



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων & Συστημάτων



Τεχνική Μηχανική

Μέρος Α-Στατική

Ισοστατικοί επίπεδοι γραμμικοί φορείς

Άνθιμος Σ. ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗΣ

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, Eurlng

1. Εισαγωγή

Φορέας είναι κάθε κατασκευή που φέρει και παραλαμβάνει τα εξωτερικά φορτία τα οποία μεταφέρει με ασφάλεια στις στηρίξεις, εξασφαλίζοντας την γενική ισορροπία.

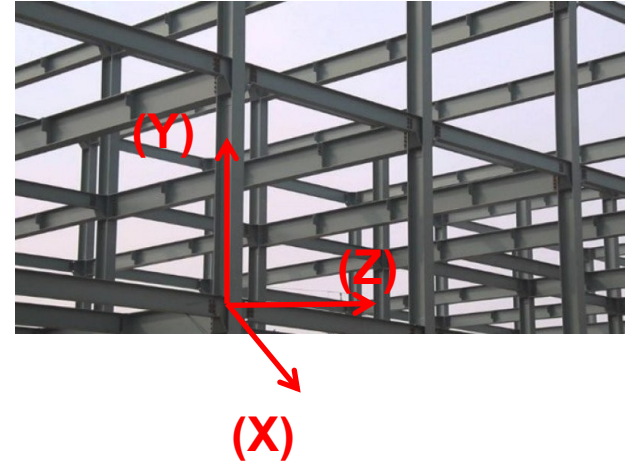
Γενική ταξινόμηση φορέων:

- Γραμμικοί φορείς
- Επιφανειακοί φορείς
- Φορείς στον χώρο

Γραμμικοί Φορείς

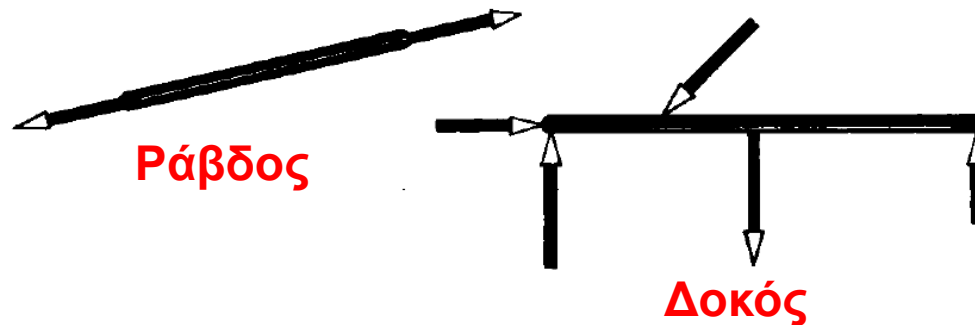
Ανάλογα με την χωροθέτηση τους:

- Επίπεδοι [σε δύο διαστάσεις X, Y].
- Στον χώρο [σε τρεις διαστάσεις X, Y, Z].

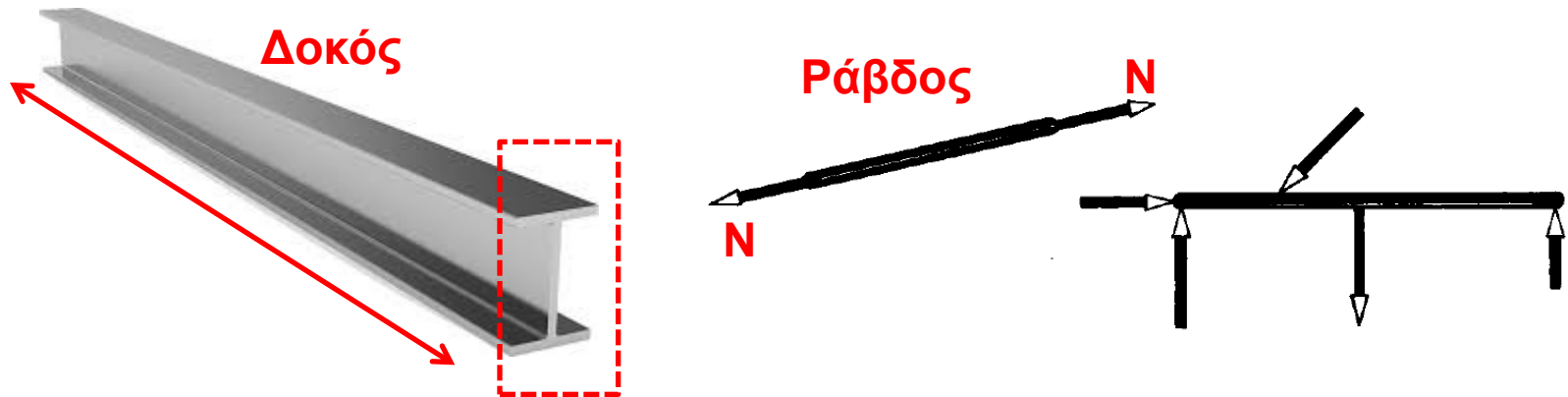


Ανάλογα με την καταπόνηση τους:

- Ράβδοι.
- Δοκοί.



Οι **ράβδοι** και οι **δοκοί** έχουν πολύ μεγάλο μήκος αναφορικά με τις υπόλοιπες διαστάσεις (ύψος και πλάτος που είναι η διαστάσεις της διατομής).

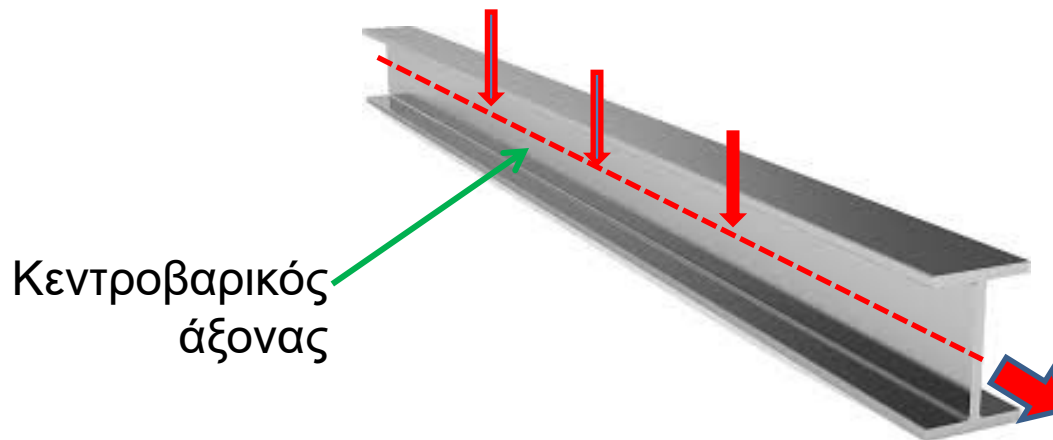


Η διαφορά μεταξύ των ράβδων και των δοκών είναι ότι οι ράβδοι παραλαμβάνουν μόνο αξονικές δυνάμεις, [εφελκυστική ή θλιπτική δύναμη], ενώ οι δοκοί αναλαμβάνουν επιπρόσθετα και δυνάμεις κάθετες στον άξονα τους [καταπονούμενες σε κάμψη].

2. Ισοστατική δοκός

Ορισμός

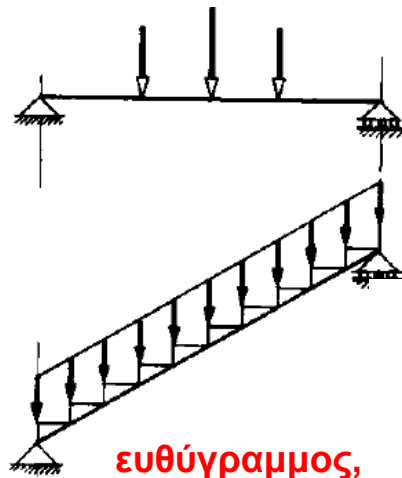
Δοκός είναι ο φορέας ο οποίος αναλαμβάνει δυνάμεις κάθετες στον άξονα του, καθώς επίσης και δυνάμεις παράλληλες στον άξονα του καταπονούμενος σε κάμψη και θλίψη ή εφελκυσμό.



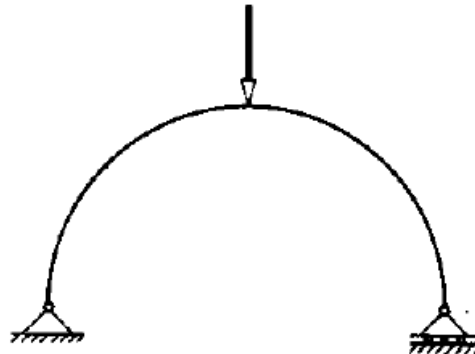
Ισοστατική δοκός είναι αυτή η οποία ο αριθμός των αγνώστων είναι ίσος με τον αριθμό των εξισώσεων ισορροπίας.

Γεωμετρία

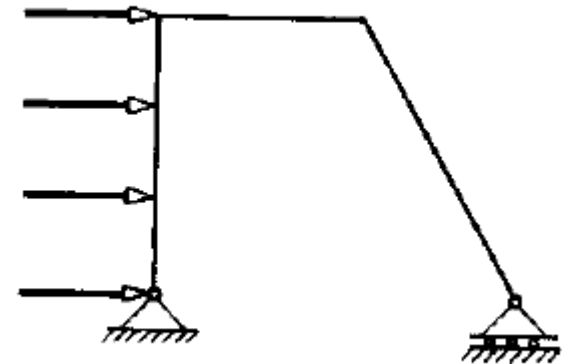
Ο άξονας της δοκού μπορεί να είναι ευθύγραμμος, οριζόντιος, κεκλιμένος, καμπυλόγραμμος ή πολυγωνικός [και συνδυασμός των ανωτέρω βασικών γεωμετρικών μορφών]



ευθύγραμμος,
κεκλιμένος άξονας



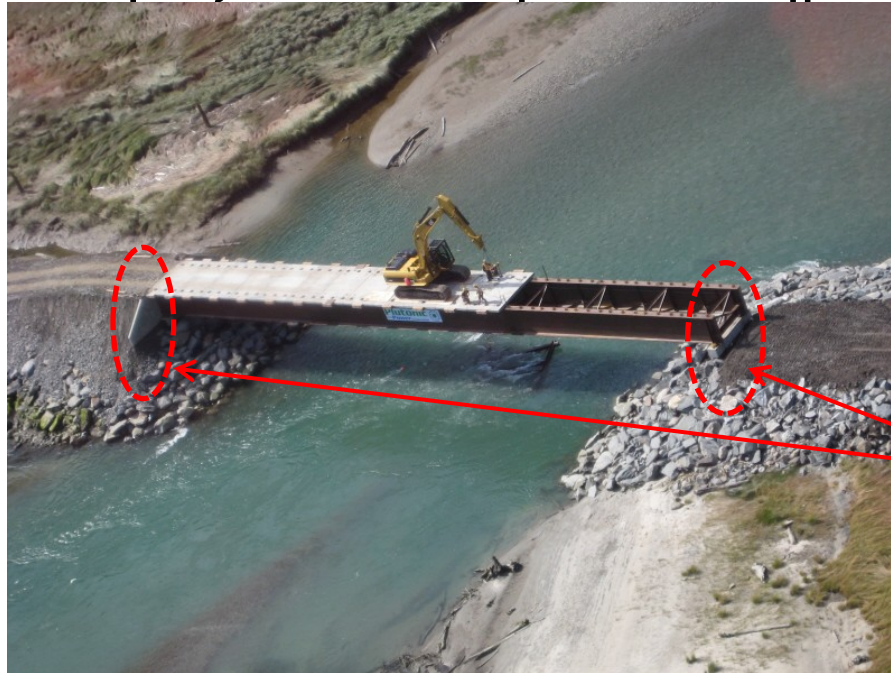
καμπυλόγραμμος
[τόξο]



πολυγωνικός
[πλαίσιο]

Στηρίξεις

Η δοκός δεν πρέπει να μετακινείται στο επίπεδο της [π.χ. για επίπεδους φορείς εντός του επιπέδου X,Y], και πρέπει να εδράζεται σταθερά στα σημεία στήριξης.



