



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων & Συστημάτων



Τεχνική Μηχανική

Μέρος Α-Στατική

Στατικά γεωμετρικά

χαρακτηριστικά διατομής

Κέντρο Βάρους – Ροπές αδράνειας

Άνθιμος Σ. ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗΣ
Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, Eurlng

1. Γενικά

Κάθε δομικό στοιχείο ανάλογα με **την γεωμετρία** του [σχήμα διατομής, διαστάσεις πλάτους, μήκους, ύψους], για **σταθερή εξωτερική φόρτιση, καταπονείται λιγότερο ή περισσότερο, από τις εξωτερικές δράσεις, ως συνάρτηση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών που το διαμορφώνουν.**

Για να καταστεί δυνατή η μελέτη των καταπονήσεων που υφίσταται από τις εξωτερικές δυνάμεις ένα δομικό στοιχείο θα πρέπει να είναι γνωστά τα **στατικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά σε επίπεδο διατομής**, τα οποία δεν περιορίζονται μόνο στο εμβαδόν και στις ιδιότητες του υλικού [μηχανικά χαρακτηριστικά].

Στατικά Γεωμετρικά χαρακτηριστικά διατομής

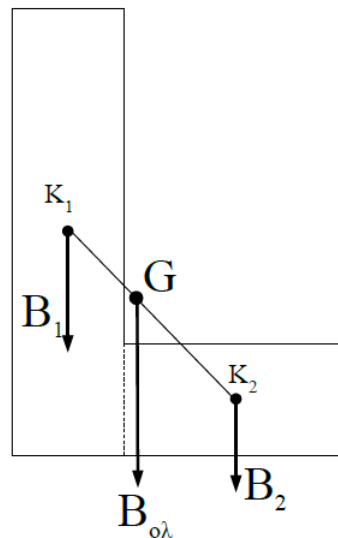
- Κέντρο Βάρους, **K.B**, [m].
- Στατική ροπή, **S**, [m³].
- Ροπή αδράνειας, **I**, [m⁴].
- Ακτίνα αδράνειας, **i**, [m].
- Πολική ροπή αδράνειας, **I_o**, [m⁴].
- Ροπή αντίστασης, **W**, [m³].
- Πολική ροπή αντίστασης, **W_o**, [m³].

Τα στατικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά διατομής χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της αντοχής των υλικών.

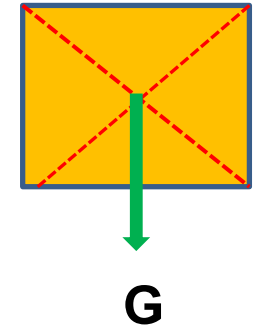
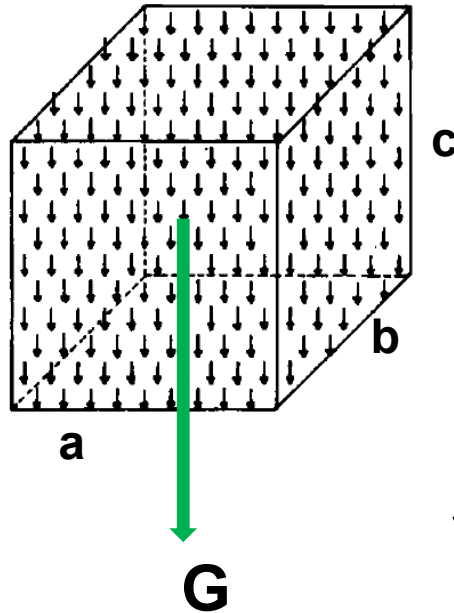
2. Κέντρο βάρους

Κέντρο βάρους, Κ.Β., μια διατομής ονομάζεται εκείνο το σημείο στο οποίο ασκείται η συνισταμένη δύναμη όλων βαρυτικών δυνάμεων [βάρος σώματος] που ενεργούν στο σώμα.

Η συνισταμένη όλων των παράλληλων δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα ονομάζεται **βάρος, G**.



