Συνδυαστική Λογική

Κυκλώματα Αριθμητικών Πράξεων

Δυαδικός Αθροιστής

Δεκαδικός Αθροιστής

Συγκριτής Μεγέθους

Δυαδικός Πολλαπλασιαστής

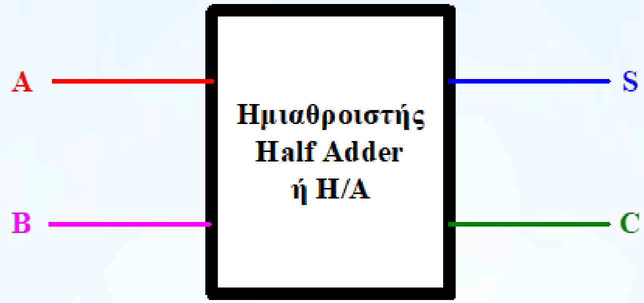
Πρόσθεση δυαδικών αριθμών

- Η πρόσθεση δύο δυαδικών αριθμών γίνεται, όπως και των δεκαδικών, αρχίζοντας από το τέλος και προσθέτοντας τα ψηφία που βρίσκονται το ένα κάτω από το άλλο.
- Χρησιμοποιούνται μόνο τα ψηφία που ανήκουν στο δυαδικό σύστημα, τα οποία ως γνωστό είναι το "0" και το "1".
- Κρατούμενο (carry) προκύπτει όταν το άθροισμα (sum) των δύο ψηφίων είναι μεγαλύτερο του "1".
- Το κρατούμενο μεταφέρεται και προστίθεται στο αμέσως επόμενο ζευγάρι των υπό πρόσθεση δυαδικών ψηφίων.

Πρόσθεση δύο δυαδικών ψηφίων

	Κρατούμενο (Carry)	Άθροισμα (Sum)
0+0	0	0
0+1	0	1
1+1	1	0

Ημιαθροιστής (Half adder)



A	B		C	S
0	0	(0+0) =0	0	0
0	1	(0+1) = 1	0	1
1	0	(1+0) =1	0	1
1	1	(1+1) = 2	1	0

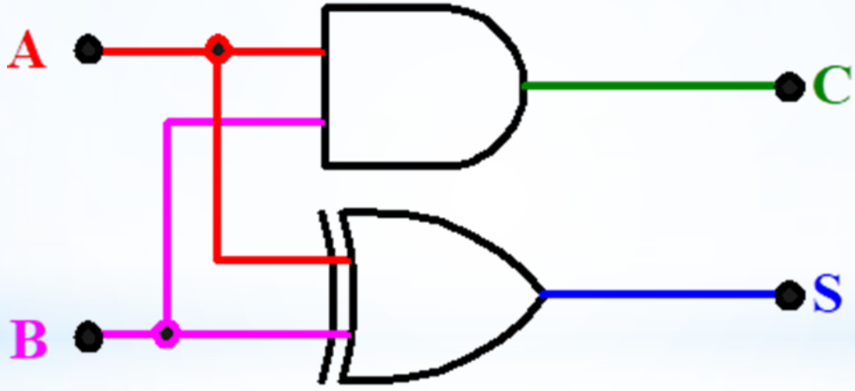
Πίνακας Αληθείας ημιαθροιστή

Ημιαθροιστής (Half adder)

