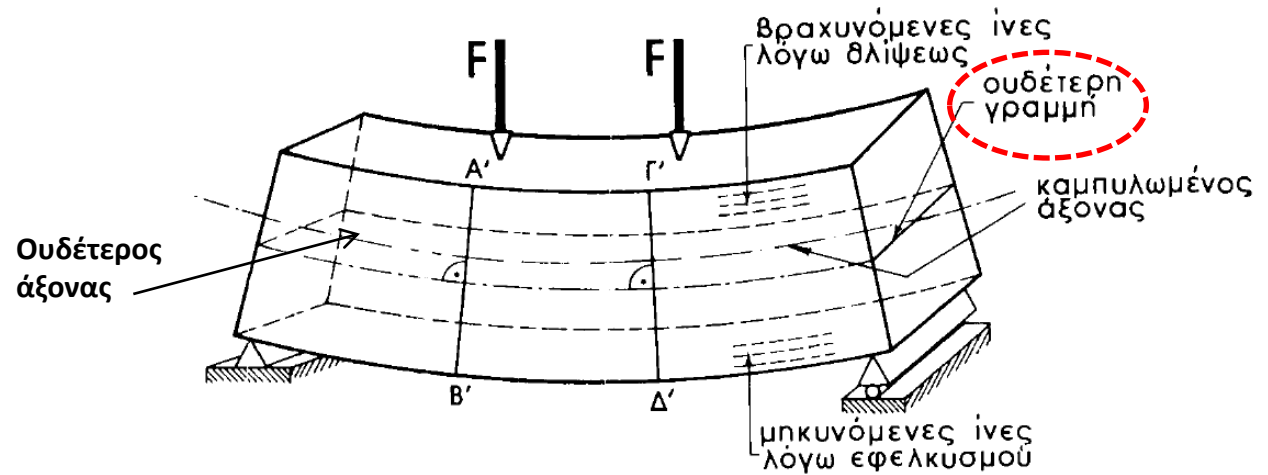
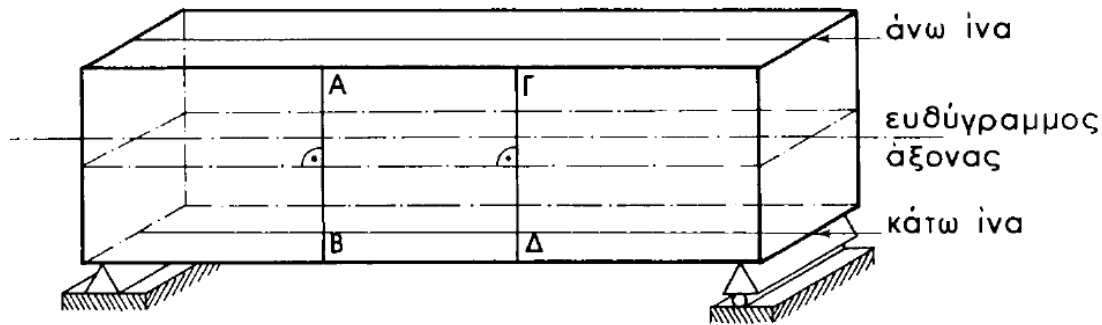


(a) 3-Point Loading (Standard Configuration)

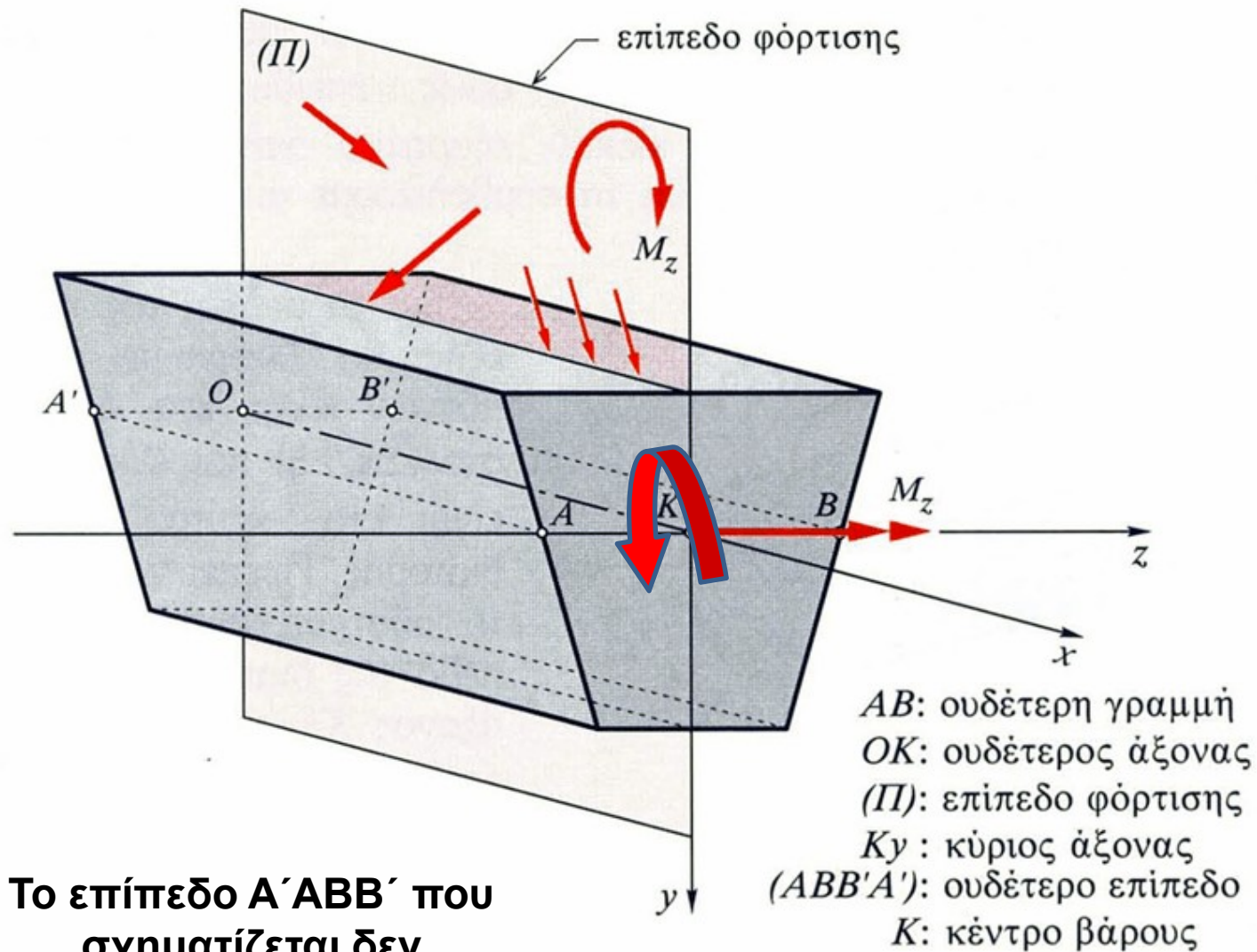


Οι διατομές μιας δοκού που ήταν επίπεδες, παραμένουν επίπεδες και μετά την κάμψη [παραμόρφωση] της δοκού, [Υπόθεση Bernoulli].

<https://studentcommunity.ansys.com/thread/three-point-bending/>



Ουδέτερος άξονας [Ουδέτερη γραμμή]: Ευθεία κάθετη στο επίπεδο φόρτισης, που χωρίζει την διατομή σε δύο τμήματα. Για τις διπλά συμμετρικές διατομές, ο ουδέτερος άξονας ταυτίζεται με το κέντρο βάρους.



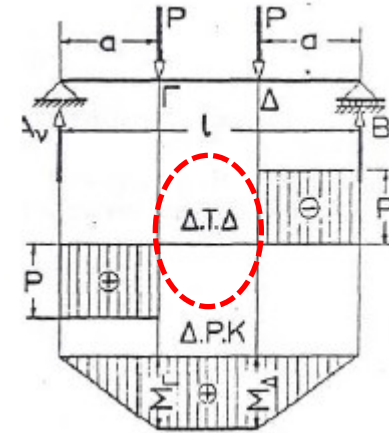
Το επίπεδο $A'B'B'A'$ που σχηματίζεται δεν παραμορφώνεται

(β) Μορφές κάμψης

Απλή κάμψη:

- Η ορθή δύναμη [αξονική] είναι μηδενική.
- Η τέμνουσα δύναμη είναι μηδενική.
- Η ροπή είναι διαφορετική από μηδέν.

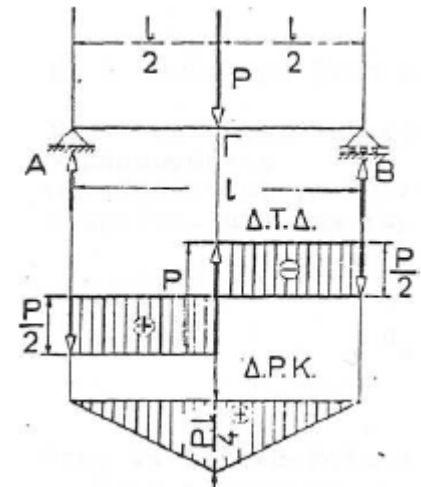
Καταπόνηση: **Κάμψη**



Τυπική κάμψη:

- Η ορθή δύναμη [αξονική] είναι μηδενική.
- Η τέμνουσα δύναμη είναι διαφορετική από μηδέν.
- Η ροπή είναι διαφορετική από μηδέν.