(α) Υπολογισμός βάρους



$$\text{Βάρος} = (a \cdot b \cdot c) \cdot \gamma = V \cdot \gamma \quad [\text{N}]$$

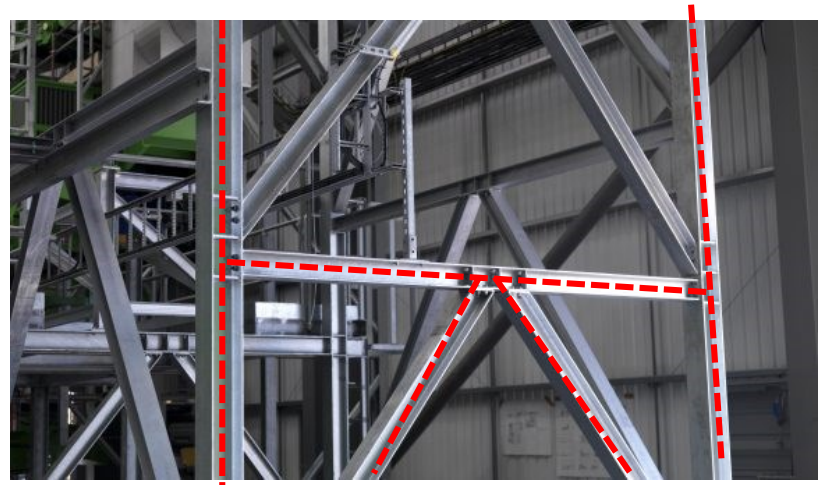
γ : πυκνότητα/ειδικό βάρος υλικού, N/m^3 .

Αναγωγή βάρους σε επιφάνεια: $G \cdot 1\text{m} \Rightarrow \text{N/m}^2$

Αναγωγή βάρους σε γραμμικό φορτίο:

$G \cdot a \cdot c \Rightarrow \text{N/m} \Rightarrow$ αναγόμενο ως προς την πλευρά b

Κεντροβαρικός άξονας ονομάζεται κάθε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο βάρους. **Όλα τα μεγέθη στον κεντροβαρικό άξονα είναι μηδέν.**



(β) Χρήση του κέντρου βάρους

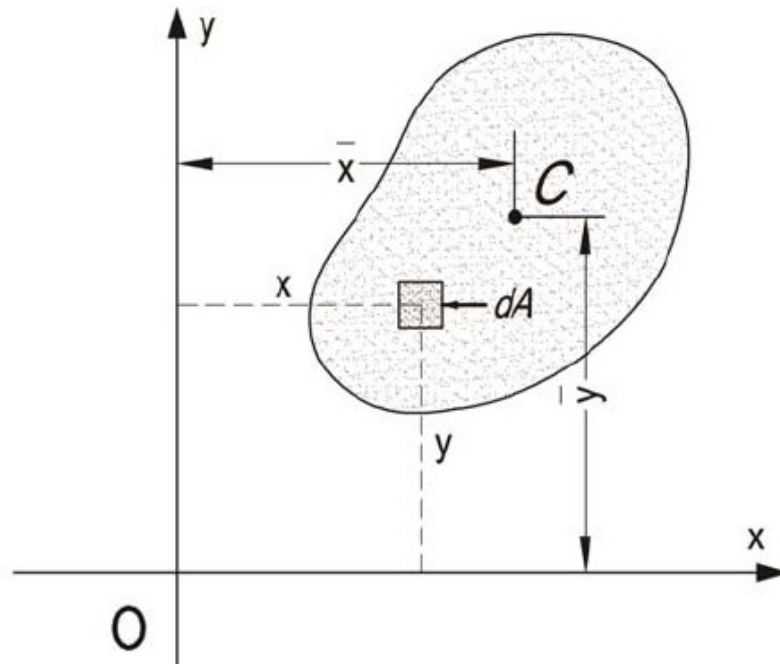
- για τον υπολογισμό της ισορροπίας ενός σώματος.
- για τον υπολογισμό του βαθμού καταπόνησης, μιας διατομής, ως προς την απόσταση από το κ.β.

(β) Υπολογισμός κέντρου βάρους

Γενικές εξισώσεις εύρεσης συντεταγμένων κ.β.

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

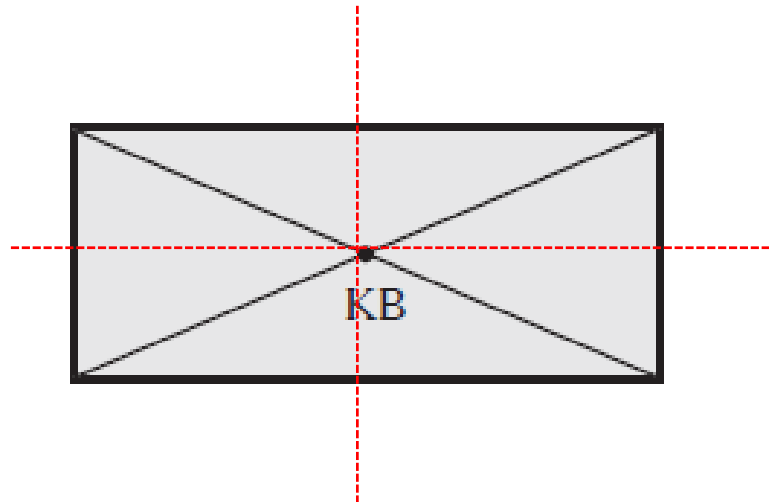


ως προς σύστημα αναφοράς X0Y

Γενικές ιδιότητες κ.β.