$$C = A \cdot B$$

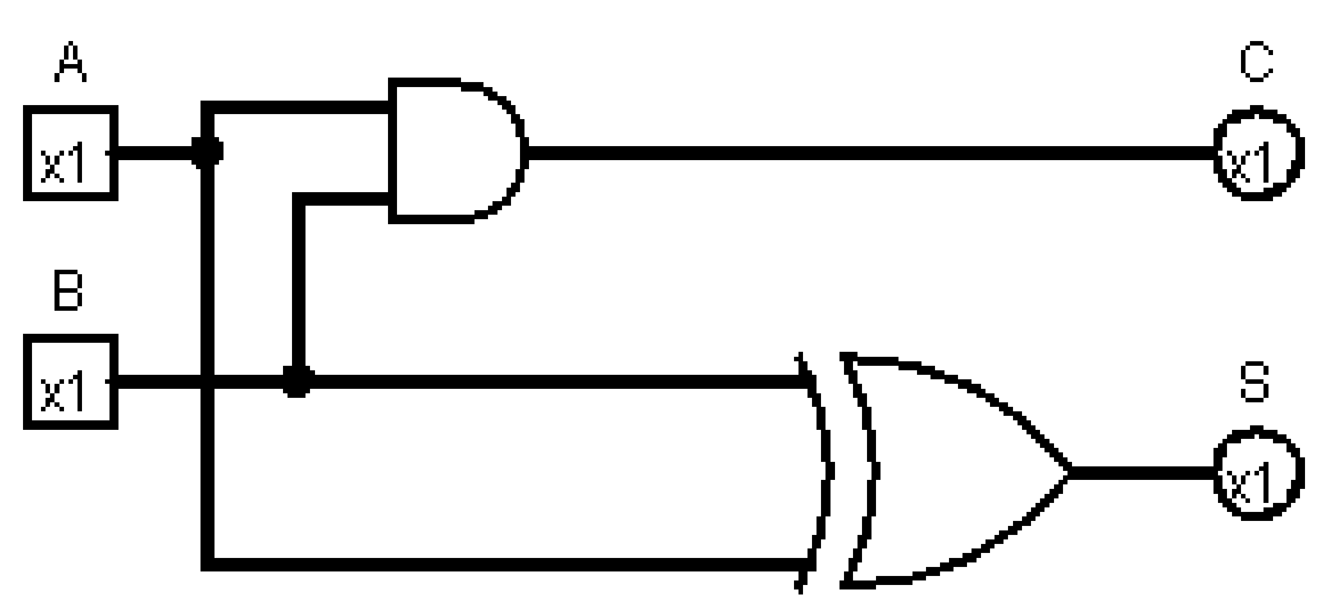
$$S = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = (A \oplus B)$$

Λογικές συναρτήσεις ημιαθροιστή



Υλοποίηση ημιαθροιστή

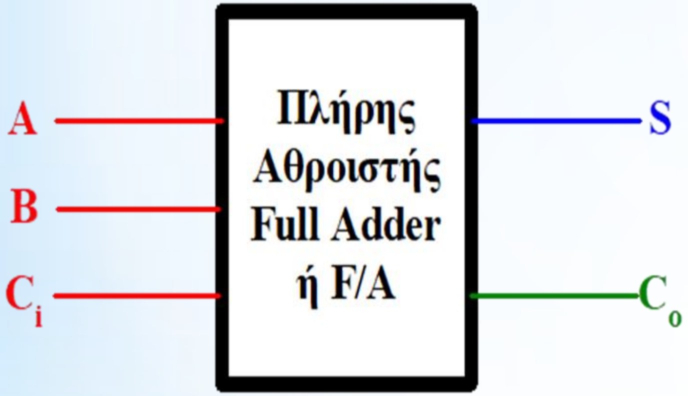
Σχεδίαση Ημιαθροιστή
στο σχεδιαστικό περιβάλλον Logisim



Πρόσθεση δύο δυαδικών ψηφίων και κρατούμενου εισόδου

	Κρατούμενο (Carry)	Άθροισμα (Sum)
(0+0)+0	0	0
(0+0)+1	0	1
(0+1)+0	0	1
(0+1)+1	1	0
(1+1)+0	1	0
(1+1)+1	1	1

Πλήρης αθροιστής (Full adder)



A	B	Ci		Co	S
0	0	0	(0+0+0) =0	0	0
0	0	1	(0+0+1) = 1	0	1
0	1	0	(0+1+0) =1	0	1
0	1	1	(0+1+1) = 2	1	0
1	0	0	(1+0+0) =1	0	1
1	0	1	(1+0+1) = 1	1	0
1	1	0	(1+1+0) =2	1	0
1	1	1	(1+1+1) = 3	1	1