Καταπόνηση: **Κάμψη+Διάτμηση**



Σύνθετη κάμψη:

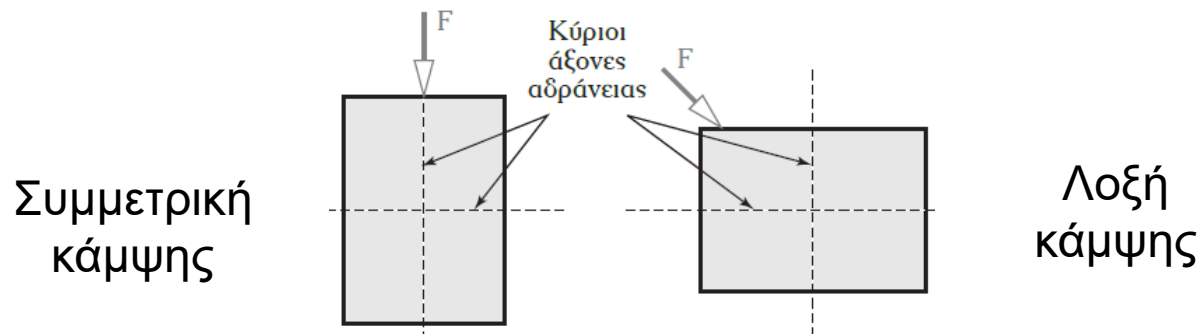
- Η ορθή δύναμη [αξονική] είναι διαφορετική από μηδέν.
- Η τέμνουσα δύναμη είναι διαφορετική από μηδέν.
- Η ροπή είναι διαφορετική από μηδέν.

Καταπόνηση: **Αξονική+Κάμψη+Διάτμηση**

Ανάλογα με τον διεύθυνση που ασκείται η δύναμη διακρίνουμε:

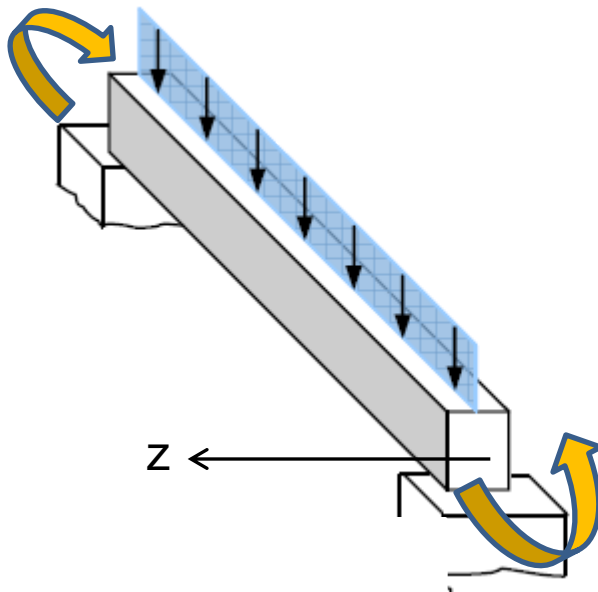
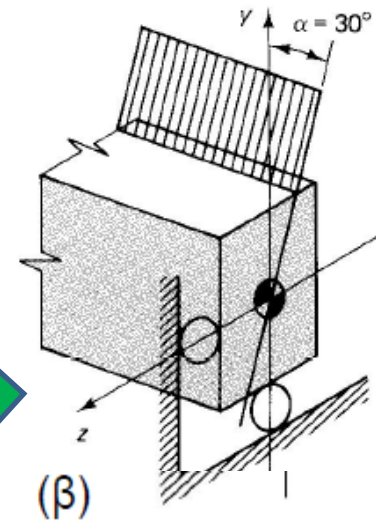
Συμμετρική κάμψη: Η δύναμη ασκείται κάθετα στους κύριους άξονες του συστήματος [σε επίπεδο διατομής, στοιχείου]

Λοξή κάμψη: Τουλάχιστον μία δύναμη ασκείται υπό γωνία ως προς τους κύριους άξονες.

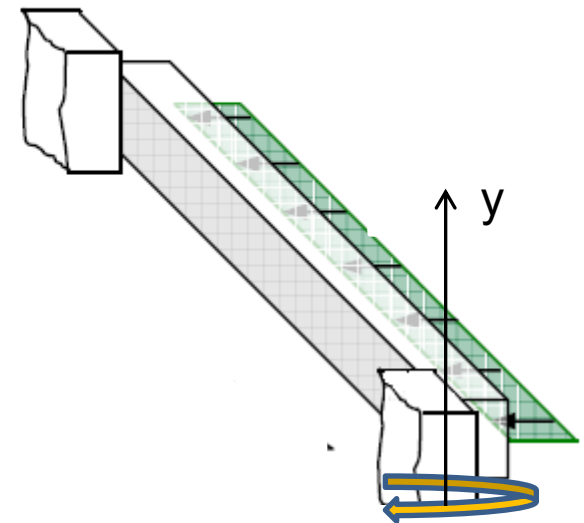


Όταν το φορτίο ασκείται κάθετα στον άξονα της δοκού: Συμμετρική κάμψη.

Όταν το φορτίο ασκείται υπό γωνία, ως προς τους άξονες της δοκού τότε η ανάλυση της δύναμης οδηγεί σε λοξή κάμψη.



Ανάπτυξη ροπής ως προς τον άξονα (z), **M_z**

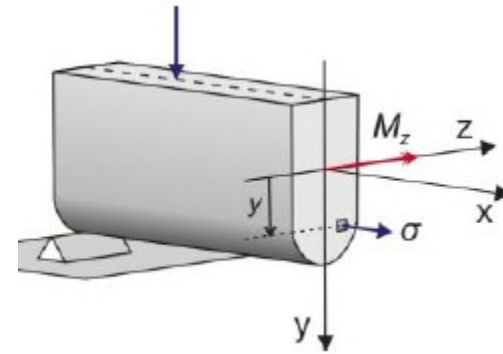


Ανάπτυξη ροπής ως προς τον άξονα (y), **M_y**

Ανάλογα με τον άξονα που ασκείται η ροπή διακρίνουμε:

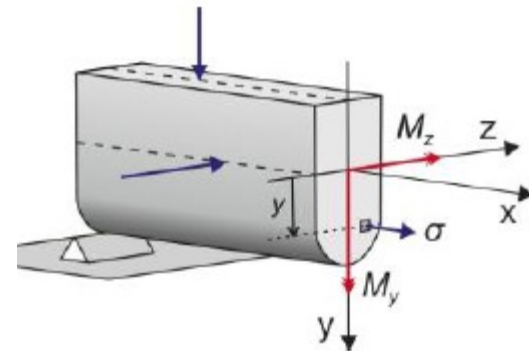
Μονοαξονική κάμψη: Η ροπή ασκείται ως προς ένα άξονα.