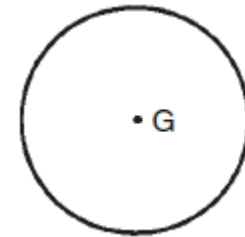
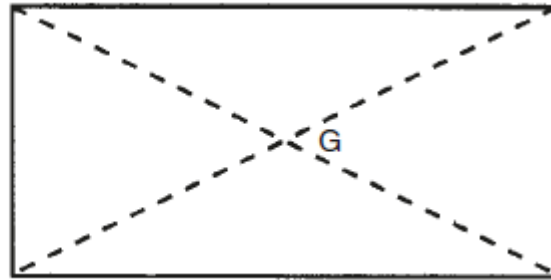
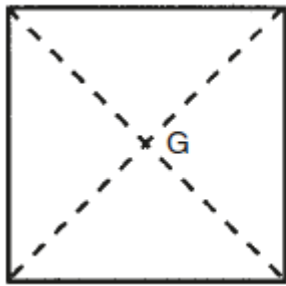
Όταν μια επίπεδη επιφάνεια έχει άξονα συμμετρίας, το κέντρο βάρους της βρίσκεται πάνω στον άξονα αυτό.

Όταν μια επιφάνεια έχει περισσότερες του ενός άξονες συμμετρίας, το κέντρο βάρους είναι η τομή των αξόνων αυτών.

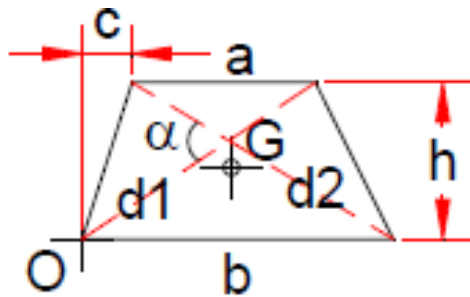


Για απλά σχήματα, το κέντρο βάρους είναι το γεωμετρικό κέντρο του σώματος [κεντροειδές γραμμής ή επιφάνειας], υπό την προϋπόθεση ότι το σώμα είναι ομογενές [έχει σταθερό πάχος και δεν παρουσιάζει κοιλότητες].

Παραδείγματα



Εύρεση κέντρου βάρους από πίνακες

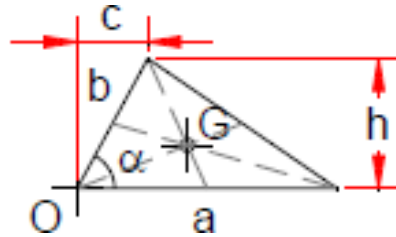


$$x_G = \frac{a^2 + b^2 + 2ac + ab + bc}{3(a + b)}$$

$$y_G = \frac{h(2a + b)}{3(a + b)}$$

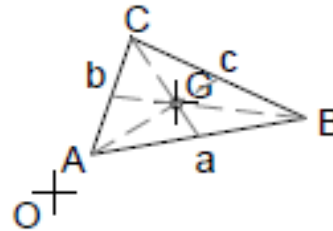
Εύρεση κέντρου βάρους από πίνακες [Παραδείγματα]

Οποιοδήποτε
τρίγωνο, ως προς
άξονα



$$x_G = \frac{a + c}{3}; y_G = \frac{h}{3}$$

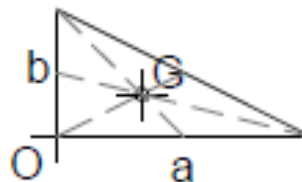
Οποιοδήποτε
τρίγωνο



$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Ορθογώνιο
τρίγωνο



$$x_G = \frac{a}{3}; y_G = \frac{b}{3}$$

Για σύνθετα ομογενή σχήματα, ο υπολογισμός των συντεταμένων του κέντρου βάρους γίνεται αναλυτικά ως ακολούθως:

(i) Εκλέγουμε ένα κεντρικό σύστημα συντεταγμένων XOY .

(ii) Χωρίζουμε το σύνθετο σχήμα σε απλά γνωστά σχήματα, των οποίων γνωρίζουμε τις συντεταγμένες του κ.β.