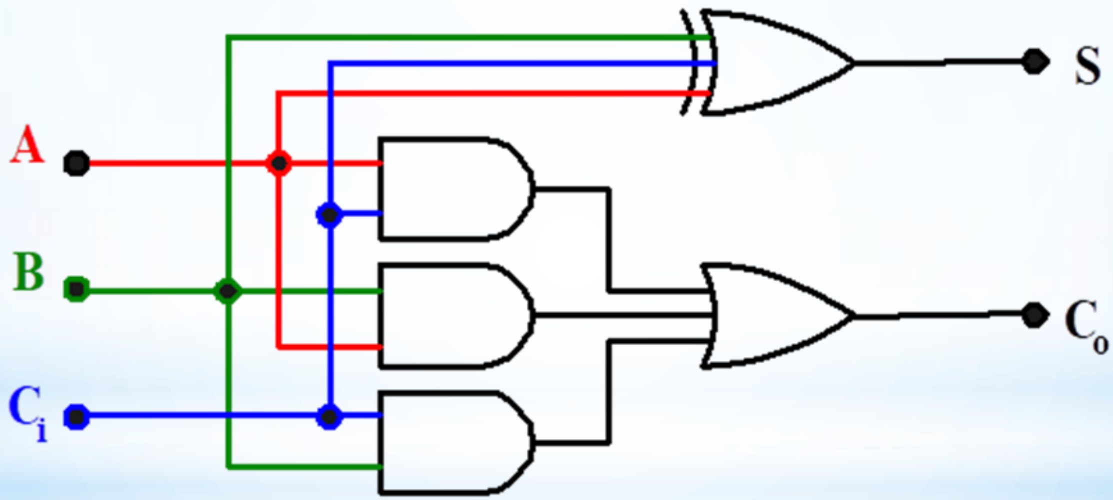
Πίνακας Αληθείας ημιαθροιστή

Πλήρης Αθροιστής (Full adder)

$$Co = A \cdot B + ACi + BCi$$

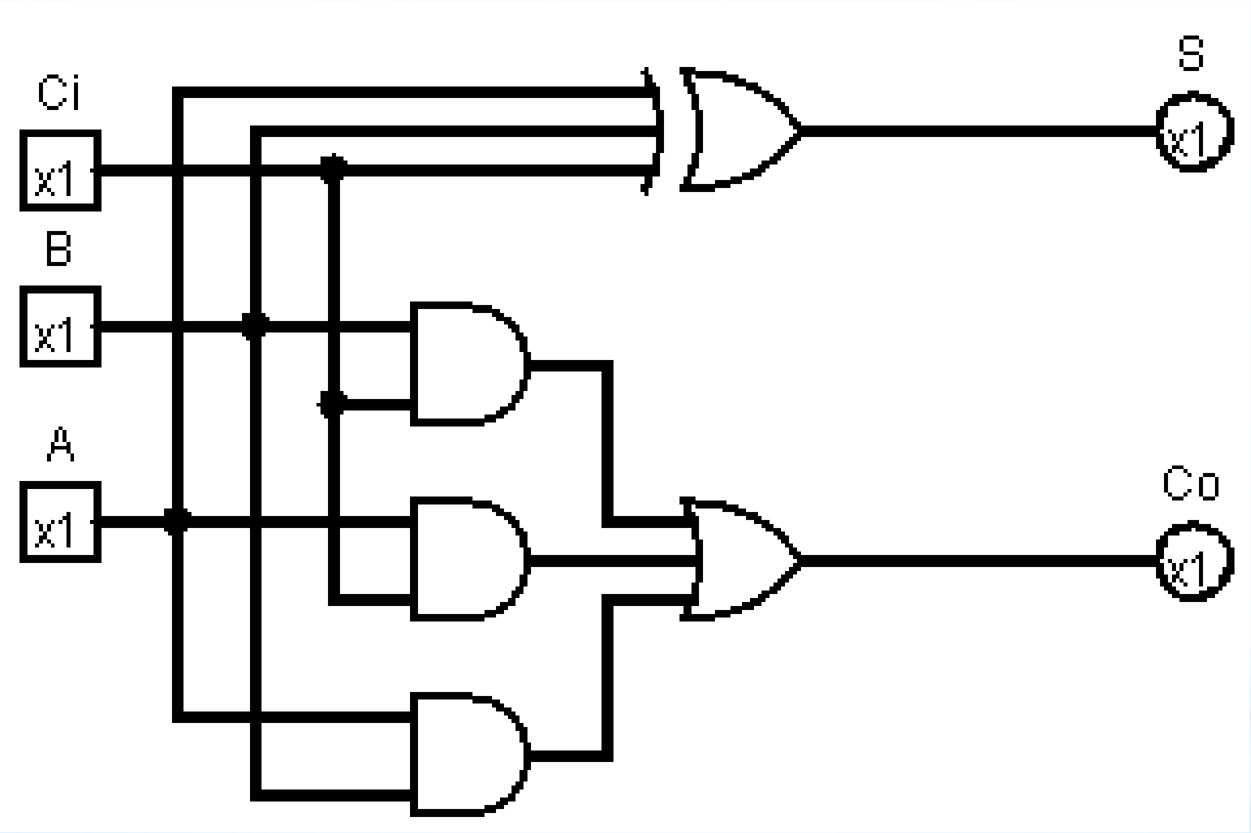
$$S = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot Ci + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{Ci} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{Ci} + A \cdot B \cdot Ci$$