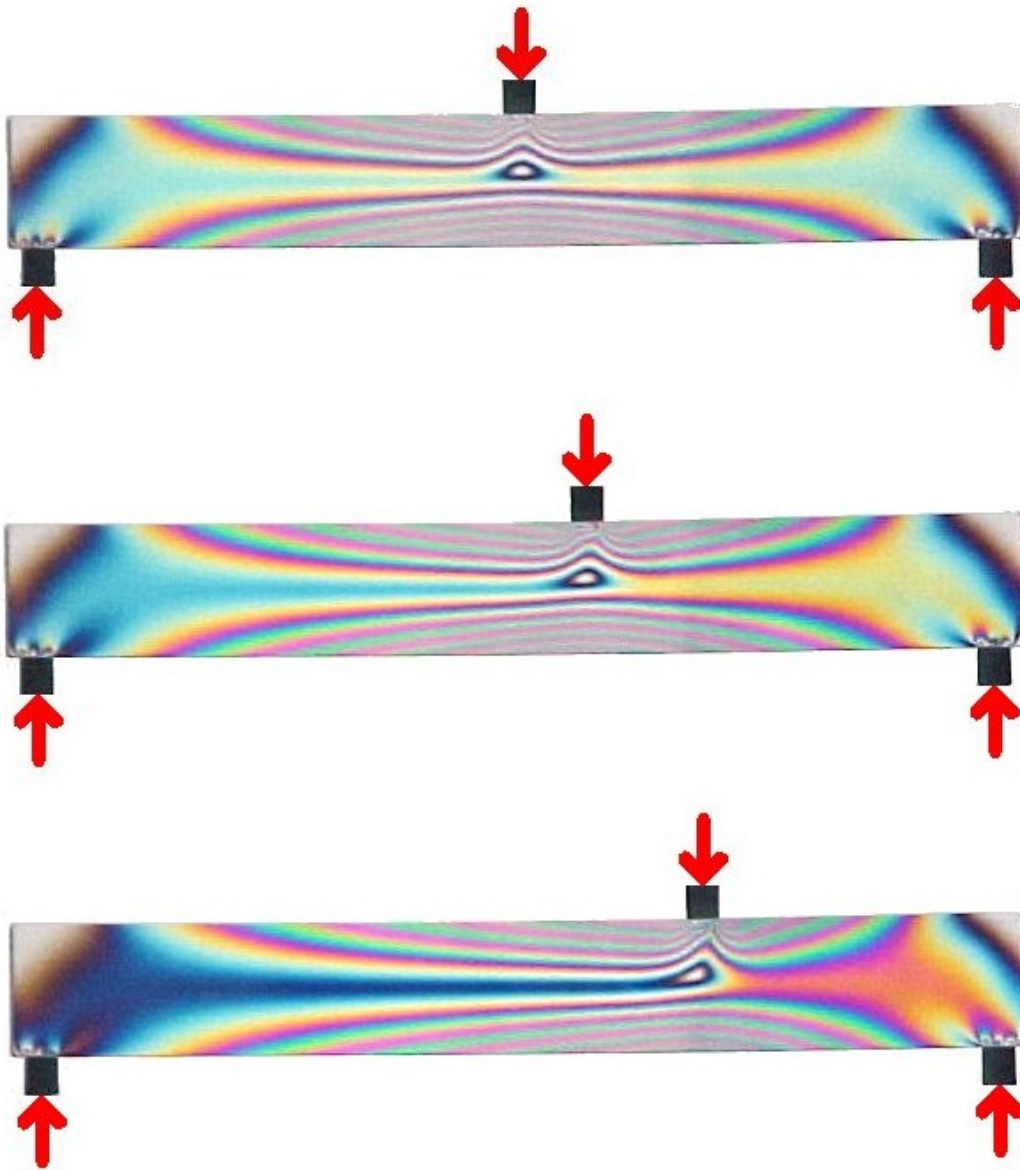
Συμμετρική κάμψη



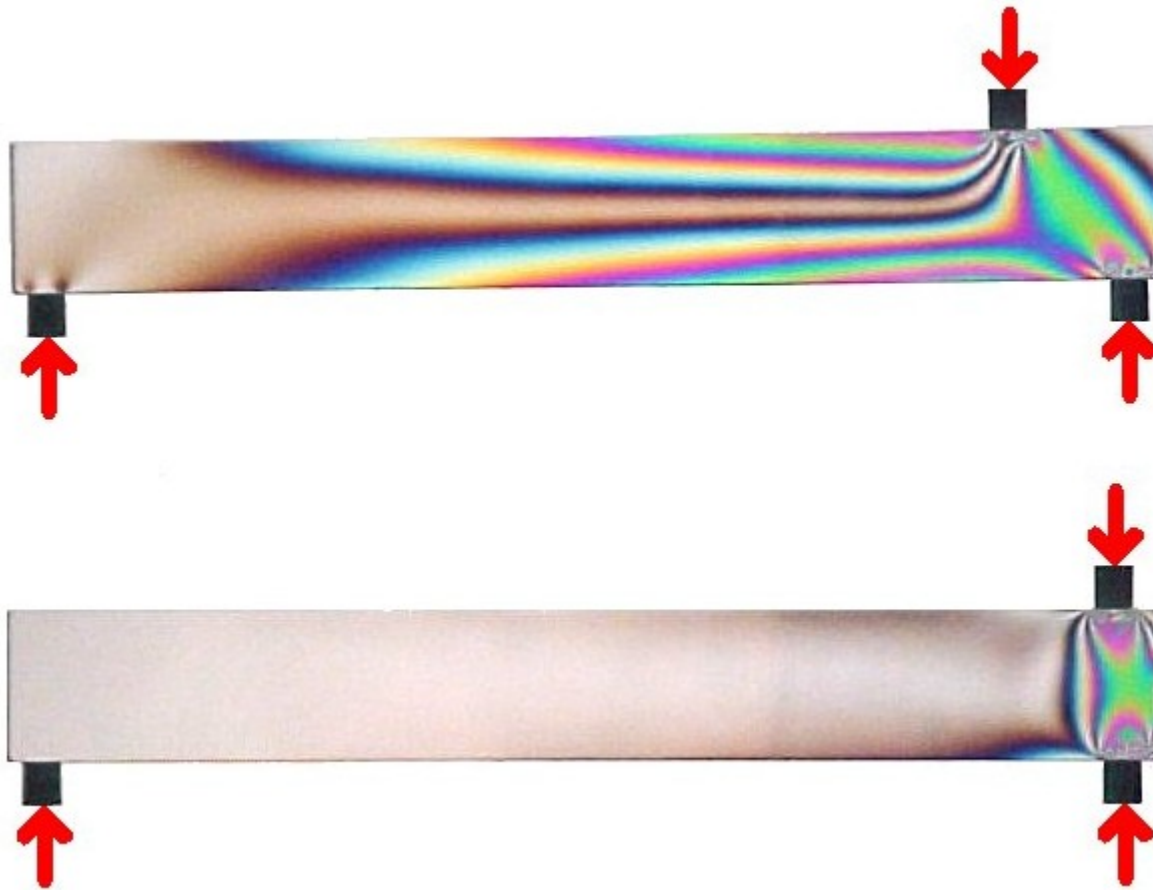
Διαξονική κάμψη: Η ροπή ασκείται και στους δύο άξονες.

Συμμετρική ή λοξή κάμψη





Κάμψη δοκού [τροχιές τάσεων]/ Κατανομή δυνάμεων



<https://classes.mst.edu/civeng2210/concepts/01/mechanics/flexure/index2.html>

(γ) Συμμετρική καθαρή κάμψη [Απλή/τυπική κάμψη]

Υπολογισμός τάσεων σε απλή κάμψη

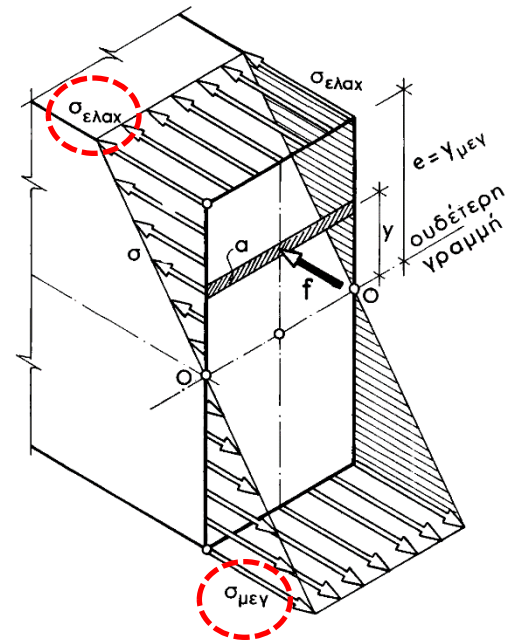
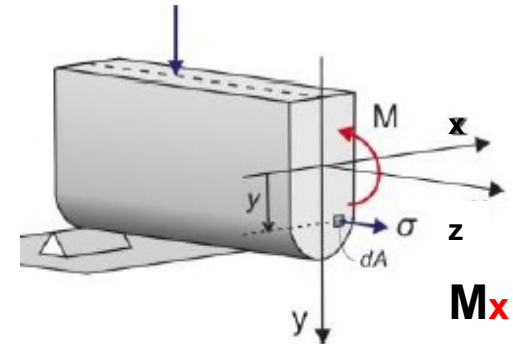
$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

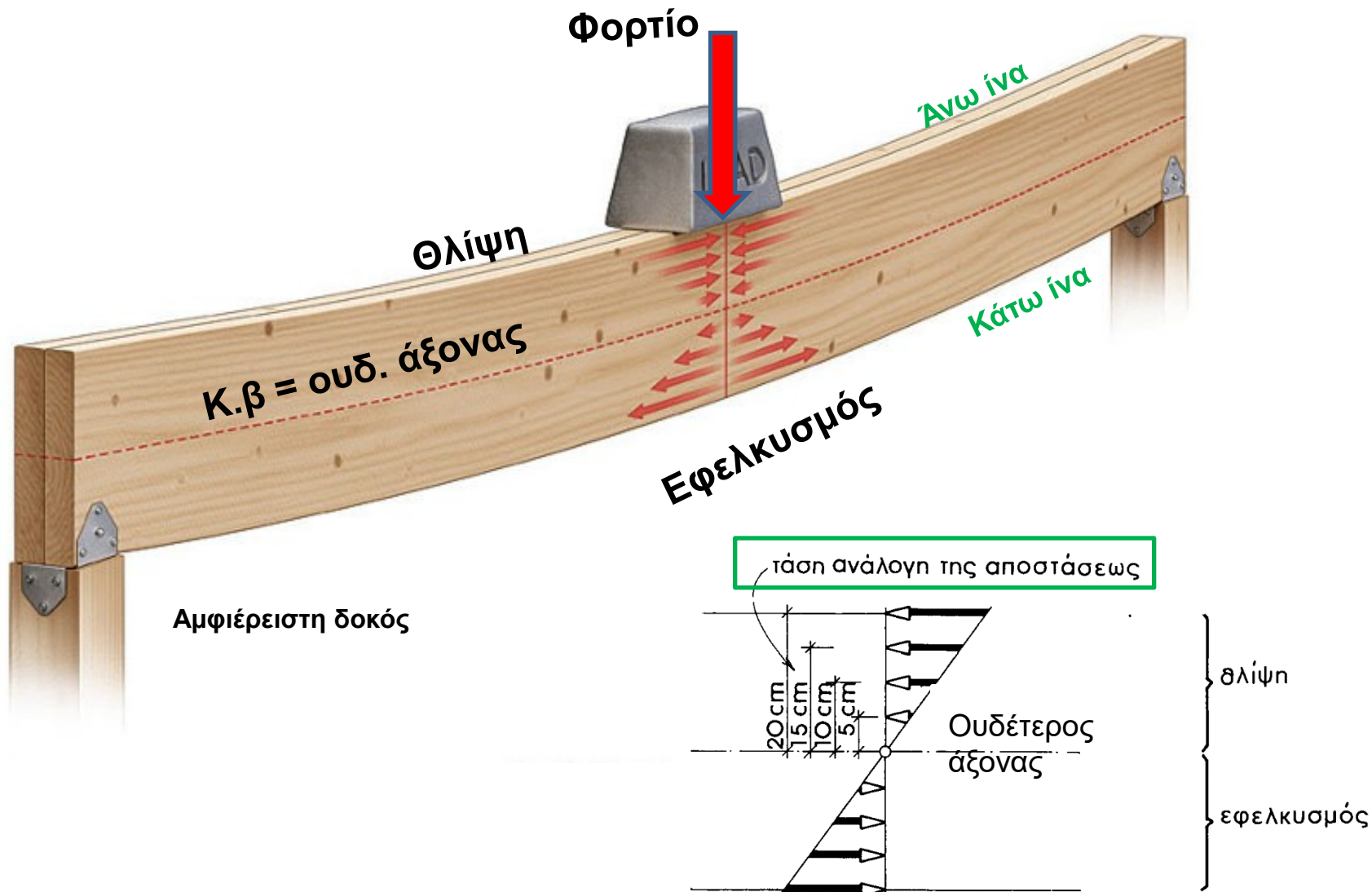
$$W = I/y$$

$$\sigma = M / W$$

Η κατανομή της τάσης, καθ' ύψος της διατομής, γίνεται αναλογικά, με βάση την απόσταση από τον ουδέτερο άξονα.