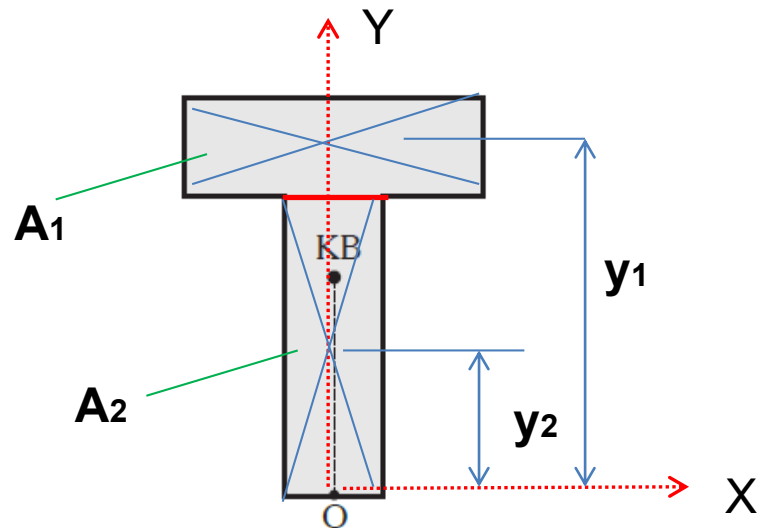
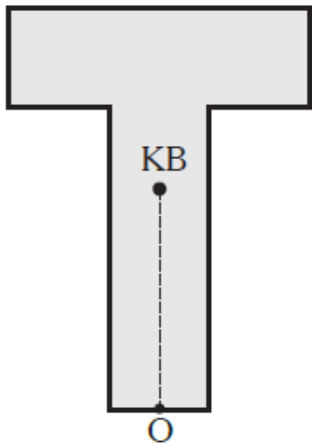
(iii) Υπολογίζουμε το εμβαδόν των σχημάτων, A_1, A_2, \dots

(iv) Προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες των απλών σχημάτων, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$, ως προς το θεωρούμενο σύστημα αναφοράς.

(v) Εφαρμόζουμε τις σχέσεις:

$$x_G = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots}, \quad y_G = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots}$$

Ο υπολογισμός για ευκολία μπορεί να πινακοποιηθεί



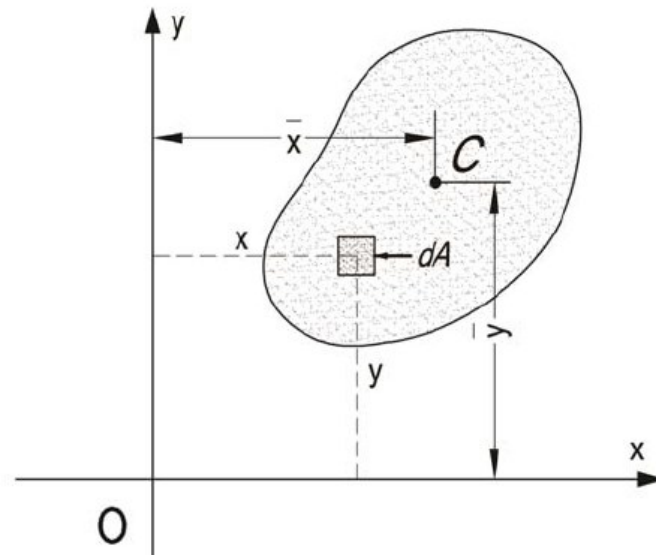
i	A_i [mm ²]	x_i [mm]	y_i [mm]	$x_i A_i$ [mm ³]	$y_i A_i$ [mm ³]
1					
2					
3					
...					
Σύνολα	ΣA_i			Σx_iA_i	Σy_iA_i

3. Στατική ροπή [πρωτοβάθμια ροπή επιφάνειας]

Στατική ροπή, S , [m^3], ονομάζεται το γινόμενο της επιφάνειας εμβαδού A ενός γεωμετρικού σχήματος επί την απόσταση από το κέντρο βάρους, (x,y) , ως προς τον θεωρούμενο άξονα.

$$dS_x = y * dA$$

$$dS_y = x * dA$$



Αποτελεί ένα δείκτη κατανομής του υλικού μιας διατομής ως προς το κέντρο βάρους. Στον κεντροβαρικό άξονα η στατική ροπή μηδενίζεται.