Λογικές συναρτήσεις πλήρους αθροιστή



Υλοποίηση Πλήρους Αθροιστή

Σχεδίαση Πλήρους Αθροιστή στο σχεδιαστικό περιβάλλον Logisim

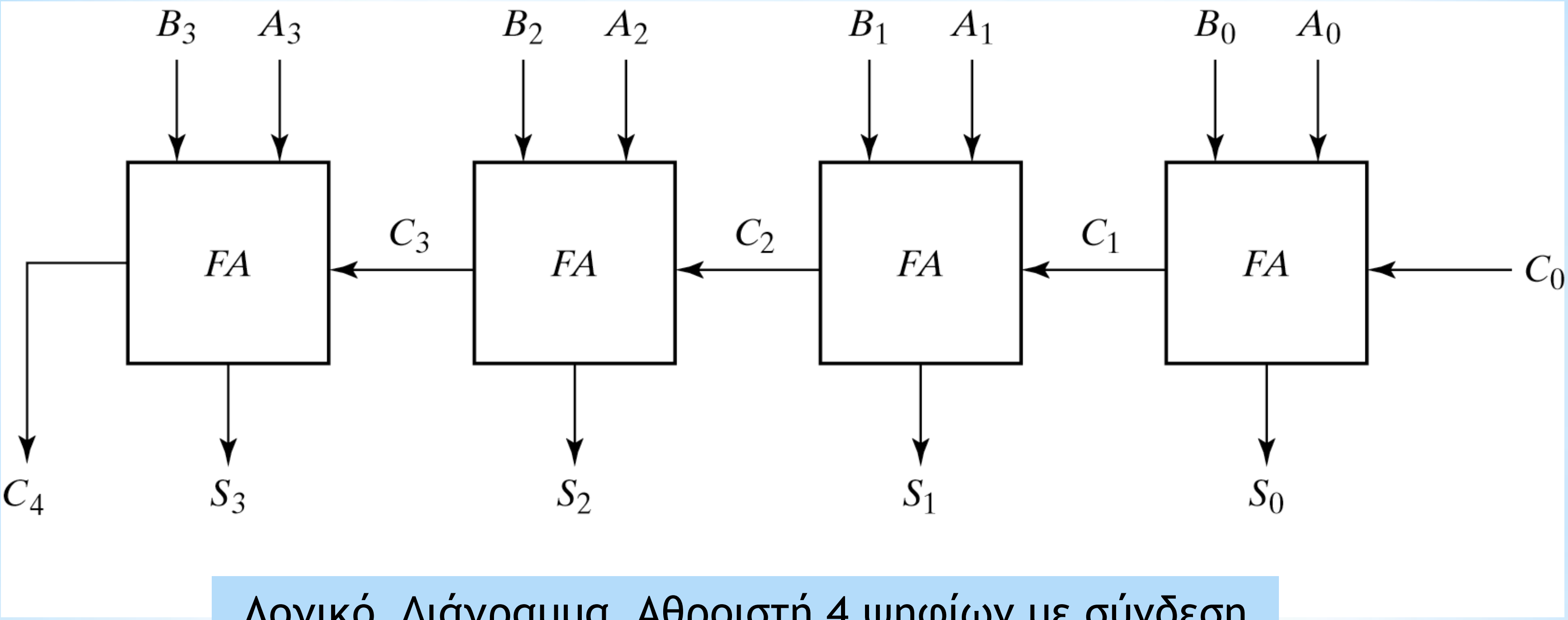


Αθροιστής 4 Ψηφίων

Με την διαδοχική σύνδεση Ν πλήρων αθροιστών μπορούμε να υλοποιήσουμε ένα αθροιστή δύο δυαδικών αριθμών Ν ψηφίων.