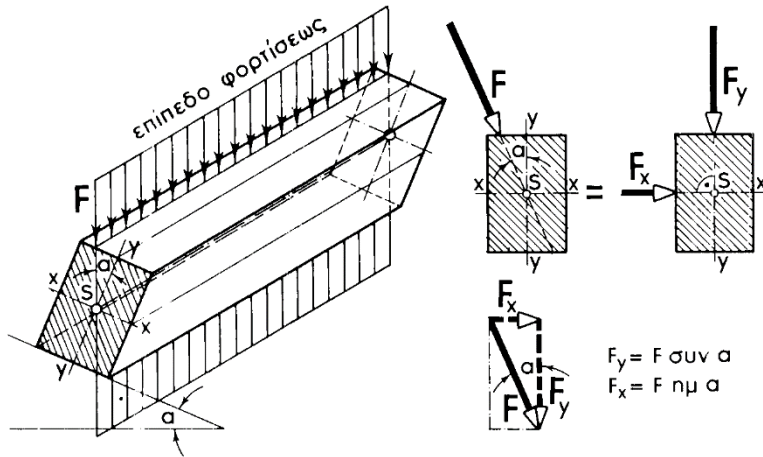
Η ροπή μπορεί να ασκείται περί τον άξονα [z] τότε συμβολίζεται ως M_x [$\sigma_x = M_x/W_x$], ή περί τον άξονα [y], τότε συμβολίζεται ως M_y [$\sigma_y = M_y/W_y$],.





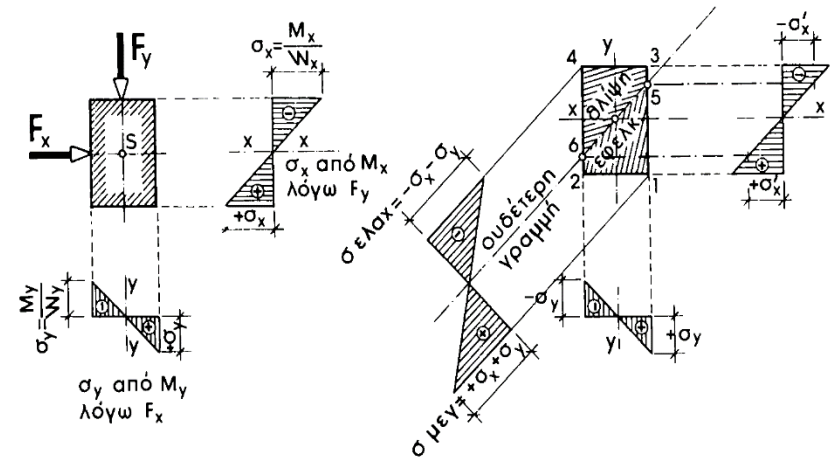
<https://www.finehomebuilding.com/2016/03/06/simple-wood-beams>

(δ) Λοξή κάμψη



$$M_x = M \cdot \sin \alpha$$

$$M_y = M \cdot \eta \mu \alpha$$



Απλή κάμψη
κατά τον άξονα x

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$

Απλή κάμψη
κατά τον άξονα y

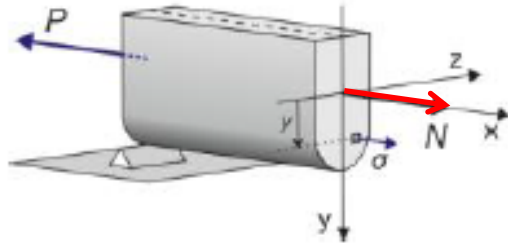
$$\sigma_y = \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}$$

(ε) Γενικές περιπτώσεις κάμψης – Σύνθετες καταπονήσεις

(i) Κάμψη από έκκεντρη αξονική φόρτιση

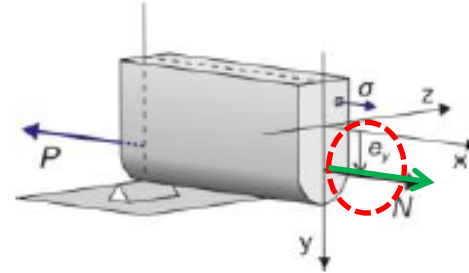
Αξονική φόρτιση



$$\sigma = \frac{N}{A}$$

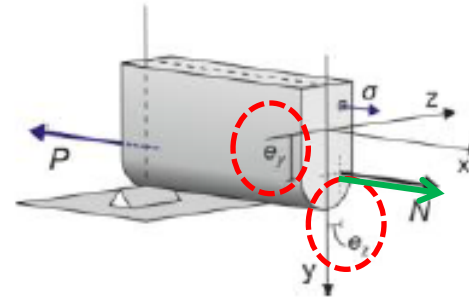
Η αξονική φόρτιση που ασκείται στο κέντρο βάρους δεν παράγει κάμψη αλλά εφελκυσμό ή θλίψη ανάλογα με την φορά που ασκείται.

Έκκεντρη φόρτιση



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{e_y N}{I_z} y$$

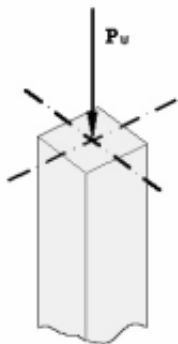
Ως προς κ.β. άξονα z



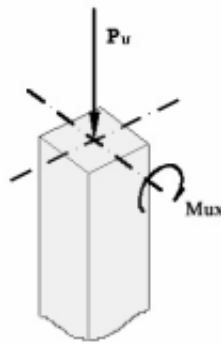
Ως προς κ.β. άξονα z & y

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{e_y N}{I_z} y + \frac{e_z N}{I_y} z$$

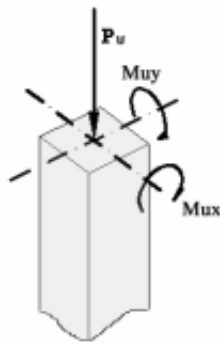
(II) Κάμψη και αξονική φόρτιση



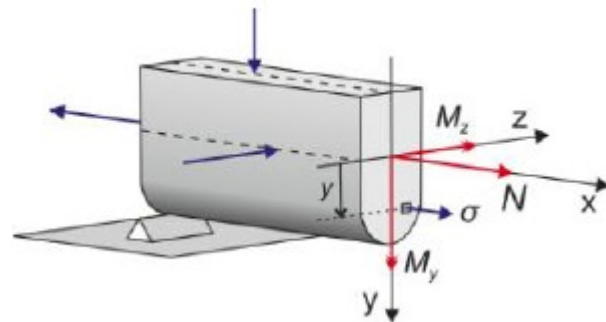
Αξονική
φόρτιση



Αξονική
φόρτιση
+
Μονο
αξονική
κάμψη



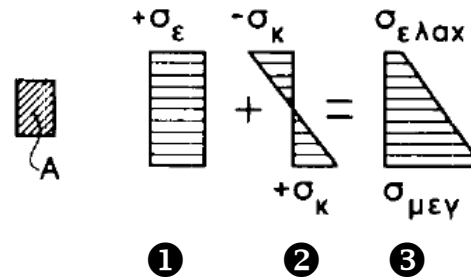
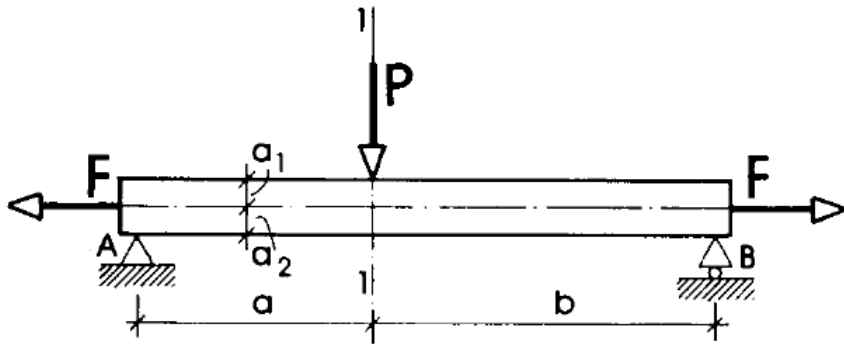
Αξονική
φόρτιση
+
Διαξ
αξονική
κάμψη



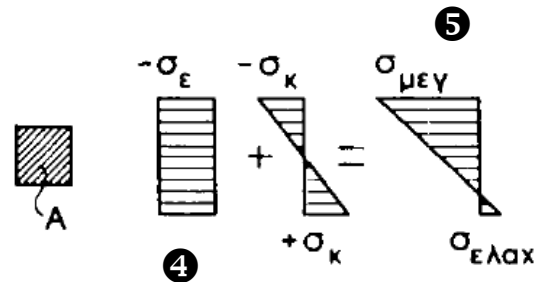
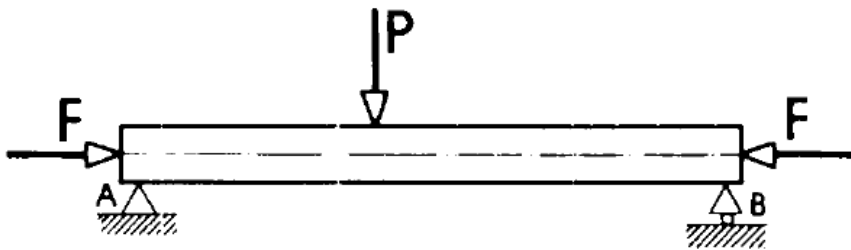
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_{zz}} y + \frac{M_y}{I_{yy}} z$$