ως προς σύστημα αναφοράς XOY

4. Ροπή αδράνειας [δευτεροβάθμια ροπή επιφάνειας]

Ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Χ: $J_x = \int_A y^2 \cdot dA$

Ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Υ: $J_y = \int_A x^2 \cdot dA$

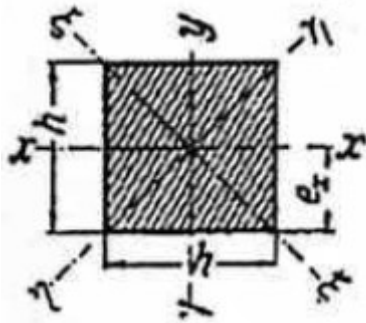
Οι αξονικές ροπές αδράνειας είναι πάντα θετικές, γενικά αναφέρονται ως προς τους κεντροβαρικούς άξονες και μετρώνται σε m^4 ή cm^4 ή mm^4 .

Η ροπή αδράνειας αναφέρεται στην αντίσταση ενός σώματος έναντι των μεταβολών της περιστροφικής κίνησης, υπό την δράση εξωτερικής δύναμης. **Όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας τόσο η διατομή διαθέτει μεγαλύτερη αντίσταση στην περιστροφή [π.χ. κάμψη].**

(α) Υπολογισμός ροπής αδράνειας απλών γεωμετρικών σχημάτων ως προς το κ.β

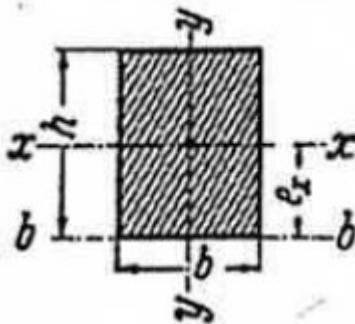
(i) Με χρήση ολοκληρωμάτων.

(ii) Για απλά σχήματα χρήση πινάκων.



$$J_x = J_y = \frac{h^4}{12}$$

$$J_\xi = J_\eta = \frac{h^4}{12}$$

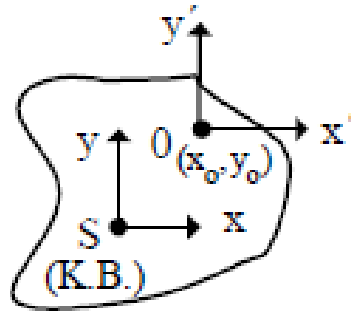


$$J_x = \frac{b h^3}{12}$$

$$J_y = \frac{h b^3}{12}$$

$$J_b = \frac{b h^3}{3}$$

(β) Υπολογισμός ροπής αδράνειας σύνθετων γεωμετρικών σχημάτων διατομών

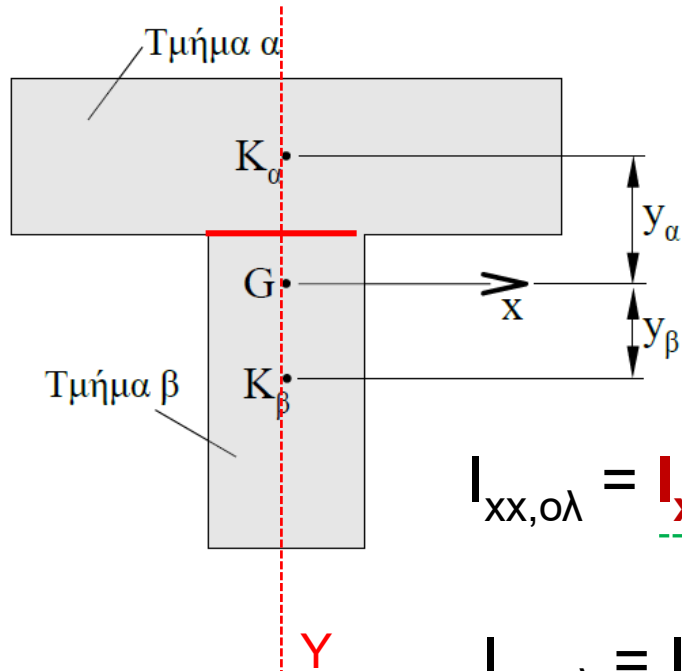


Η ροπή αδράνειας επίπεδης επιφάνειας ως προς άξονα του επιπέδου της είναι ίση με την ροπή αδράνειας της επιφανείας, ως προς τον κεντροβαρικό άξονα αυτής, προσαυξημένη με το γινόμενο του εμβαδού της επιφάνειας αυτής επί το τετράγωνο της απόστασης από τους θεωρούμενους άξονες, [θεώρημα Steiner].