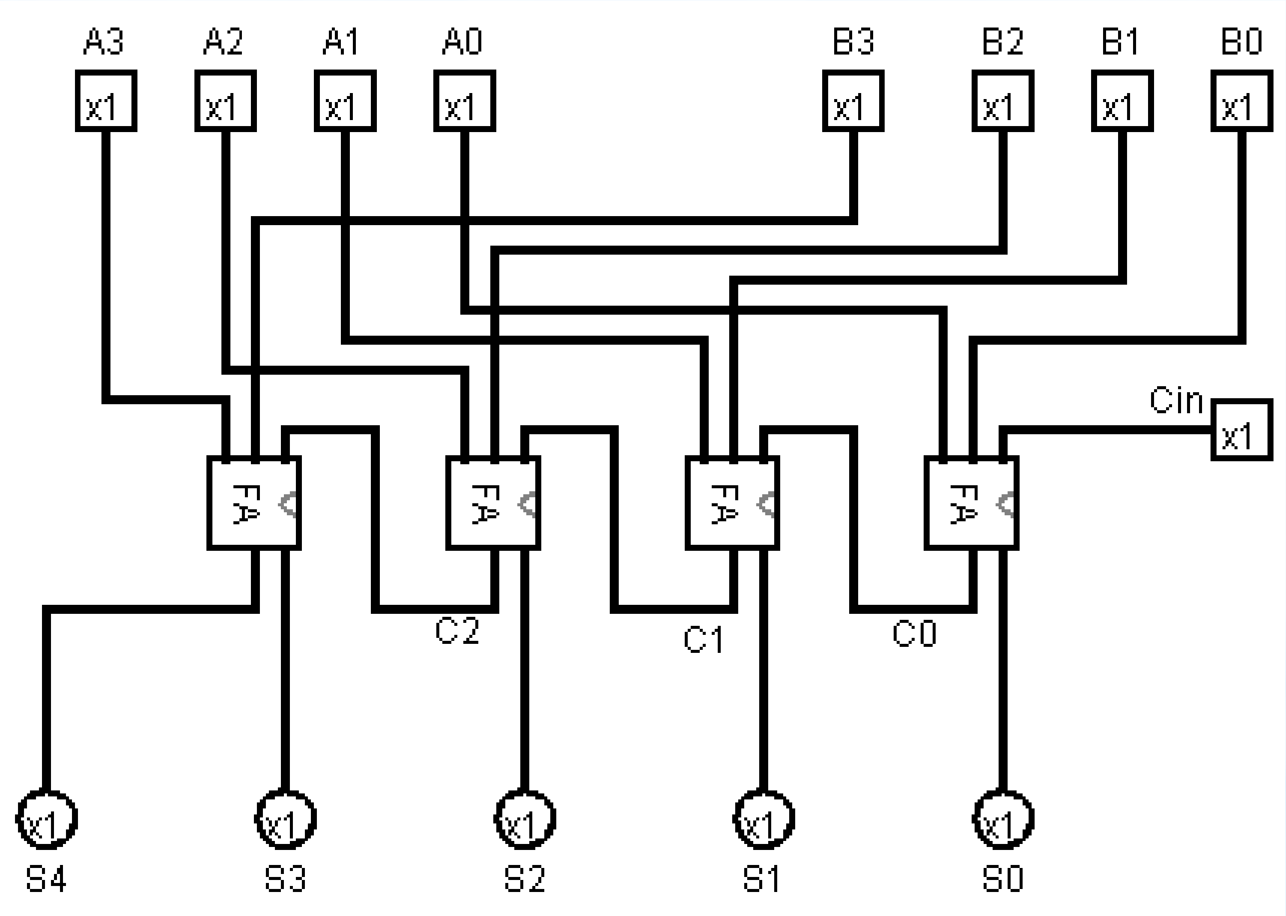
Το άθροισμα μπορεί να χρειάζεται Ν+1 ψηφία για να απεικονιστεί σωστά.

```
π.χ.         0 1 1 0   ( 6)
         +   1 1 1 0   (14)
         ___________
           1 0 1 0 0   (20)
```