Παραδείγματα καταπόνησης

Μονοαξονική κάμψη και εφελκυσμός



Μονοαξονική κάμψη και θλίψη



- ❶ Εφελκυσμός (+)
- ❷ Κάμψη
- ❸ Εφελκυσμός από κάμψη + αξονική [εφελκυσμός]
- ❹ Θλίψη (-)
- ❺ Θλίψη από κάμψη + αξονική [θλίψη]

Ισχύει ο νόμος επαλληλίας
[ελαστική περιοχή συμπεριφοράς]

Παράμετροι σχεδιασμού

Έλεγχος τάσεων

$$\sigma_{\text{υπ}} = \frac{M_{\text{μεγ}}}{W_{\text{υπ}}} \leq \sigma_{\text{επ}}$$

Σχεδιασμός

$$W_{\text{απαιτ}} = \frac{M_{\text{μεγ}}}{\sigma_{\text{επ}}}$$

Μέγιστη αντοχή έναντι κάμψης

$$M_{\text{μεγ}} = \sigma_{\text{επ}} \cdot W_{\text{υπ}}$$

Η $\sigma_{\text{επ}}$ είναι η επιτρεπόμενη τάση που χρησιμοποιείται κατά την μέθοδο των επιτρεπομένων τάσεων.
Η $\sigma_{\text{επ}}$ αντικαθίσταται από το όριο διαρροής f_y και χρησιμοποιείται στις μεθόδους οριακών καταστάσεων.

$$\sigma = M/W \leq f_y$$

$$W \leq M / f_y$$

$$M = f_y \cdot W$$

Γεωμετρικά χαρακτηριστικά

Εμβαδόν διατομής

Ροπή αδράνειας

Ροπή αντοχής

Ύψος διατομής

Μηχανικά χαρακτηριστικά

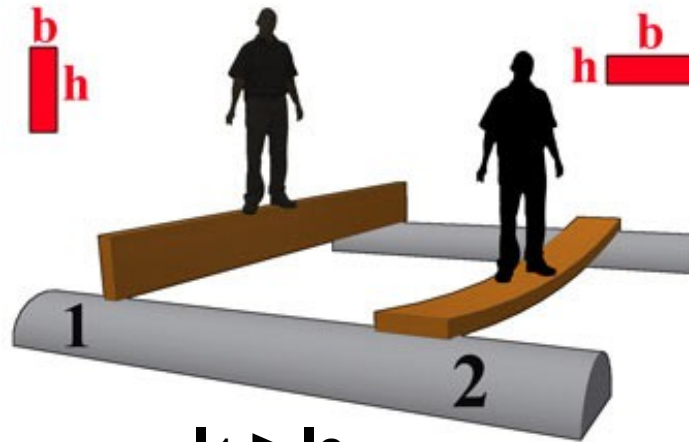
Μέτρο ελαστικότητας

Όριο διαρροής

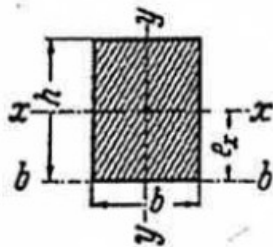
Όταν ένα μηχανικό σύστημα κάμπτεται το υλικό της εγκάρσιας διατομής, που συνθέτει το μηχανικό σύστημα, θα πρέπει να διατάσσεται μακριά από το κέντρο βάρους.

$$I_1 = bh^3/12$$

$$I_2 = bh^3/12$$



$$I_1 > I_2$$



$$h > b$$

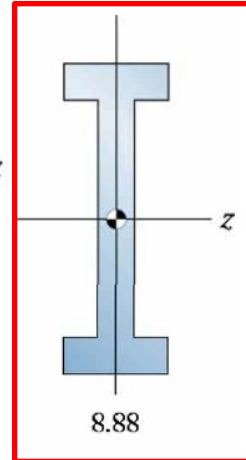
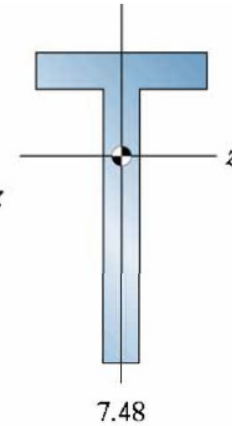
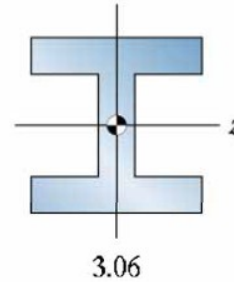
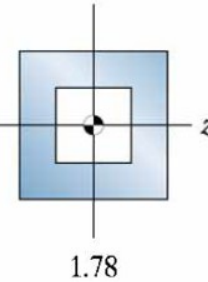
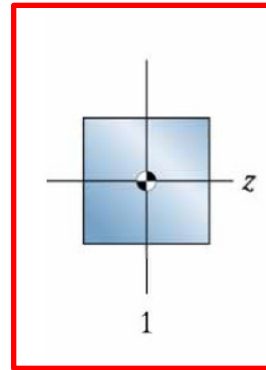
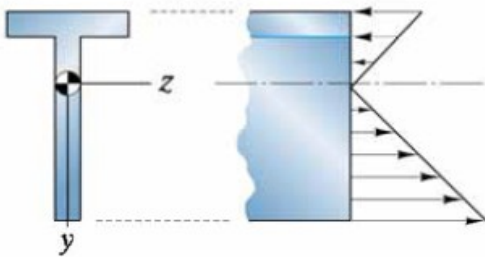
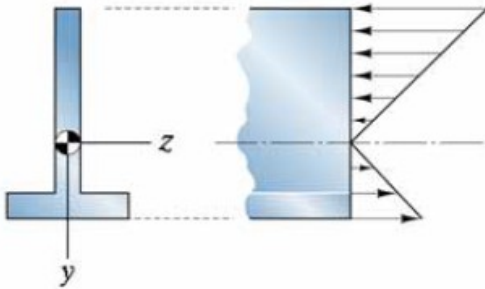
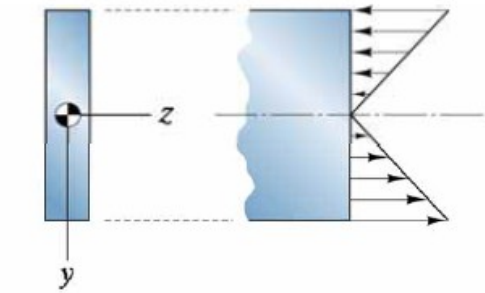
$$J_x = \frac{b h^3}{12}$$

$$J_y = \frac{h b^3}{12}$$

$$I_x > I_y$$



Κέντρο βάρους διατομής

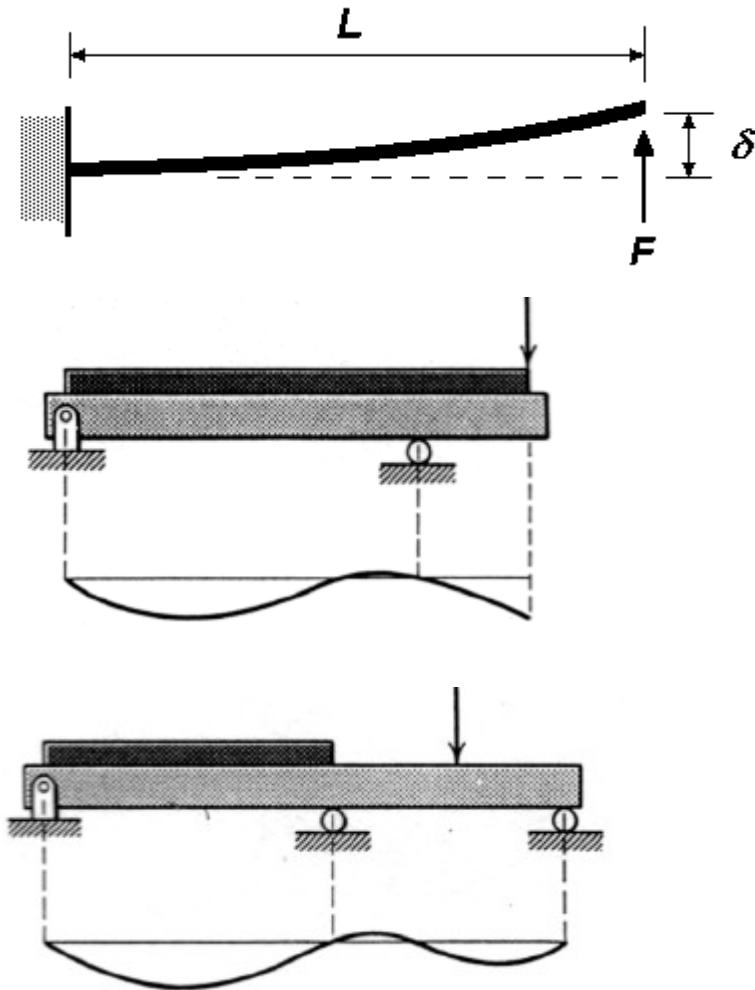


Συντελεστής ροπή αδράνειας, για διατομές ίσου εμβαδού ως προς την συμπαγή τετραγωνική διατομή.

Τοποθέτηση της διατομής ανάλογα με την ικανότητα του υλικού να παραλάβει θλίψη και εφελκυσμό.