$$I_{x'x'} = I_{xx} + y_0^2 A$$

$$I_{y'y'} = I_{yy} + x_0^2 A$$

Σχηματικό παράδειγμα



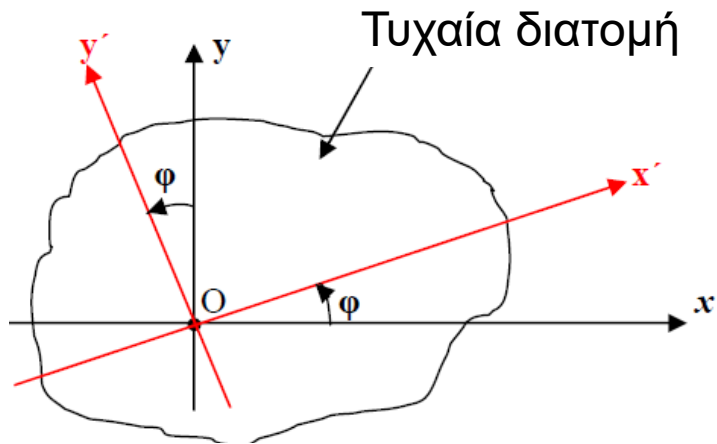
$$I_{xx,ολ} = \underbrace{I_{x,(α)} + y_a^2 * A_α}_{\text{Τμήμα α}} + \underbrace{I_{x,(β)} + y_β^2 * A_β}_{\text{Τμήμα β}}$$

$$I_{yy,ολ} = I_{y,(α)} + I_{y,(β)}$$

Γινόμενο ροπών αδράνειας ως προς τους άξονες X και Y

$$J_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

(γ) Στροφή συστήματος αξόνων



Η γωνία φ είναι θετική για φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού [αριστερόστροφη].

$$J_{x'} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\varphi - J_{xy} \cdot \eta\mu 2\varphi$$

$$J_{y'} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\varphi + J_{xy} \cdot \eta\mu 2\varphi$$

$$J_{x'y'} = \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \eta\mu 2\varphi + J_{xy} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\varphi$$

Από τον ορισμό της πολικής ροπής αδράνειας προκύπτει ότι από όλα τα συστήματα των κεντροβαρικών ορθογώνιων αξόνων θα υπάρχει ένα όπου η ροπή αδράνειας **θα είναι μέγιστη**, ως προς τον ένα άξονα, **και ελάχιστη**, ως προς τον έτερο άξονα.

Οι άξονες της μέγιστης [max], ισχυρός άξονα, και της ελάχιστης [min] ροπής αδράνειας, ασθενής άξονας, θα ονομάζονται κύριοι άξονες αδράνειας [J_1 , J_2], όπου $J_{12} = 0$.

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 \cdot J_{xy}^2}$$

J_1 , [J_{\max}] – Μέγιστη ροπή αδράνειας (+).

J_2 , [J_{\min}] – Ελάχιστη ροπή αδράνειας (-).

Προσδιορισμός θέσης-γωνίας των κυρίων αξόνων:

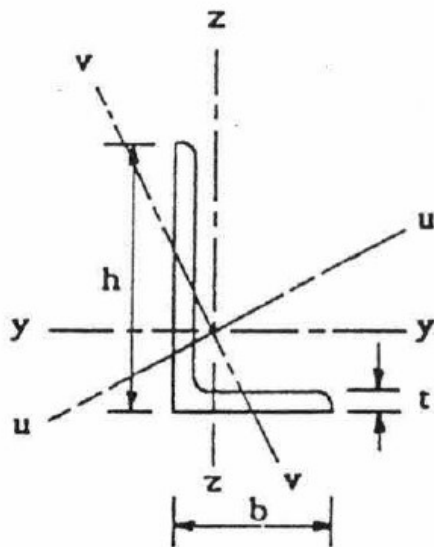
$$\varepsilon\varphi 2\varphi_o = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}$$

Οι ροπές αδράνειας, ως προς ένα σύστημα αξόνων που σχηματίζουν γωνία φ με τους κύριους άξονες αδράνειας υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$J_x = \frac{J_1 + J_2}{2} + \frac{J_1 - J_2}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\varphi$$

$$J_y = \frac{J_1 + J_2}{2} - \frac{J_1 - J_2}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\varphi$$