σημεία στήριξης

Ένα σώμα στο επίπεδο, **X,Y** ,
έχει **3 βαθμούς ελευθερίας**
2 μετακινήσεις και μια στροφή

Η στηρίξεις, ανάλογα με το επιθυμητό στατικό σύστημα, διαμορφώνονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε **να επιτρέπουν ή να μην επιτρέπουν:**

- Την κατακόρυφη μετακίνηση, $[X]$.
- Την οριζόντια μετάθεση, $[Y]$.
- Την στροφή περί τον άξονα της δοκού $[X, Y]$.

(α) Απλή στήριξη ή κύλιση:

Δεσμεύει μόνο την κατακόρυφη μετακίνηση.

(β) Σταθερή στήριξη ή άρθρωση:

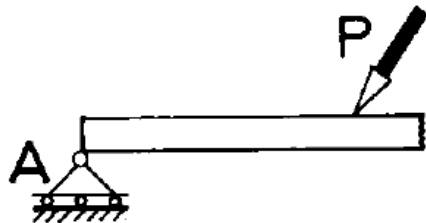
Δεσμεύει την κατακόρυφη μετακίνηση και την οριζόντια μετάθεση.

(γ) Πάκτωση:

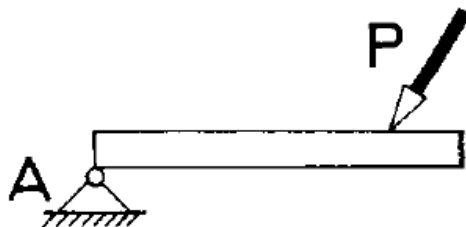
Δεσμεύει την κατακόρυφη μετακίνηση και την οριζόντια μετάθεση καθώς και την στροφή

Στατικό σύστημα

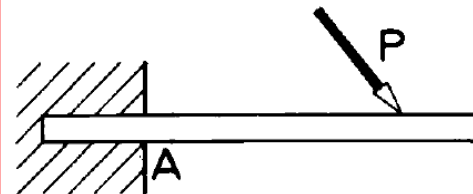
Απλή στήριξη



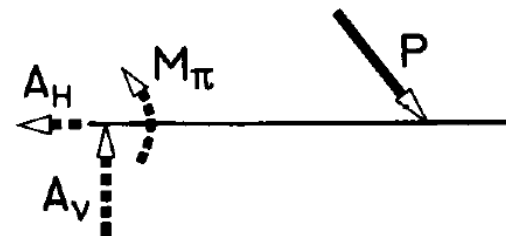
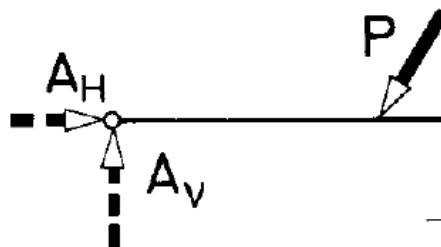
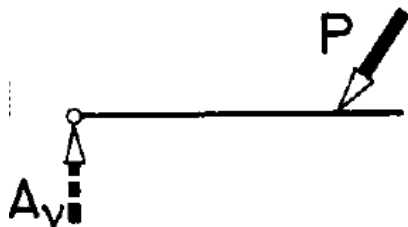
Σταθερή στήριξη



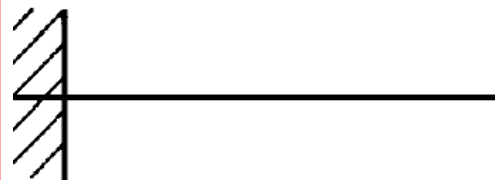
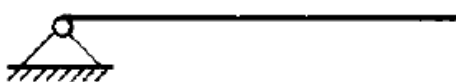
Πάκτωση



Αντιδράσεις



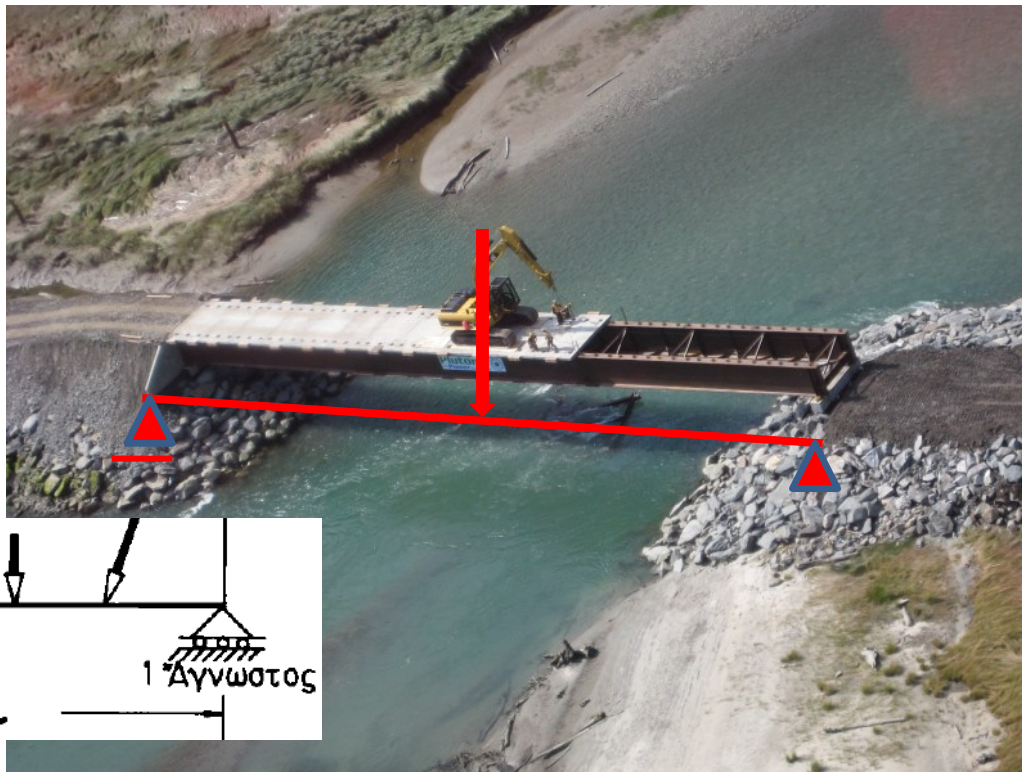
Συμβολισμός



Βασική τυπολογία δοκών

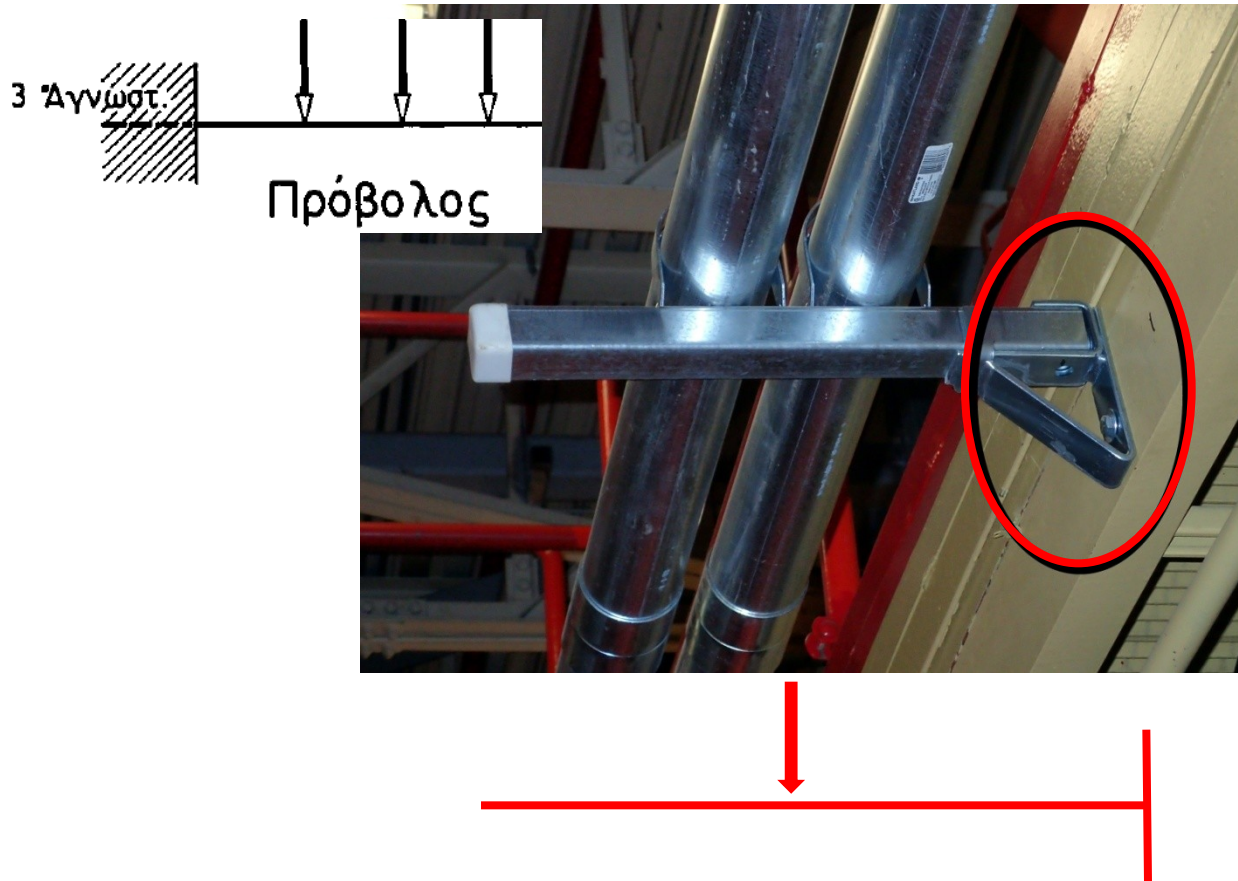
Αμφιέρειστη δοκός.