Bedford/Liechti, Mechanics of Materials, 1e, ©2001, Prentice Hall

(στ) Βέλος κάμψης



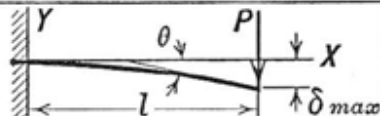
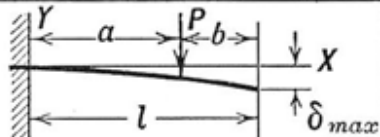
Κατά την κάμψη της δοκού ο ουδέτερος άξονας μετατοπίζεται και από οριζόντιας και ευθύγραμμος που είναι αρχικά στην θέση ισορροπίας καμπυλώνεται παρουσιάζοντας κάθετη μετακίνηση, δ , και στροφή στις στηρίξεις, θ .

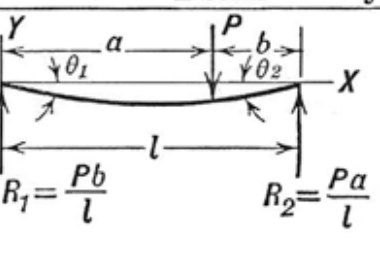
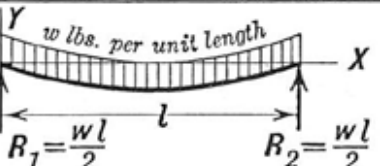
Το βέλος κάμψης και οι στροφές στις μετακινήσεις εξαρτώνται:

- Από την φόρτιση.
- Από τον τύπο στήριξης.
- Από την ροπή αδράνειας της διατομής.
- Από το μήκος της δοκού.
- Από το μέτρο ελαστικότητας του υλικού.

Βέλη δοκών από πίνακες

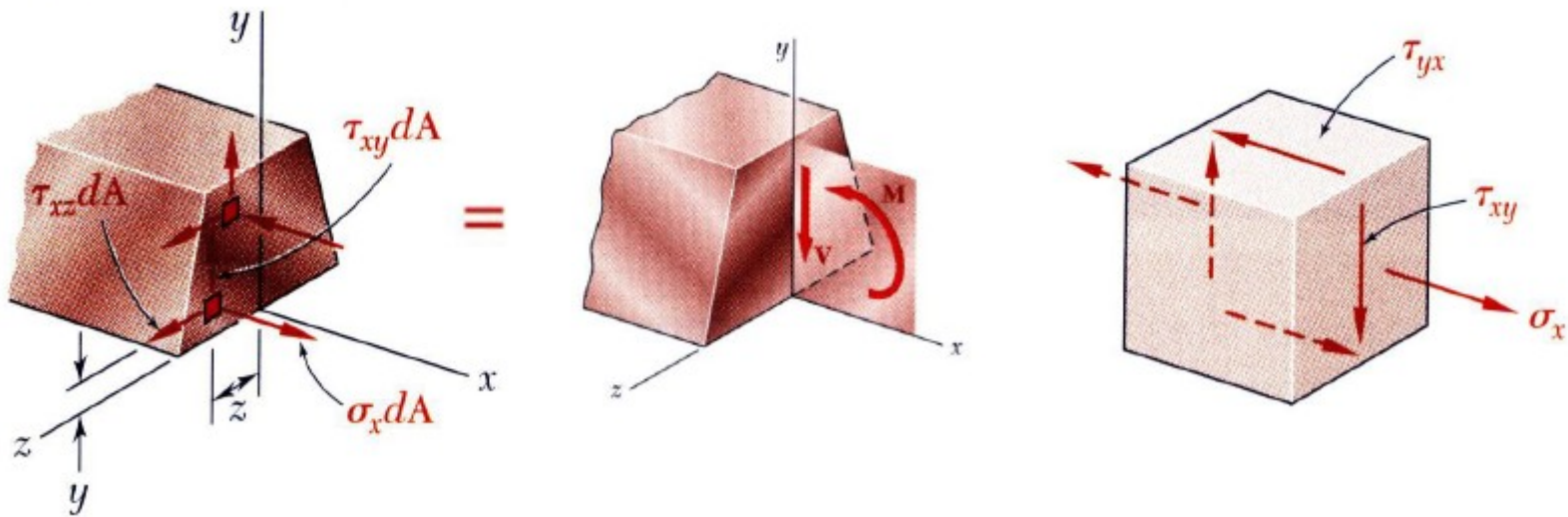
Slope at free end.	Deflection at any section in terms of x : δ is positive downward.	Maximum deflection.
--------------------	--	---------------------

	$\theta = \frac{Pl^2}{2EI}$	$\delta = \frac{Px^2}{6EI} (3l-x)$	$\delta_{max} = \frac{Pl^3}{3EI}$
2. Cantilever Beam — Concentrated load P at any point.			
	$\theta = \frac{Pa^2}{2EI}$	$\delta = \frac{Px^2}{6EI} (3a-x) \text{ for } 0 < x < a,$ $\delta = \frac{Pa^2}{6EI} (3x-a) \text{ for } a < x < l$	$\delta_{max} = \frac{Pa^2}{6EI} (3l-a)$

	<p>Left End. $\theta_1 = \frac{Pb(l^2-b^2)}{6lEI}$</p> <p>Right End. $\theta_2 = \frac{Pab(2l-b)}{6lEI}$</p>	<p>To the left of load P: $\delta = \frac{Pbx}{6lEI} (l^2-x^2-b^2)$</p> <p>To the right of load P: $\delta = \frac{Pb}{6lEI} \left[\frac{l}{b} (x-a)^3 + (l^2-b^2)x - x^3 \right]$</p>	$\delta_{max} = \frac{Pb(l^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}lEI}$ at $x = \sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}}$ At center, if $a > b$ $\delta = \frac{Pb}{48EI} (3l^2-4b^2)$
8. Beam freely supported at the ends — Uniformly distributed load of w lbs. per unit length.			
	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{wl^3}{24EI}$	$\delta = \frac{wx}{24EI} (l^3 - 2lx^2 + x^3)$	$\delta_{max} = \frac{5wl^4}{384EI}$

Timoshenko and MacCullough, *Elements of Strength of Materials*, 3th Ed., pp. 182-183, D. Van Nostrand Company, Inc., 1949

(ζ) Διάτμηση λόγο κάμψης



Η διάτμηση μπορεί να αναπτύσσεται κάθετα στον άξονα της δοκού, τ_{xy} , προκαλώντας τμήση, όπως επίσης και παράλληλα με τον κεντροβαρικό άξονα, τ_{yx} , προκαλώντας ολίσθηση. Η μέση διατμητική τάση υπολογίζεται:

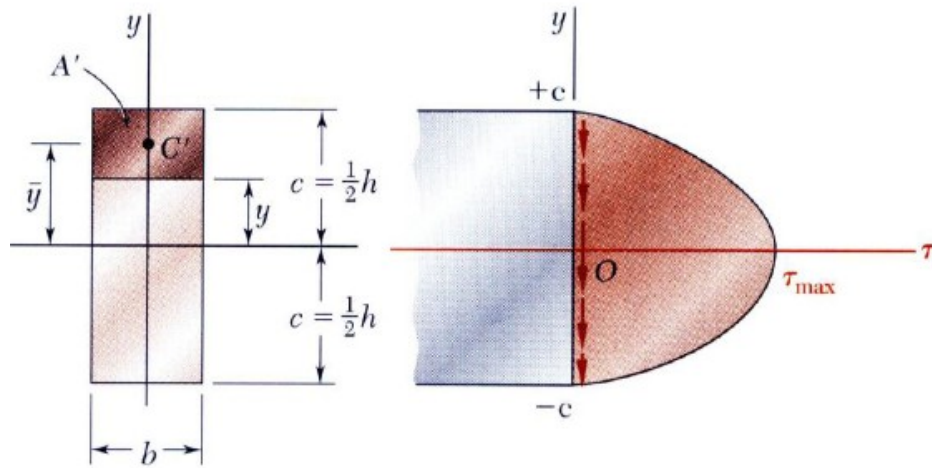
$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$

V: διατμητική δύναμη καταπόνησης

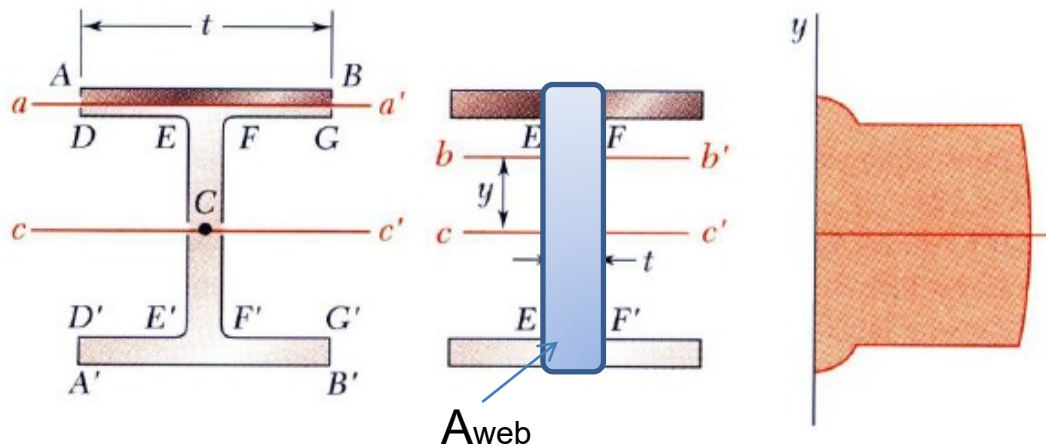
Q: Στατική ροπή [συμβολίζεται και με S στην βιβλιογραφία].