$$J_{xy} = \frac{J_1 - J_2}{2} \cdot \eta\mu 2\varphi$$



5. Ακτίνα αδράνειας

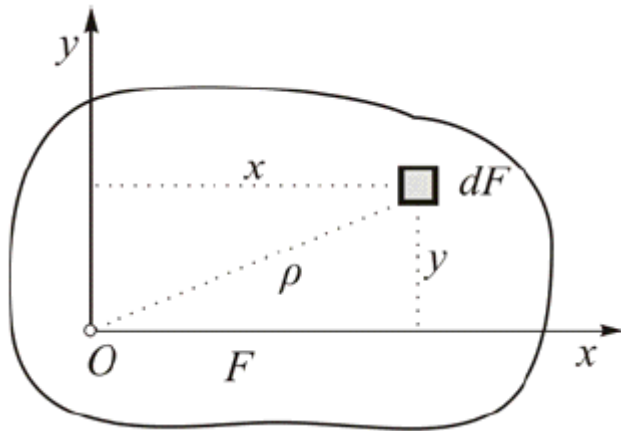
Η ακτίνα αδράνειας, ως προς άξονα, (x,y), ισούται με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου της ροπής αδράνειας, λαμβάνοντας υπόψη αντίστοιχα τον θεωρούμενο άξονα, I_x , I_y , προς το εμβαδόν, A , της επιφάνειας της διατομής.

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} \qquad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$$

Η ακτίνα αδράνειας είναι **πάντα θετική**, όπως και η ροπή αδράνειας, και έχει διαστάσεις μήκους, m ή cm, ή mm.

Η ακτίνα αδράνειας εκφράζει την απόσταση κατανομής του υλικού γύρω από τον κεντροβαρικό άξονα.

6. Πολική ροπή αδράνειας



$$J_P = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

$$J_P = J_x + J_y$$

Η πολική ροπή αδράνειας ισούται με το άθροισμα των ροπών αδράνειας, ως προς τους αντίστοιχους άξονες, και εκφράζει την ικανότητα μια διατομής να ανθίσταται σε μια στροφική κίνηση υπό την δράση ροπής [π.χ. στρέψη].

Είναι πάντα θετική και η μονάδα μέτρησης είναι όμοια με αυτή της ροπής αδράνειας. **Όσο μεγαλύτερη είναι η πολική ροπή τόσο μεγαλύτερη είναι η αντοχή της διατομής σε στρέψη.**

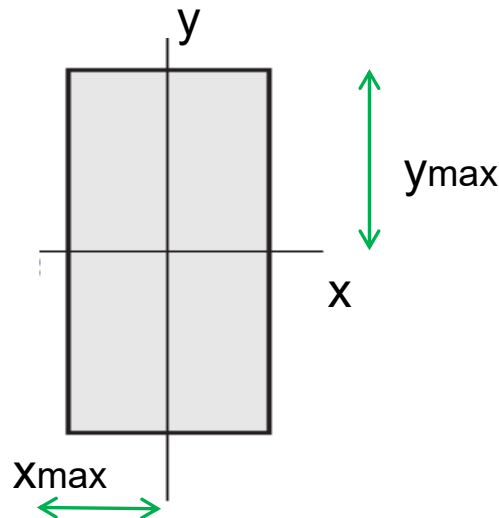
7. Ροπή αντίστασης

Η ροπή αντίστασης, W , ορίζεται από το πηλίκο της ροπής αδράνειας, προς τον αντίστοιχο άξονα, προς την μέγιστη απόσταση μεταξύ του κ.β. και της ακραίας ίνα της διατομής. Στην θέση αυτή λαμβάνει και την μέγιστη τιμή, W_{max} .

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{max}}$$

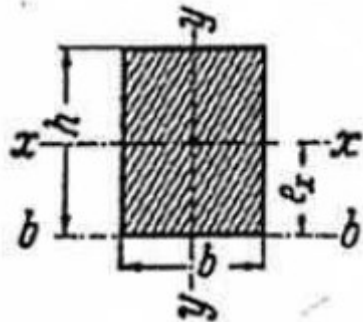
Η ροπή αντίστασης εκφράζει την ικανότητα της διατομής να ανθίσταται σε κάμψη.



Μονάδα μέτρησης της ροπή αντίστασης, $[m^3]$.

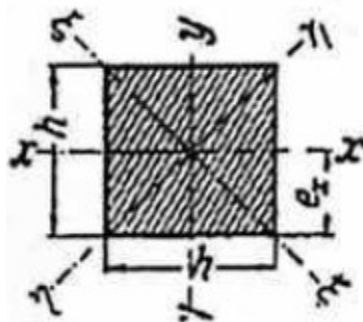
Για τυπικά σχήματα γίνεται χρήση πινάκων.