Έχει μια κινητή στήριξη [κύλιση και μία σταθερή στήριξη [άρθρωση].



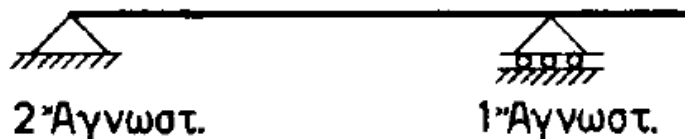
Πρόβολος.

Έχει πακτωμένη την μια άκρη και ελεύθερη την άλλη.



Προέχουσες δοκοί.

Αμφιεριστοι δοκοί που προέχουν υπό μορφή προβόλου στην μία πλευρά-άκρο [**μονοπροέχουσα**] και σε αμφότερες τις πλευρές-άκρα [**αμφιπροέχουσα**].



Μονοπροέχουσα



Αμφιπροέχουσα



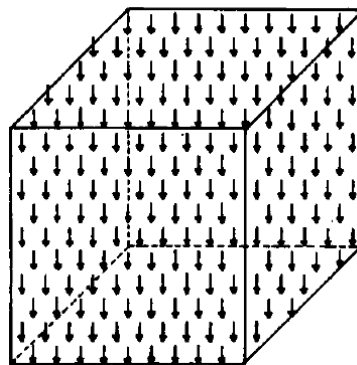
Σχηματική διαμόρφωση
πραγματικής κατασκευής

3. Εξωτερικές φορτίσεις-φορτία δοκών

Εξωτερικές φορτίσεις

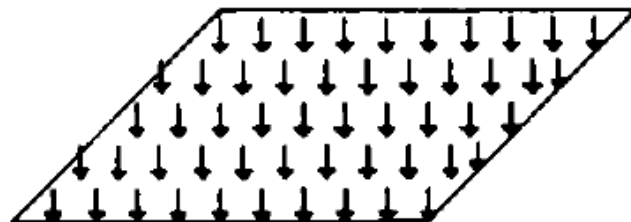
(α) Φορτία κατανεμημένα στον χώρο, KN/m^3

π.χ ειδικός βάρος οπλισμένου σκυροδέματος 25 KN/m^3



(β) Φορτία κατανεμημένα στην επιφάνεια, KN/m^2

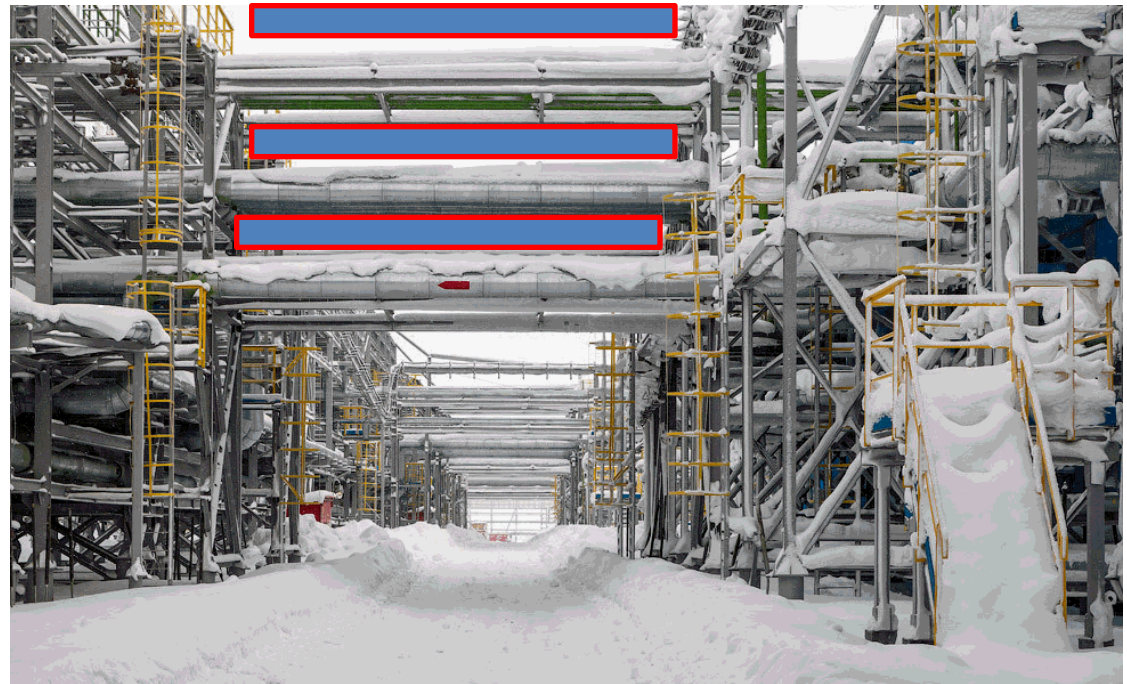
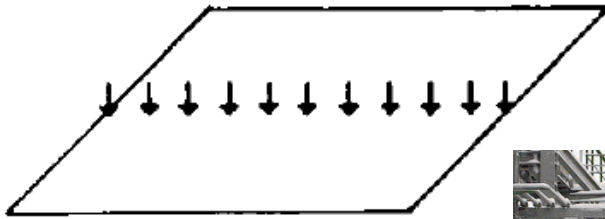
π.χ φορτίο χιονιού, ανέμου, μηχανημάτων, ανθρώπων.



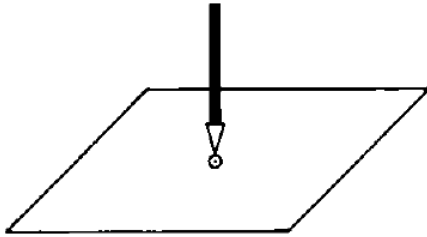


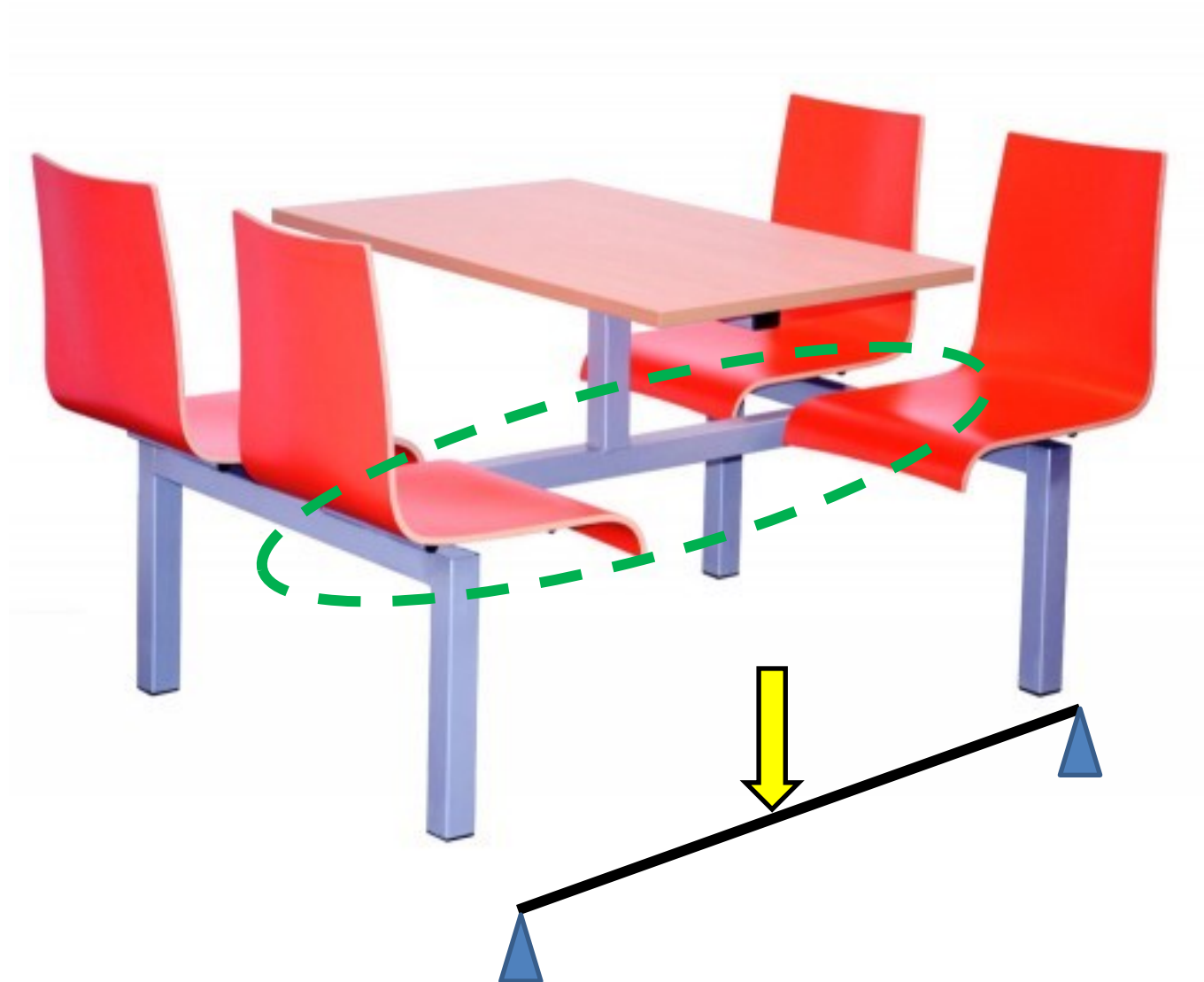
Φορτία κατανεμημένα στην επιφάνεια

(γ) Φορτία γραμμικώς κατανεμημένα, KN/m
π.χ φορτίο χιονιού, ανέμου, μηχανημάτων, ανθρώπων.