Λογικό Διάγραμμα Αθροιστή 4 ψηφίων με σύνδεση τεσσάρων πλήρων Αθροιστών

Σχεδίαση Αθροιστή 4 ψηφίων με Πλήρεις Αθροιστές στο σχεδιαστικό περιβάλλον Logisim



Αθροιστής BCD

- Ένας Αθροιστής ο οποίος προσθέτει δύο δεκαδικά ψηφία από το 0 ως το 9 κωδικοποιημένα ως τετραψήφιους δυαδικούς αριθμούς (BCD) και δίνει το άθροισμα επίσης ως δεκαδικά ψηφία κωδικοποιημένα σε BCD ονομάζεται **Δεκαδικός Αθροιστής ή Αθροιστής BCD.**
- Ο αθροιστής BCD μπορεί να υλοποιηθεί με ένα **Δυαδικό Αθροιστή 4 ψηφίων** και κατάλληλη τροποποίηση της εξόδου του.
- Αν το άθροισμα των δύο δεκαδικών ψηφίων είναι από 0 ως 9 δεν απαιτείται αλλαγή της εξόδου.
- Αν το άθροισμα είναι πάνω από 9 τότε η έξοδος του Δυαδικού Αθροιστή πρέπει να αυξηθεί κατά 6.

Δυαδικό Άθροισμα Άθροισμα σε κώδικα BCD

C4	S3	S2	S1	S0	HEX	Co	D3	D2	D1	D0	ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	2	0	0	0	1	0	2
0	0	0	1	1	3	0	0	0	1	1	3
0	0	1	0	0	4	0	0	1	0	0	4
0	0	1	0	1	5	0	0	1	0	1	5
0	0	1	1	0	6	0	0	1	1	0	6
0	0	1	1	1	7	0	0	1	1	1	7
0	1	0	0	0	8	0	1	0	0	0	8
0	1	0	0	1	9	0	1	0	0	1	9
0	1	0	1	0	A	1	0	0	0	0	10
0	1	0	1	1	B	1	0	0	0	1	11
0	1	1	0	0	C	1	0	0	1	0	12
0	1	1	0	1	D	1	0	0	1	1	13
0	1	1	1	0	E	1	0	1	0	0	14
0	1	1	1	1	F	1	0	1	0	1	15
1	0	0	0	0	10	1	0	1	1	0	16
1	0	0	0	1	11	1	0	1	1	1	17
1	0	0	1	0	12	1	1	0	0	0	18
1	0	0	1	1	13	1	1	0	0	1	19