Παράδειγμα:



$$W_x = \frac{b h^2}{6}$$

$$W_y = \frac{h b^2}{6}$$



$$W_x = W_y = \frac{h^3}{6}$$

$$W_{\xi} = W_{\eta} = \frac{\sqrt{2}}{12} h^3 \approx 0,1178 h^3$$

Περισσότερα παράδειγμα:

https://en.wikipedia.org/wiki/Section_modulus

8. Πολική ροπή αντίστασης

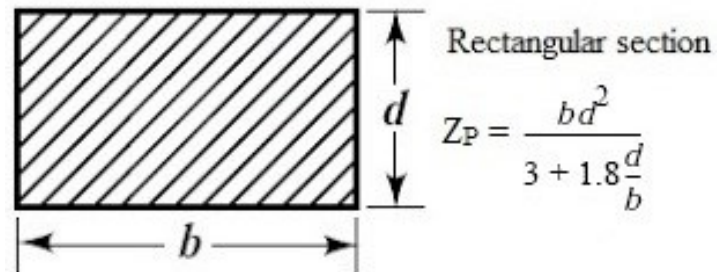
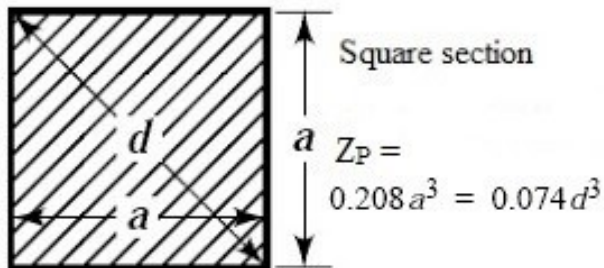
Η πολική ροπή αντίστασης, W_o , ισούται με το πηλίκο της πολικής ροπής αδράνειας προς την ακραία απόσταση, και εξαρτάται άμεσα από την απόσταση αυτή.

$$W_o = \frac{I_o}{d_{max}}$$

Μονάδα μέτρησης της πολικής ροπής αντίστασης, $[m^3]$.

Η ροπή αντίστασης εκφράζει την ικανότητα της διατομής ανθίσταται σε στρέψη.

Για τυπικά σχήματα γίνεται χρήση πινάκων.



Σημείωμα Αναφοράς σε έργα Τρίτων

Βιβλιογραφία

1. Beer F., Johnston E.R., Mazurek D.: Τεχνική Μηχανική-Στατική. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 11^η 2019, [κωδ. Εύδοξος 59421317].
2. Gere J., Goodno B.: Αντοχή Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 9^η 2021, [κωδ. Εύδοξος 86055253].
3. Nash W.: Στατική και Μηχανική των Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 1^η 2002, [κωδ. Εύδοξος 18549012].
4. Π.Α. Βουθούνης: Τεχνική Μηχανική. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 10^η 2019, [ISBN 978-618-83280-4-4].
5. F.P. Beer, E.R. Johnston Jr., J.T. Wolf, D.F. Mazuerk: Μηχανική των Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 2012-2019. [ISBN: 978-960-418-381-4]. Ελληνική μετάφραση.
6. Π.Α. Βουθούνης: Στατική-Μηχανική του απαραμόρφωτου στερεού. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 6^η 2017, [ISBN 978-618-83280-1-3].
7. Π.Α. Βουθούνης: Αντοχή των Υλικών-Μηχανική του παραμορφώσιμου στερεού. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 4^η 2019, [ISBN 978-618-83280-3-7].
8. Μ. Ματσιοκούδη-Ηλιοπούλου: Τεχνική Μηχανική: Αρχές Στατικής και Εισαγωγή στην Θεωρία των Παραμορφώσιμων Σωμάτων. Εκδόσεις Ζυγός. Έκδοση 1991/2016. [ISBN13: 97896080652533], [κωδ. Εύδοξος 1753].
9. Γ. Γκρός. Μηχανική. Τόμος Α. Ευγενείδιο Ίδρυμα, 1976.

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

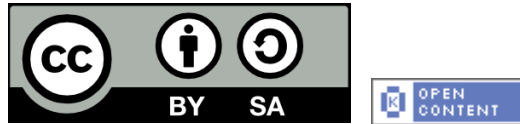
Άνθιμος Σ. Αναστασιάδης. «Τεχνική Μηχανική: Στατική και Αντοχή Υλικών». Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Πολυτεχνική Σχολή. Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων & Συστημάτων. Έκδοση 4^η, Κοζάνη, 2024.

Διαθέσιμο από την διαδικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.uowm.gr/courses/MRE250/>

Σημείωμα αδειοδότησης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [<https://creativecommons.org/>] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να περιλαμβάνει τα παρακάτω:

- ❖ Σημείωμα Αναφοράς
- ❖ Σημείωμα Αδειοδότησης
- ❖ Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ❖ Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει), μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Γεωμετρικά χαρακτηριστικά διατομής Κέντρο Βάρους – Ροπές αδράνειας