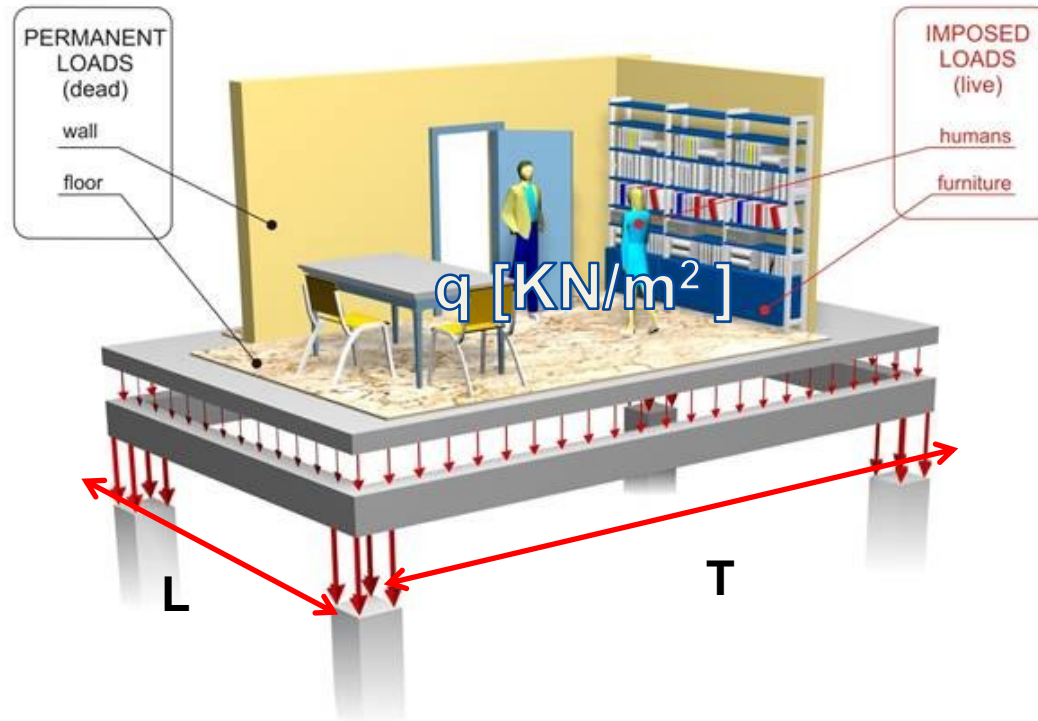


(δ) Φορτία συγκεντρωμένα, KN

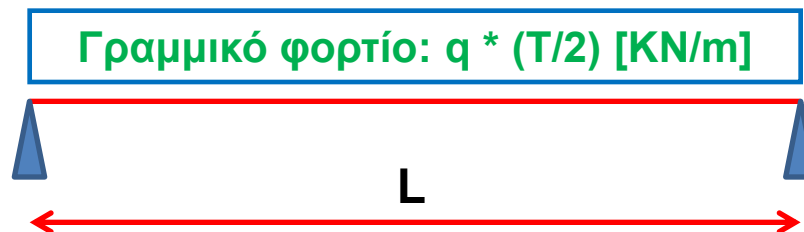




Αναγωγή φορτίων

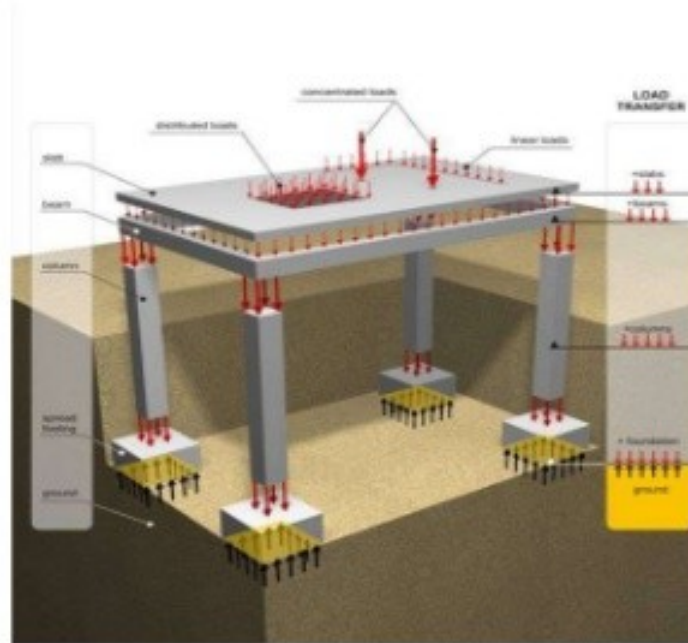
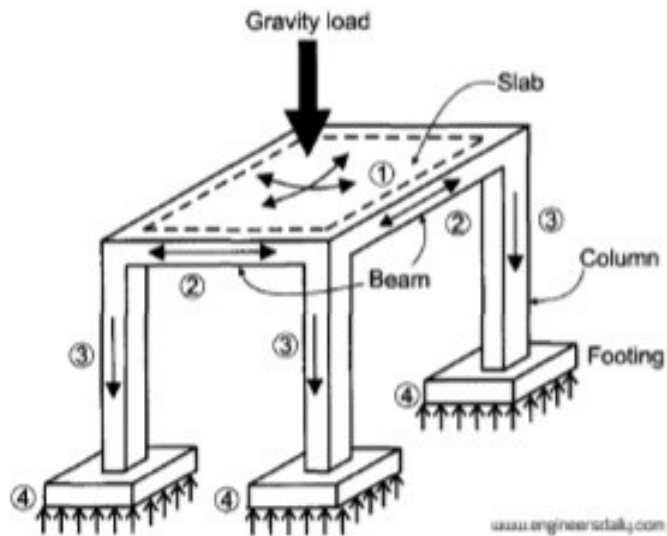


Φορτία καταμεμημένα στην επιφάνεια, KN/m²



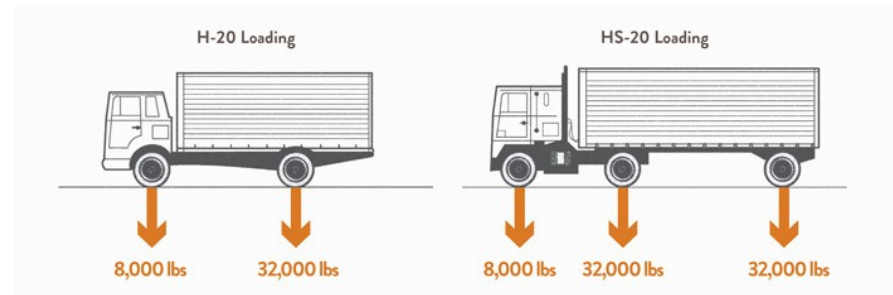
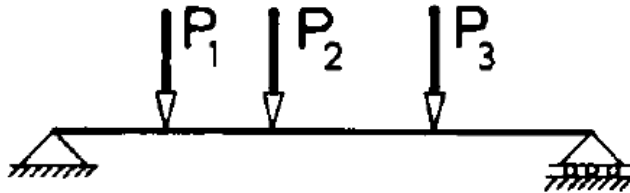
Κατανομή φορτίων

Load Transfer

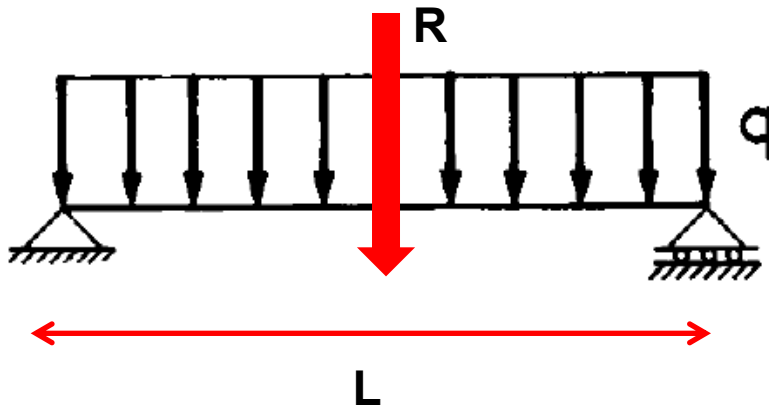


Φορτία δοκών

(α) Συγκεντρωμένα φορτία



(β) Ομοιόμορφα καταμεμημένα φορτία

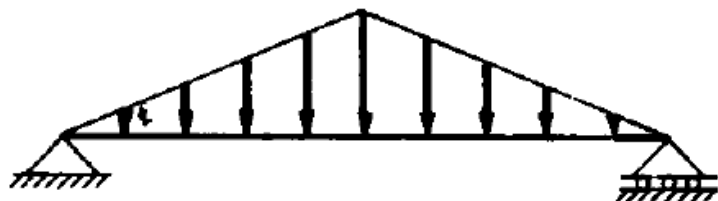


$$R = q \cdot L \text{ [KN]}$$

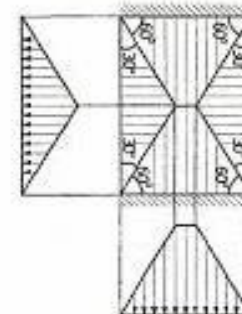
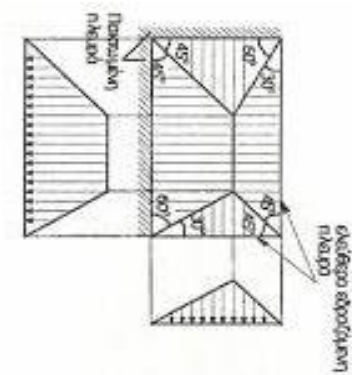
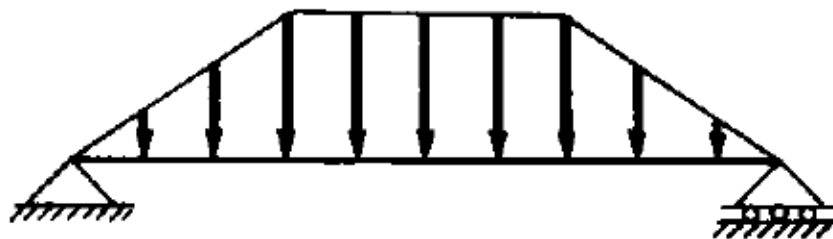


Πηγή σχημάτων: Γ. Γκρός. Μηχανική-Στατική. Ευγενίδιο Ίδρυμα, 1976

(γ) Τριγωνικά κατανεμημένα φορτία

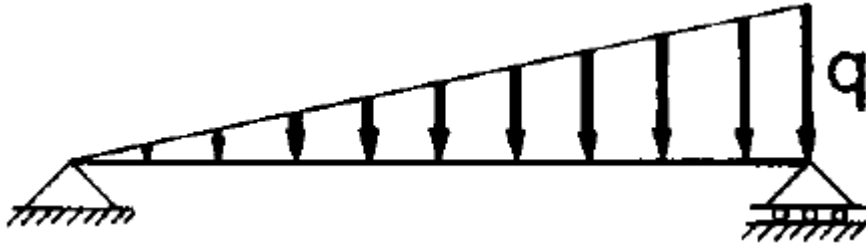


(δ) Τραπεζοειδή κατανεμημένα φορτία



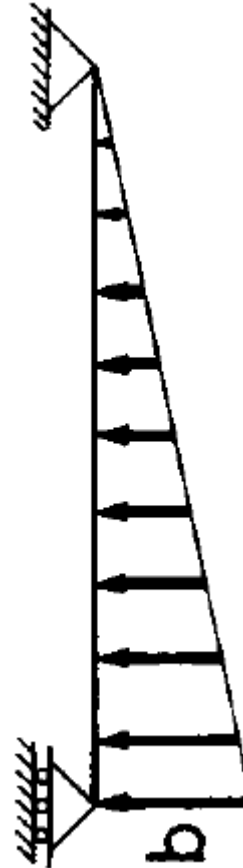
Κατανομή φορτίων σε πλάκες,
συνδυασμένες φορτίσεις
ωθήσεων γαιών, υγρών