I: Ροπή αδράνειας

t: Πάχος διατομής



$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A}$$



$$\tau_{\max} = \frac{V}{A_{\text{web}}}$$

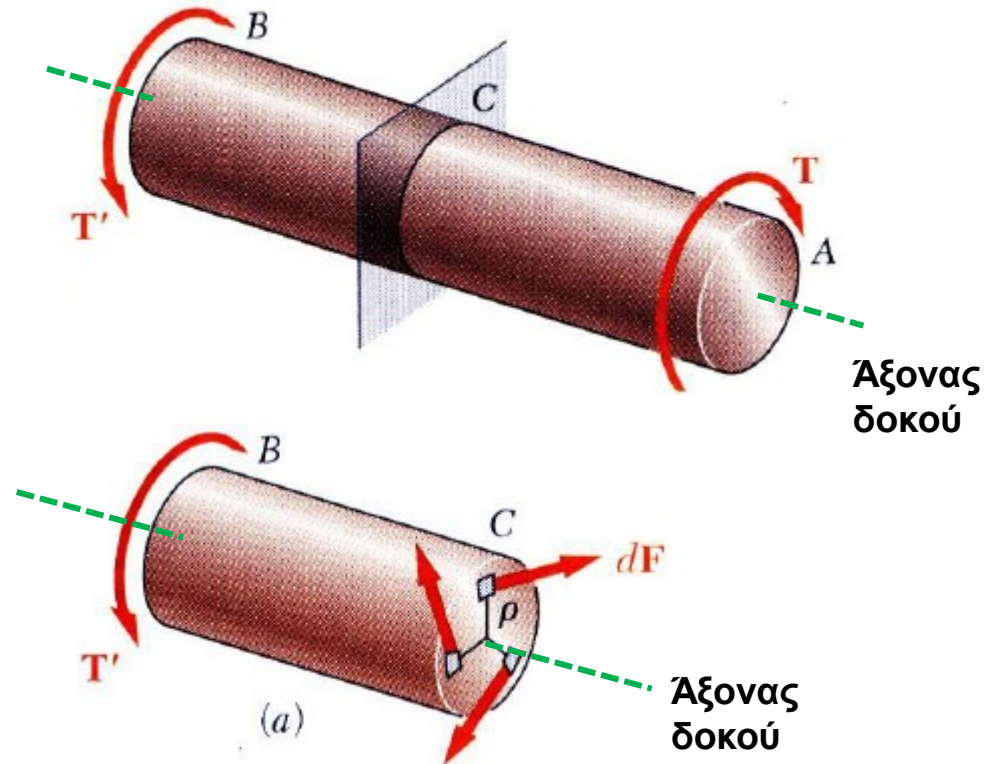
Γενικά η διάτμηση από κάμψη έχει επιρροή σε δοκούς μεγάλου ύψους ως προς το άνοιγμα τους, στις στηρίξεις όπου το φορτίο διατομής διάτμησης είναι μεγάλο, εν γένει σε περιπτώσεις όπου η αντοχή είναι μικρότερη του 50% της διατμητικής καταπόνησης, καθώς και σε σύνθετες δοκούς όπου η διατομές μπορεί να ολισθαίνουν.

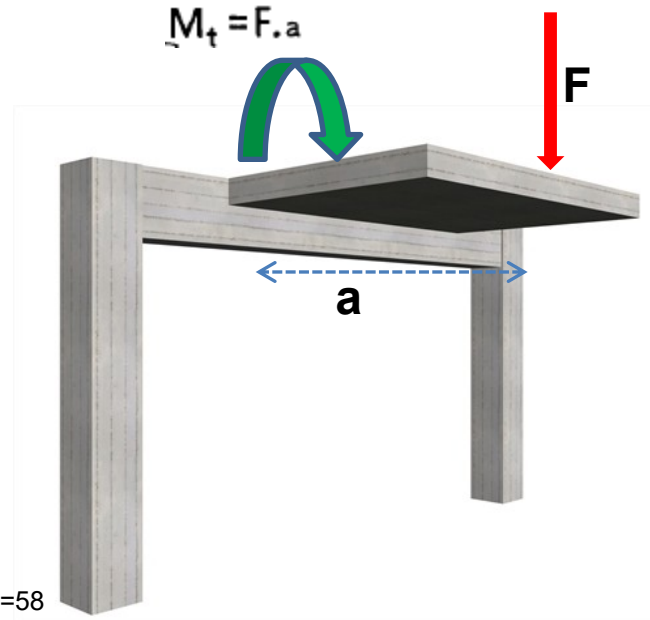
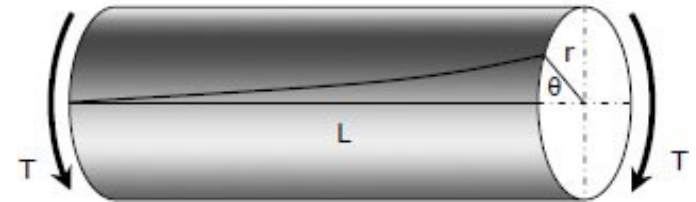
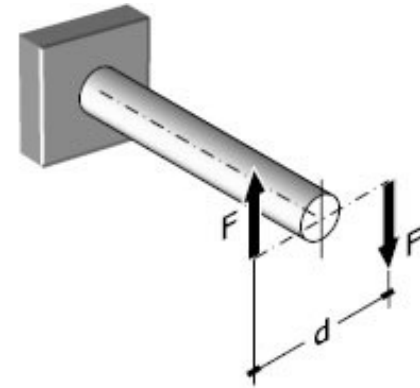
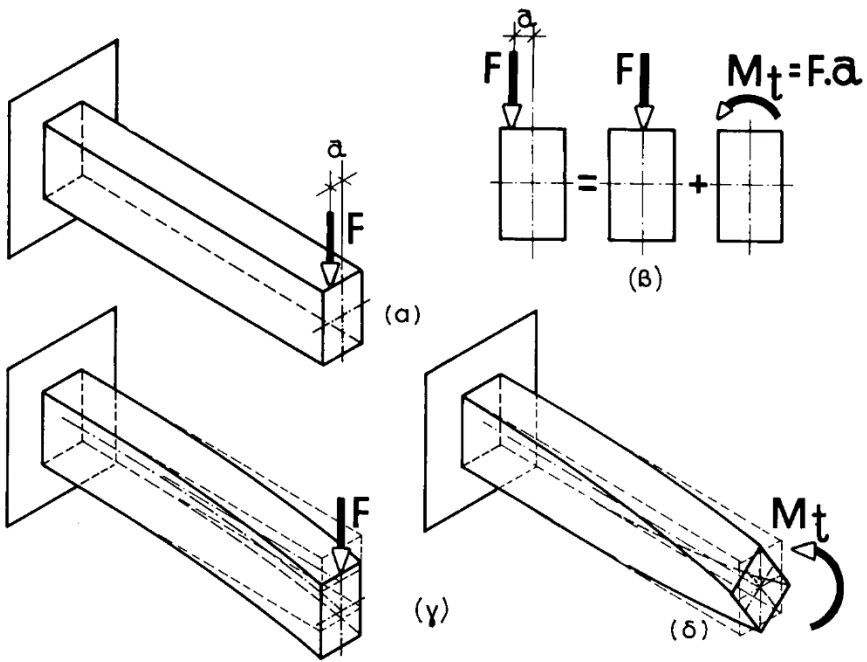
2. Στρέψη δοκών

(α) Ορισμός στρέψης

Στρέψη: Μια δοκός με ευθύγραμμο άξονα καταπονείται σε στρέψη όταν ασκείται ροπή κάθετα στο άξονα της.

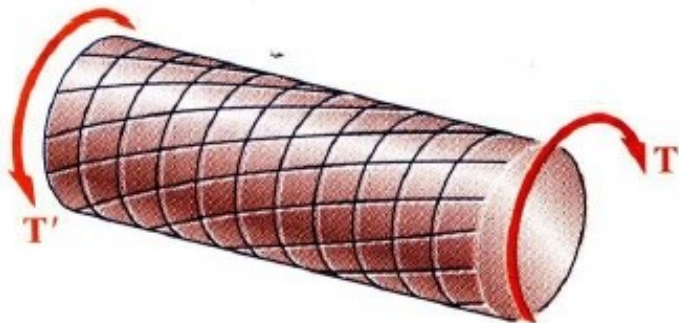
Συμβολισμός:
ροπή στρέψης:
Mt,
ή
T (torsion)





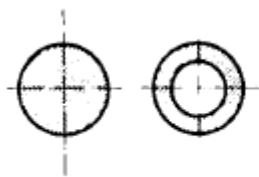
Φορτίσεις στρέψης

Στην στρέψη καθοριστικό ρόλο, στην ανάπτυξη τάσεων και παραμορφώσεων, παίζει η μορφή της διατομής.

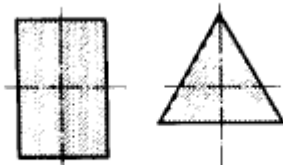


Στις κυκλικές συμπαγής ράβδους κατά την εφαρμογή στρεπτικής ροπής η διατομή παραμένει επίπεδη και άστρεπτη.

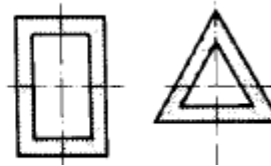
Στις ορθογωνικές ράβδους κατά την εφαρμογή στρεπτικής ροπής η διατομή υφίσταται στέψη.



Κυκλικές διατομές

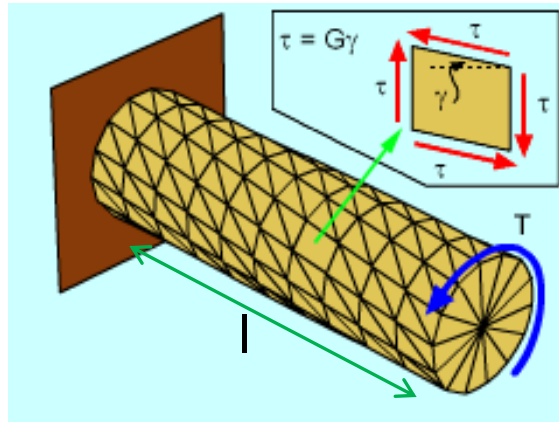


Ορθογωνικές διατομές



Λεπτότοιχες διατομές

(β) Στρέψη κυκλικών συμπαγών διατομών



Διατμητικές τάσεις από στρέψη

$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \rightarrow W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

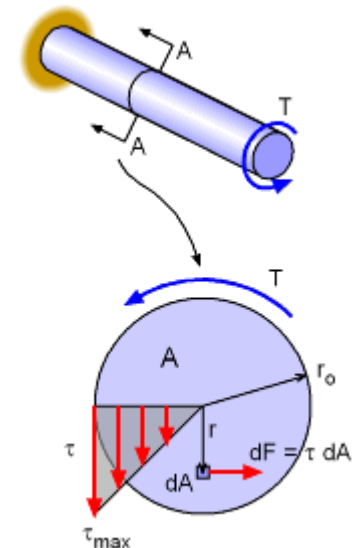
$$\tau = T / W_p$$

$$\tau_{\max} = 16 T / \pi d^3$$

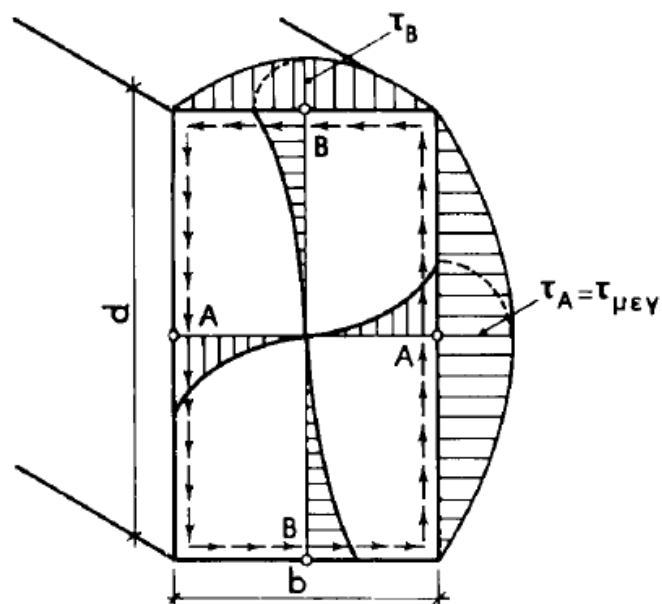
Γωνία στροφής
από στρέψη [rad]

$$\theta_{\max} = 32 * T * l / G \pi d^4$$

T: Ροπή στρέψης
I_p: Πολική ροπή συμπαγούς κυκλικής διατομής
d: Διάμετρος
W_p: πολική ροπή αντίστασης



(γ) Στρέψη ορθογωνικής διατομής



Μέγιστη τάση από στρέψη

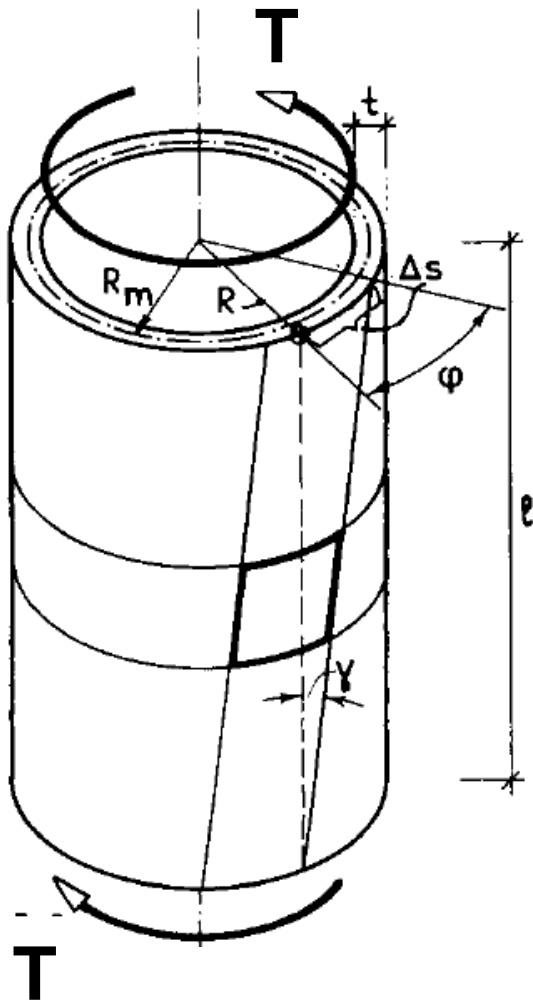
$$\tau_A = \tau_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{T}{abd^2}$$

Γωνία στροφής από στρέψη

$$\phi = \frac{T \cdot l}{G \cdot \beta b d^3}$$

d/b	1	1.5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
η	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

(δ) Στρέψη λεπτότοιχων σωληνωτών διατομών



A_0 : περίμετρος διατομής

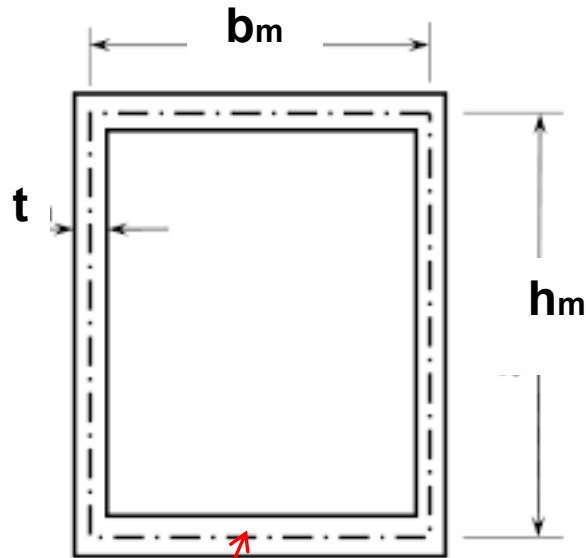
t : Πάχος διατομής

$$\tau_t = \frac{T}{2\pi R_m^2 t}$$

R_m : μέση ακτίνα διατομής

t : Πάχος διατομής

(ε) Στρέψη λεπτότοιχων ορθγωνικών διατομών



$$A_m = b_m * h_m$$

$$\tau_t = \frac{T}{2A_m t}$$

A_m : Επιφάνεια που περικλείεται από την γραμμή που διχοτομεί το πάχος του τοιχώματος.

t : Πάχος διατομής

Παράμετροι σχεδιασμού

Γεωμετρικά χαρακτηριστικά

Σχήμα διατομής

Εμβαδόν διατομής

Πολική ροπή αδράνειας

Πολική ροπή αντοχής







Πάχος διατομής

Μηχανικά χαρακτηριστικά

Μέτρο ελαστικότητας

Μέτρο διάτμησης

Όριο διατμητικής τάσης

	 		 
Βέλτιστη	Επιθυμητές	Ικανοποιητική	Ανεπιθύμητες

Σημείωμα Αναφοράς σε έργα Τρίτων

Βιβλιογραφία

1. Beer F., Johnston E.R., Mazurek D.: Τεχνική Μηχανική-Στατική. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 11^η 2019, [κωδ. Εύδοξος 59421317].
2. Gere J., Goodno B.: Αντοχή Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 9^η 2021, [κωδ. Εύδοξος 86055253].
3. Nash W.: Στατική και Μηχανική των Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 1^η 2002, [κωδ. Εύδοξος 18549012].
4. Π.Α. Βουθούνης: Τεχνική Μηχανική. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 10^η 2019, [ISBN 978-618-83280-4-4].
5. F.P. Beer, E.R. Johnston Jr., J.T. Wolf, D.F. Mazuerk: Μηχανική των Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 2012-2019. [ISBN: 978-960-418-381-4]. Ελληνική μετάφραση.
6. Π.Α. Βουθούνης: Στατική-Μηχανική του απαραμόρφωτου στερεού. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 6^η 2017, [ISBN 978-618-83280-1-3].
7. Π.Α. Βουθούνης: Αντοχή των Υλικών-Μηχανική του παραμορφώσιμου στερεού. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 4^η 2019, [ISBN 978-618-83280-3-7].
8. Μ. Ματσιοκούδη-Ηλιοπούλου: Τεχνική Μηχανική: Αρχές Στατικής και Εισαγωγή στην Θεωρία των Παραμορφώσιμων Σωμάτων. Εκδόσεις Ζυγός. Έκδοση 1991/2016. [ISBN13: 97896080652533], [κωδ. Εύδοξος 1753].
9. Γ. Γκρός. Μηχανική. Τόμος Α. Ευγενείδιο Ίδρυμα, 1976.

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Άνθιμος Σ. Αναστασιάδης. «Τεχνική Μηχανική: Στατική και Αντοχή Υλικών». Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Πολυτεχνική Σχολή. Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων & Συστημάτων. Έκδοση 4^η , Κοζάνη, 2024.

Διαθέσιμο από την διαδικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.uowm.gr/courses/MRE250/>

Σημείωμα αδειοδότησης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [<https://creativecommons.org/>] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να περιλαμβάνει τα παρακάτω:

- ❖ Σημείωμα Αναφοράς
- ❖ Σημείωμα Αδειοδότησης
- ❖ Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ❖ Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει), μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Κάμψη-Στρέψη