(ε) Ασύμμετρα τριγωνικά κατανεμημένα φορτία



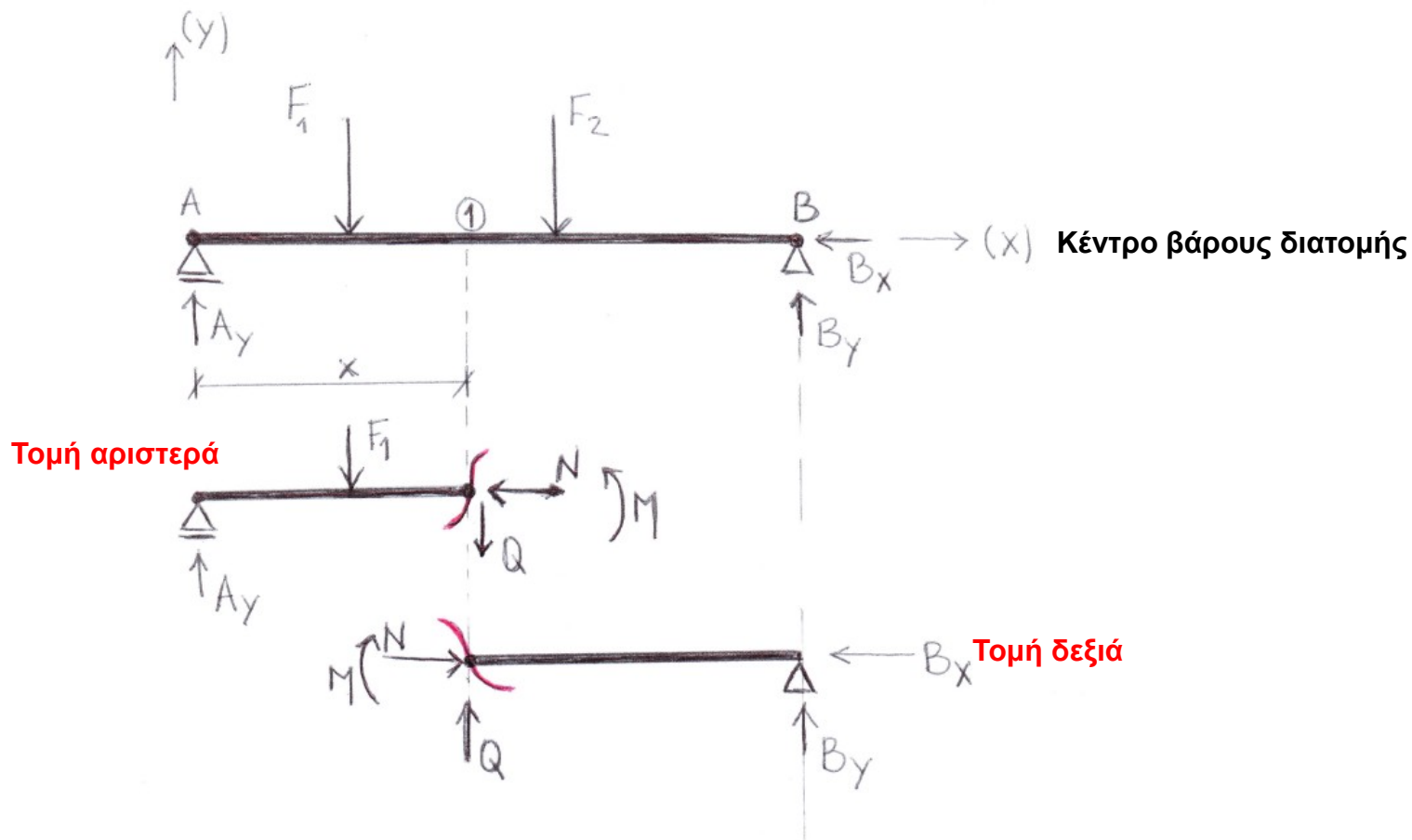
Ωθήσεις γαιών σε τοίχους
αντιστήριξης, δεξαμενές

Ωθήσεις οποιουδήποτε υγρού
σε δεξαμενές



4. Εσωτερικές φορτίσεις [δυνάμεις καταπόνησης και ροπές]

Ένα σύστημα, [δοκός] ισορροπεί υπό την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων και των αντιδράσεων



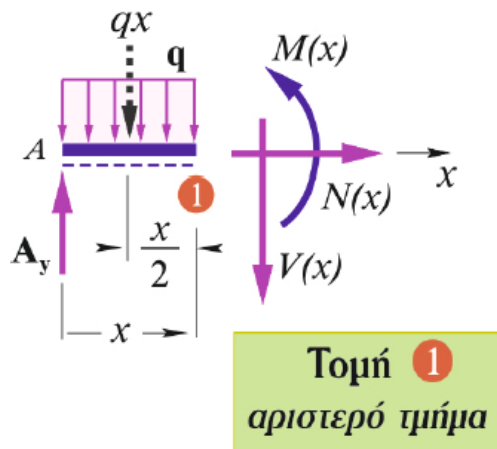
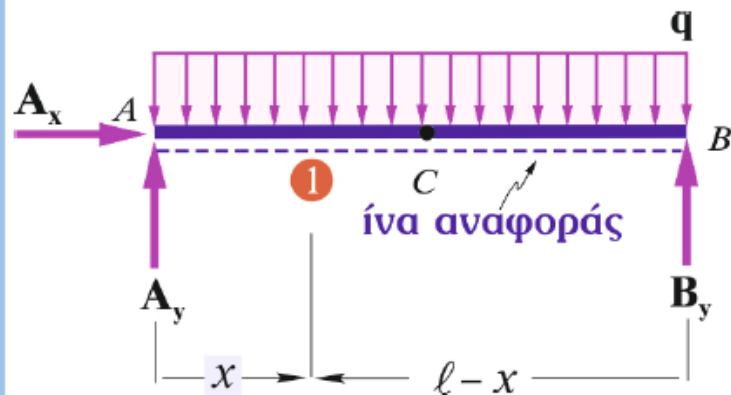
Εντός της δοκού, υπό την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων και των αντιδράσεων προκειμένου να ισορροπήσει η δοκός, αναπτύσσονται εσωτερικές δυνάμεις καταπόνησης που ονομάζονται **φορτία διατομής ή εντατικά μεγέθη**.

Η εντατική κατάσταση που αναπτύσσεται στο εσωτερικό της δοκού περιγράφεται με τα φορτία διατομής τα οποία είναι:

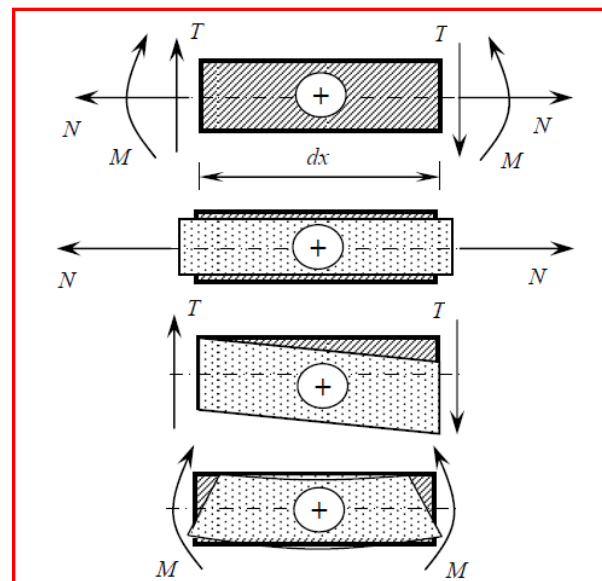
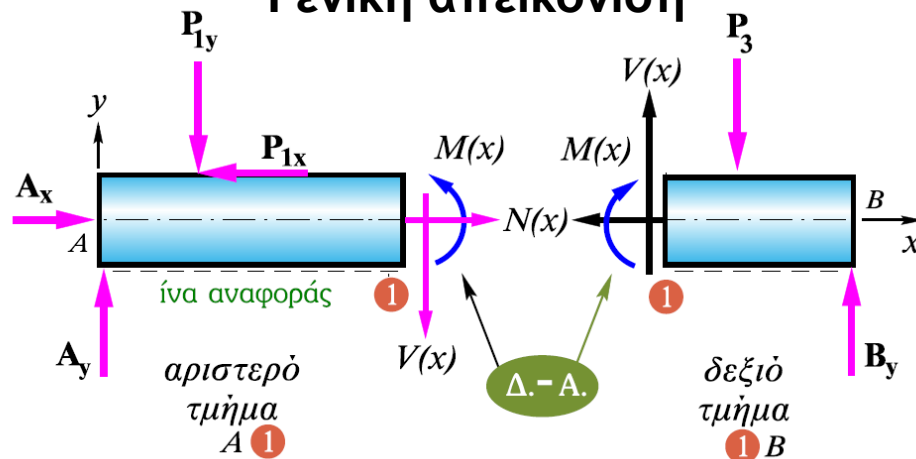
- Ορθή δύναμη- Αξονική καταπόνηση, **N**.
- Τέμνουσα δύναμη - Διατμητική καταπόνηση, **Q [ή V]**.
- Ροπή κάμψης, **M**.

Οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται σε κάθε πλευρά της τομής έχουν το ίδιο μέγεθος αλλά αντίθετη διεύθυνση, έτσι ώστε σε κάθε σημείο να υπάρχει ισορροπία. Η εύρεση τους βασίζεται στις συνθήκες ισορροπίας **$\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma M=0$**

Παράδειγμα



Μέθοδος τομών Γενική απεικόνιση



(α) Ορθή δύναμη-αξονική καταπόνηση μιας διατομής, N .

Προσδιορίζεται από το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται παράλληλα στον άξονα της δοκού, αριστερά ή δεξιά της εξεταζόμενης διατομής. Θεωρείται θετική όταν εφελκύει την διατομή και αρνητική όταν την θλίβει.

(β) Τέμνουσα δύναμη-διατμητική καταπόνηση μιας διατομής, Q [ή V].

Προσδιορίζεται από το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται κάθετα στον άξονα της δοκού, αριστερά ή δεξιά της εξεταζόμενης διατομής. Θεωρείται θετική όταν στα αριστερά της διατομής έχει κατεύθυνση προς τα πάνω και στα δεξιά της διατομή προς τα κάτω.

Προσδιορίζεται από το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών που ασκούνται, αριστερά ή δεξιά της εξεταζόμενης διατομής, ως προς το κέντρο βάρους-σημείο αναφοράς. Θεωρείται θετική όταν εφελκύει την κάτω ίνα και θλίβει την άνω ίνα.

The diagram illustrates the internal force distributions in a beam with a central point load Q and two moments M . The beam is divided into three sections by two vertical dashed red lines, labeled "Τομή αριστερά" (Left cut) and "Τομή δεξιά" (Right cut).

Left Section (Left of first cut): Shows a normal force N^+ (tension), a shear force Q^+ (downward), and a bending moment M^+ (counter-clockwise).

Middle Section (Between cuts): Shows a normal force N^+ (tension), a shear force Q^+ (upward), and a bending moment M^+ (clockwise).

Right Section (Right of second cut): Shows a normal force N^+ (tension), a shear force Q^+ (downward), and a bending moment M^+ (counter-clockwise).

Detail View (Top Right): A small diagram of a beam element at the point load. It shows a normal force N (tension), a shear force Q (downward), and a bending moment M (clockwise). A coordinate system with x and y axes is also shown.

Γενική πορεία επίλυσης στατικού προβλήματος

(1) Προσδιορισμός εξωτερικών φορτίσεων.

(2) Επιλογή στατικού συστήματος.

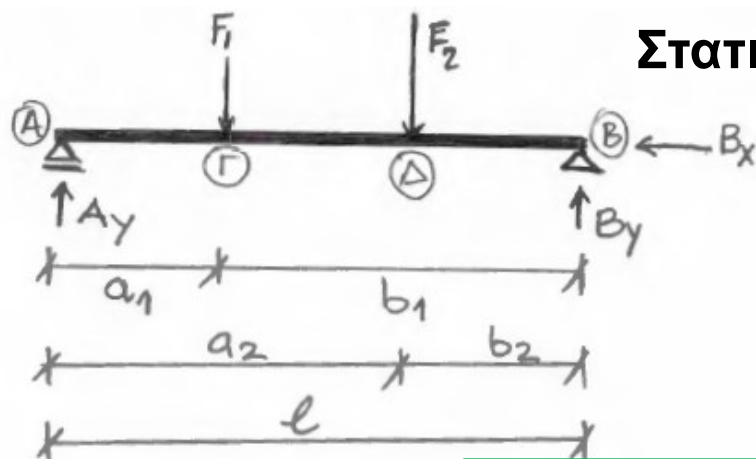
(3) Προσομείωση στατικού συστήματος.

(4) Προσδιορισμός αντιδράσεων.

(5) Υπολογισμός φορτίων διατομής.

(6) Χάραξη διαγραμμάτων N , Q , M

Παράδειγμα υπολογισμού φορτίων διατομής



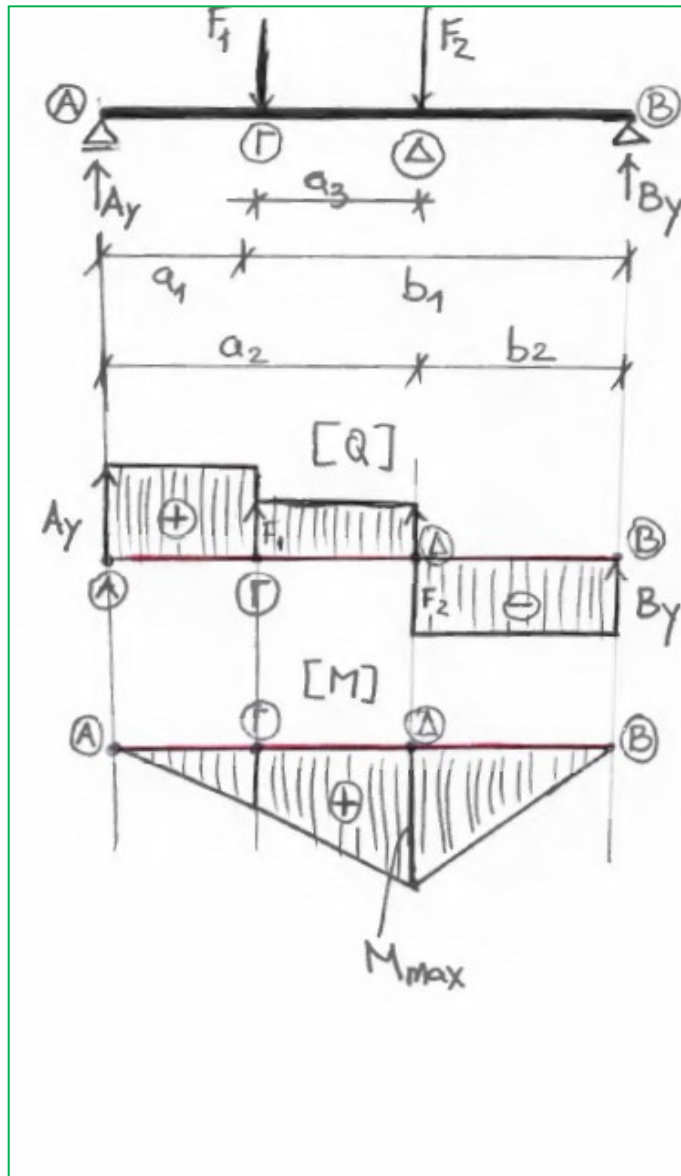
Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\begin{aligned}\uparrow \sum M_A = 0 &\Rightarrow F_1 a_1 + F_2 a_2 - B_y (a_2 + b_2) = 0 \\ \Rightarrow B_y &= \frac{F_1 a_1 + F_2 a_2}{(a_2 + b_2)}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\begin{aligned}\uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow -A_y - B_y + F_1 + F_2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow A_y &= F_1 + F_2 - \left(\frac{F_1 a_1 + F_2 a_2}{a_2 + b_2} \right)\end{aligned}$$

Χάραξη διαγραμμάτων



Διάγραμμα τεμνουσών

$$\textcircled{A} \rightarrow A_y$$

$$A\Gamma \rightarrow A_y - F_1$$

$$A\Delta \rightarrow A_y - F_1 - F_2$$

$$AB \rightarrow A_y - F_1 - F_2 + B_y$$

$$\textcircled{B} \quad (\sum F_y = 0)$$

Διάγραμμα ροπών

$$\textcircled{A} \rightarrow M_A = 0$$

$$A\Gamma \rightarrow M_\Gamma = A_y a_1$$

$$A\Delta \rightarrow M_\Delta = A_y a_2 - F_1 a_3 = B_y b_2$$

$$M_{\Delta(max)} = B_y b_2$$

$$\textcircled{B} \rightarrow M_B = 0$$

5. Χάραξη διαγραμμάτων N, Q, M .

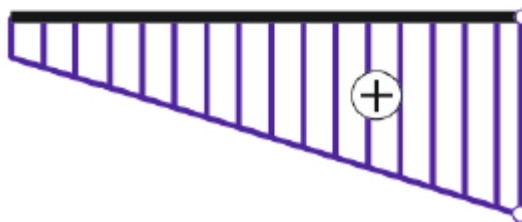
(1) Σε αφόρτιστα τμήματα η τέμνουσα είναι σταθερή και η ροπή μεταβάλλεται γραμμικά.



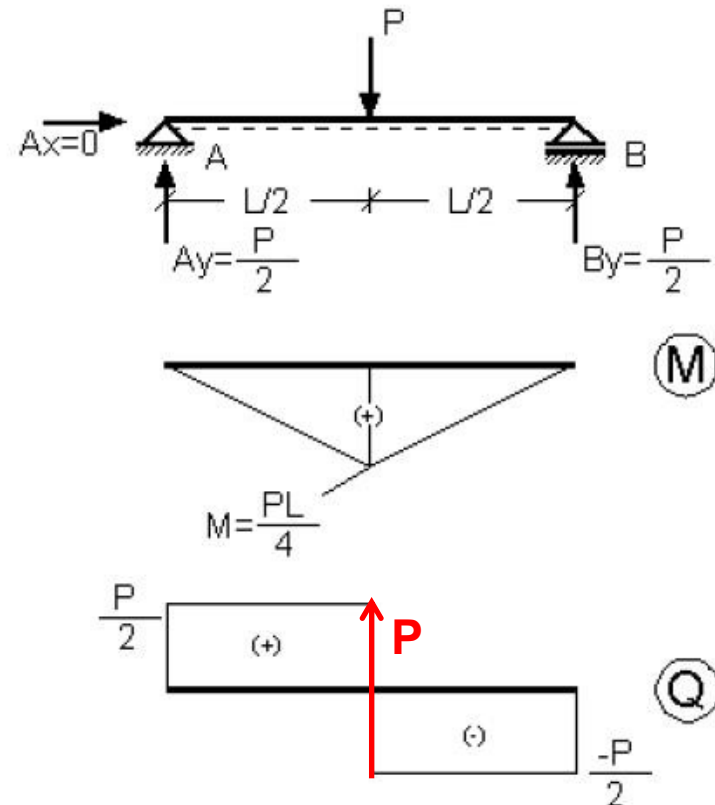
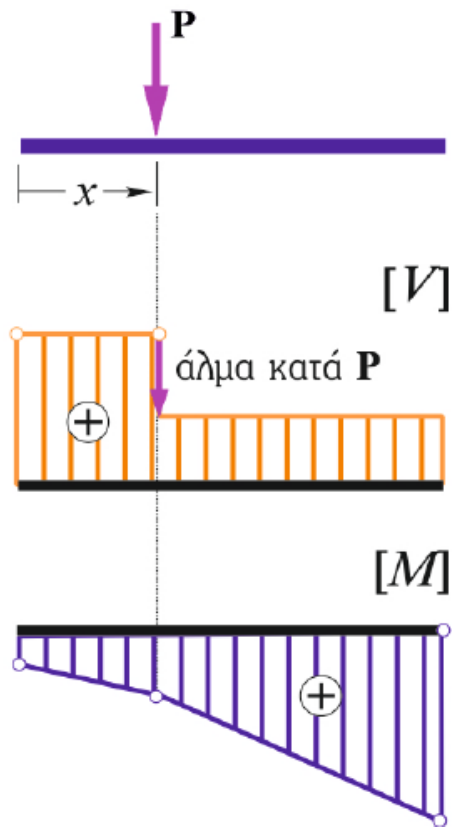
$[V]$



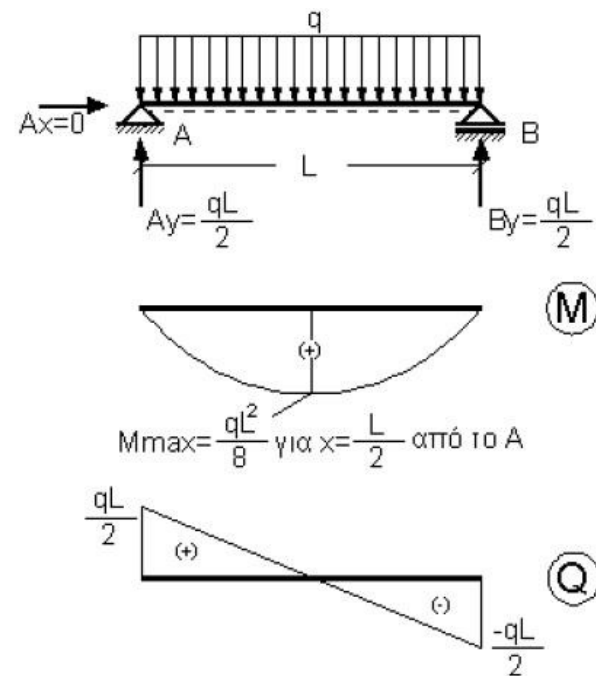
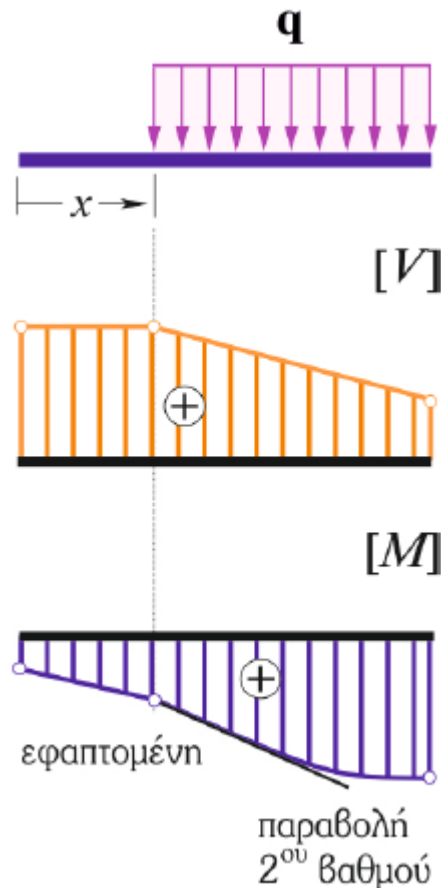
$[M]$



(2) Σε σημεία μοναχικών δυνάμεων, κάθετα στον άξονα της δοκού, το διάγραμμα τεμνουσών παρουσιάζει άλμα, κατ'απόλυτη τιμή ίση με την δύναμη, ενώ το διάγραμμα ροπής παρουσιάζει αλλαγή κλίσης.

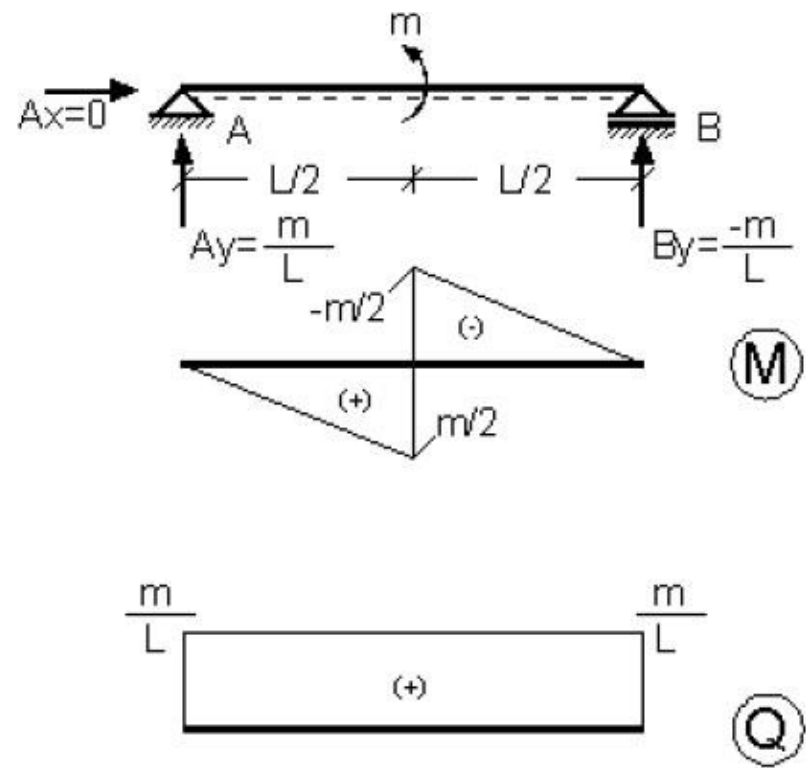
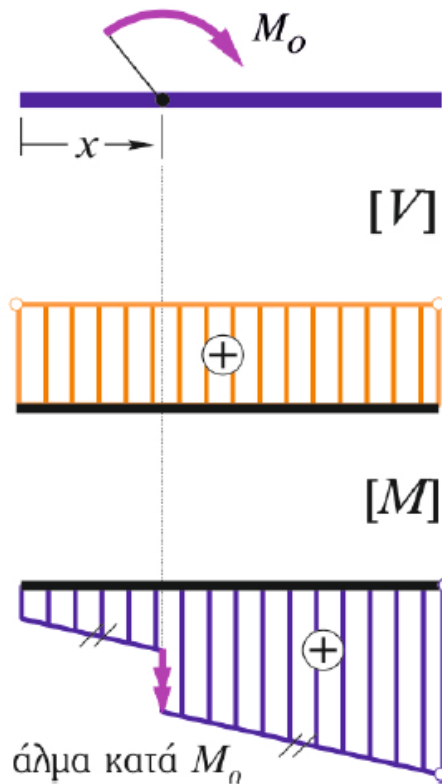


(3) Σε τμήματα με ομοιόμορφο φορτίο το διάγραμμα της τέμνουσας συγκλίνει προς τον άξονα του στοιχείου και το διάγραμμα της ροπή είναι παραβολή 2^{ου} βαθμού.

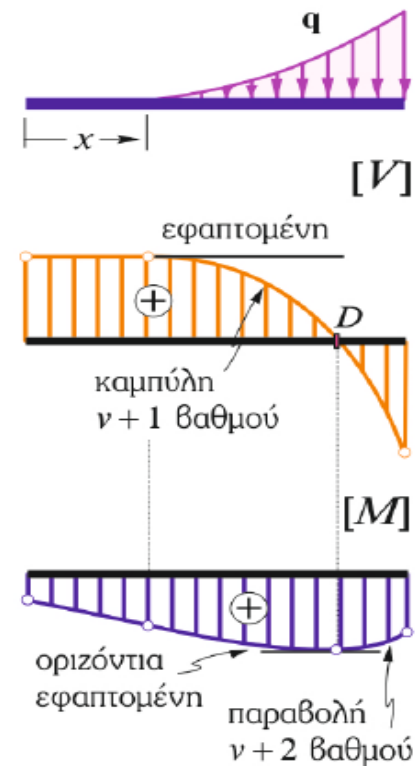
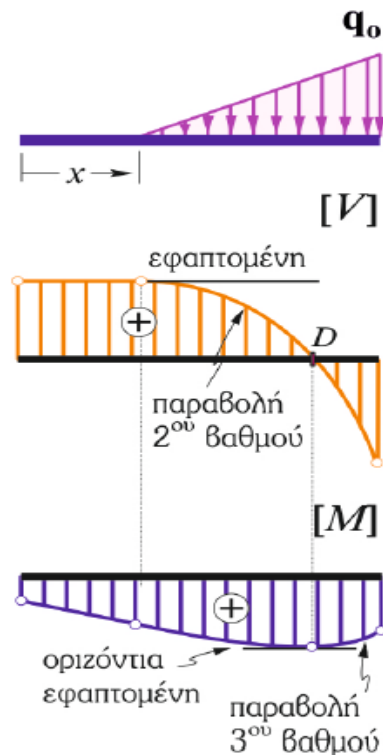


(4) Σε τμήματα με συγκεντρωμένη ροπή το διάγραμμα τέμνουσας είναι σταθερό και το διάγραμμα ροπής παρουσιάζει άλμα κατ'απόλυτη τιμή το μέγεθος της ροπής.

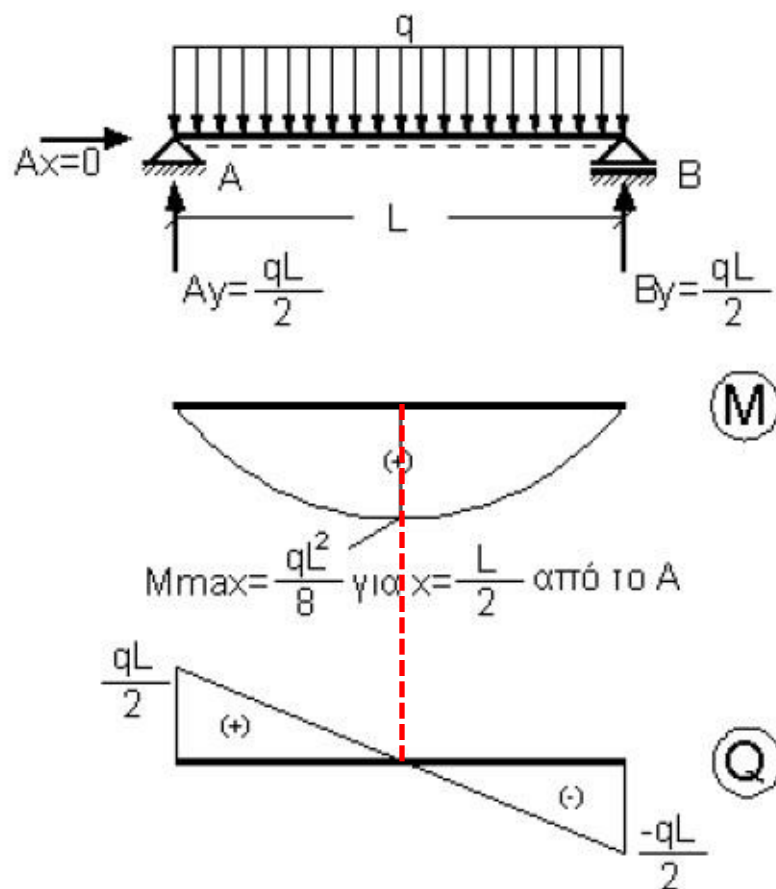
3.



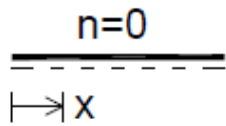
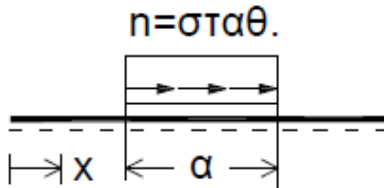
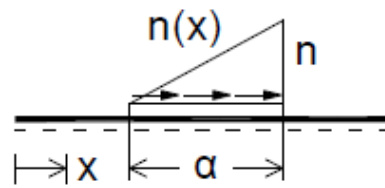
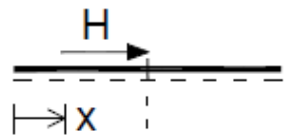

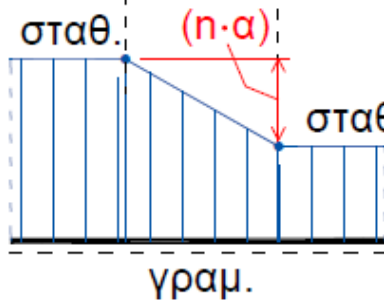
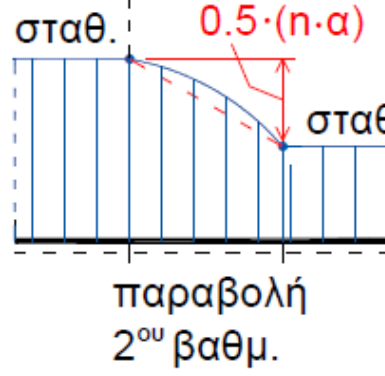
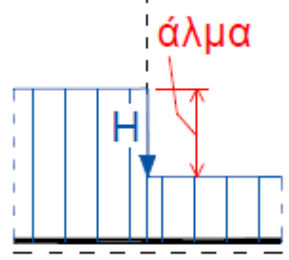
(5) Εάν η φόρτιση q σε μία δοκό περιγράφεται από μια συνάρτηση n βαθμού τότε το διάγραμμα ροπών έχει μορφή συνάρτησης $n+1$ και το διάγραμμα ροπών $n=2$.



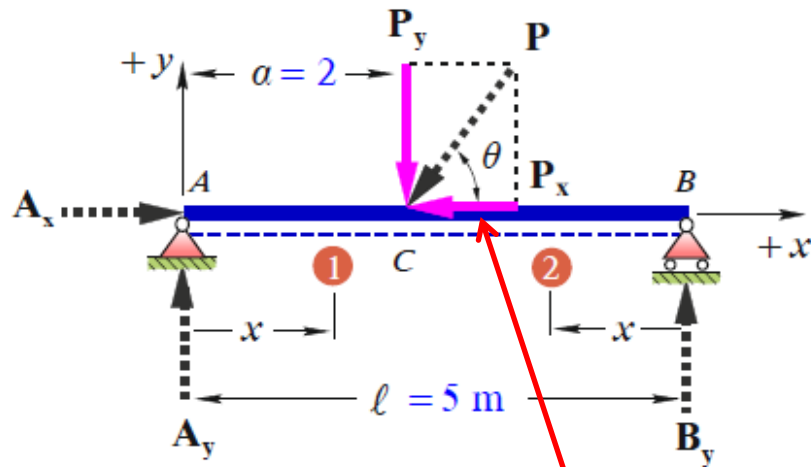
(6) Σε σημείο μηδενισμού της τέμνουσας η ροπή παρουσιάζει την μέγιστη τιμή.



(7) Μεταβολή αξονικής δύναμης.

Φορτίο	Κανένα	Σταθερό	Γραμμικό	Συγκεντρωμένο
Αξονικό n, H				
διάγραμμα $N(x)$				

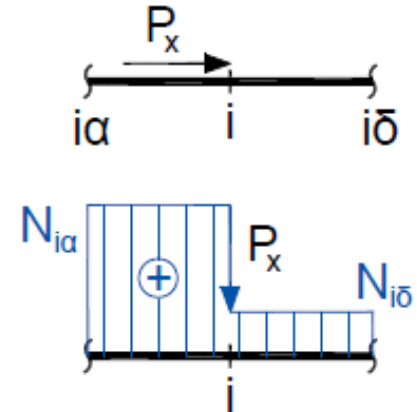
Συγκεντρωμένο φορτίο: Αξονική δύναμη



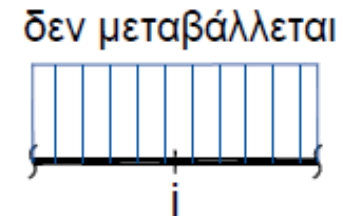
Ανάλυση της
δύναμη P σε μια
αξονική P_x και μια
διατμητική P_y

Αξονική δύναμη

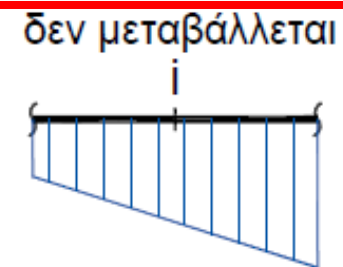
Διάγραμμα
αξονικής
δύναμης $N(x)$:



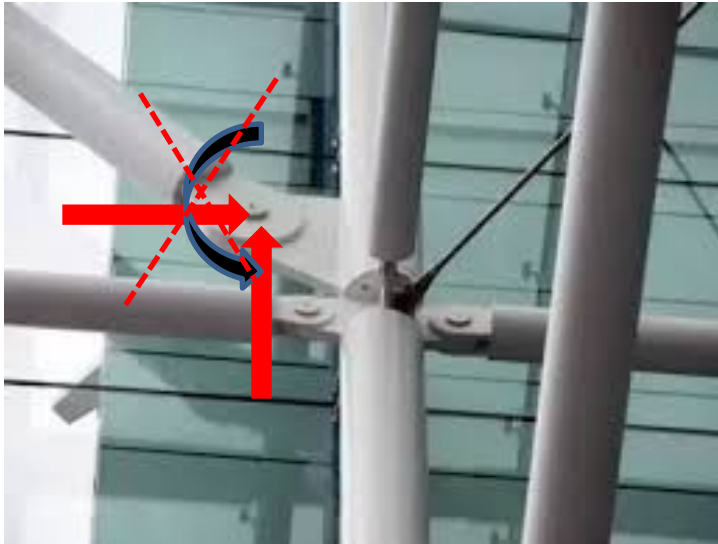
Διάγραμμα
τέμνουσας
δύναμης $Q(x)$:



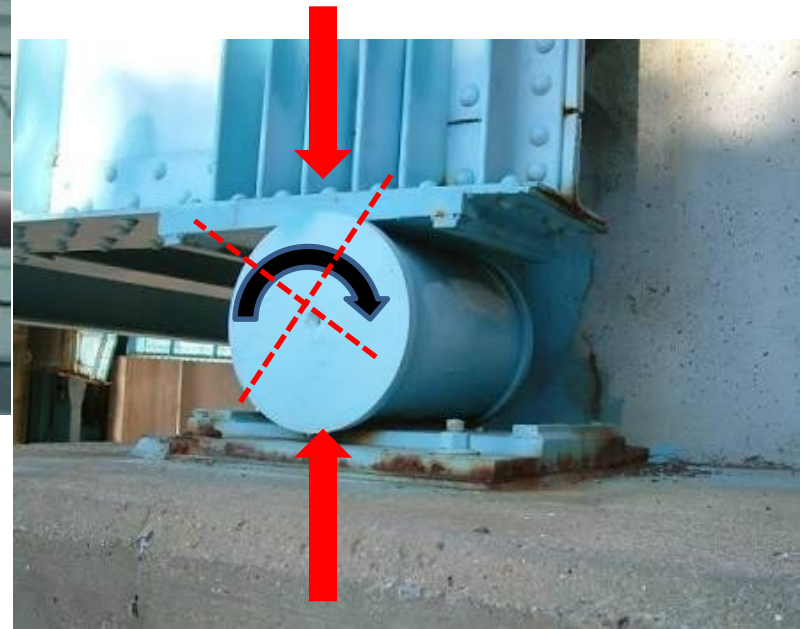
Διάγραμμα
ροπής
κάμψης $M(x)$:



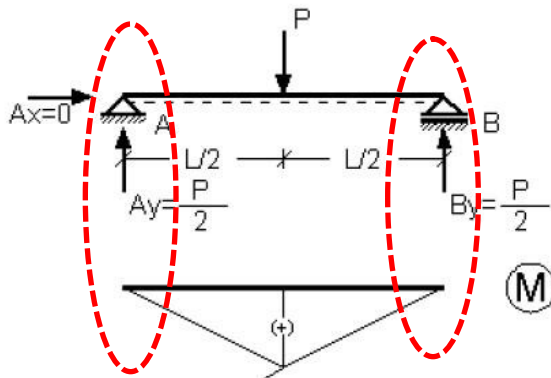
Η απλή στήριξη και η άρθρωση **δεν** μπορούν να παραλάβουν και να μεταφέρουν ροπές.



Άρθρωση



Κύλιση



Σημείωμα Αναφοράς σε έργα Τρίτων

Βιβλιογραφία

1. Beer F., Johnston E.R., Mazurek D.: Τεχνική Μηχανική-Στατική. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 11^η 2019, [κωδ. Εύδοξος 59421317].
2. Gere J., Goodno B.: Αντοχή Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 9^η 2021, [κωδ. Εύδοξος 86055253].
3. Nash W.: Στατική και Μηχανική των Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 1^η 2002, [κωδ. Εύδοξος 18549012].
4. Π.Α. Βουθούνης: Τεχνική Μηχανική. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 10^η 2019, [ISBN 978-618-83280-4-4].
5. F.P. Beer, E.R. Johnston Jr., J.T. Wolf, D.F. Mazuerk: Μηχανική των Υλικών. Εκδόσεις Τζιόλα. Έκδ. 2012-2019. [ISBN: 978-960-418-381-4]. Ελληνική μετάφραση.
6. Π.Α. Βουθούνης: Στατική-Μηχανική του απαραμόρφωτου στερεού. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 6^η 2017, [ISBN 978-618-83280-1-3].
7. Π.Α. Βουθούνης: Αντοχή των Υλικών-Μηχανική του παραμορφώσιμου στερεού. Εκδόσεις Α. Βουθούνη. Έκδ. 4^η 2019, [ISBN 978-618-83280-3-7].
8. Μ. Ματσιοκούδη-Ηλιοπούλου: Τεχνική Μηχανική: Αρχές Στατικής και Εισαγωγή στην Θεωρία των Παραμορφώσιμων Σωμάτων. Εκδόσεις Ζυγός. Έκδοση 1991/2016. [ISBN13: 97896080652533], [κωδ. Εύδοξος 1753].
9. Γ. Γκρός. Μηχανική. Τόμος Α. Ευγενείδιο Ίδρυμα, 1976.

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

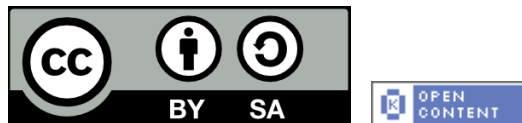
Άνθιμος Σ. Αναστασιάδης. «Τεχνική Μηχανική: Στατική και Αντοχή Υλικών». Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Πολυτεχνική Σχολή. Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων & Συστημάτων. Έκδοση 1^η , Κοζάνη, 2020.

Διαθέσιμο από την διαδικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.uowm.gr/courses/MRE250/>

Σημείωμα αδειοδότησης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [<https://creativecommons.org/>] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να περιλαμβάνει τα παρακάτω:

- ❖ Σημείωμα Αναφοράς
- ❖ Σημείωμα Αδειοδότησης
- ❖ Δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- ❖ Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει), μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Ισοστατικοί επίπεδοι γραμμικοί φορείς