Αθροιστής BCD

- Συνθήκη για διόρθωση του δυαδικού αθροίσματος

C4 να είναι 1

S3 και S2 να είναι 1

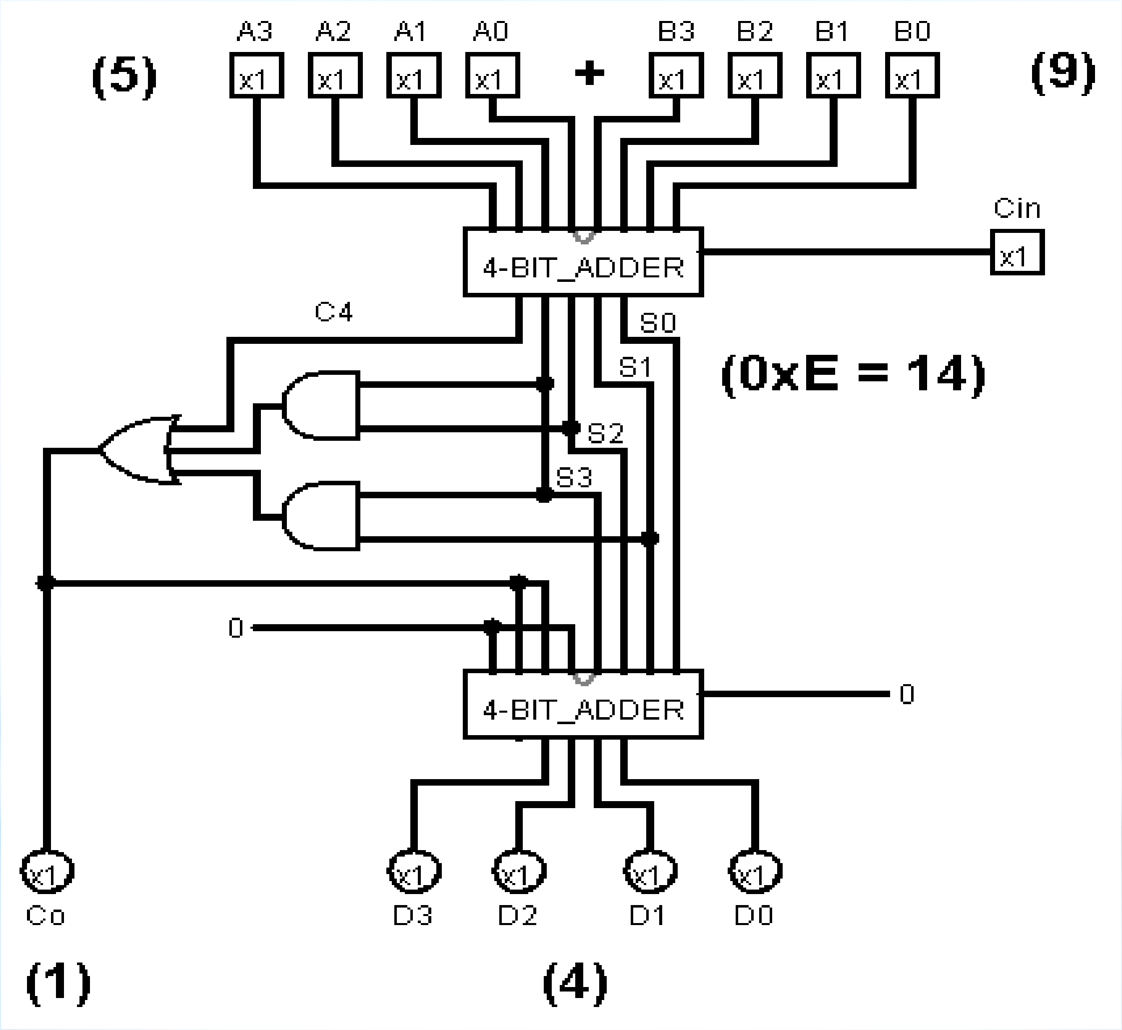
S3 και S1 να είναι 1

Διόρθωση δυαδικού αθροίσματος

Co = C4 + S3*S2 + S3*S1

(D3, D2,D1,D0) = (S3,S2,S1,S0) συν (0,1,1,0) *Co

Σχεδίαση Αθροιστή BCD
στο σχεδιαστικό περιβάλλον Logisim



Σύγκριση δυο αριθμών

Η σύγκριση δυο αριθμών είναι μια πράξη μεταξύ δυο αριθμών Α,Β που βρίσκει αν ο ένας είναι μεγαλύτερος, μικρότερος ή ίσος με τον άλλο.

Το αποτέλεσμα δίνεται με τρεις δυαδικές μεταβλητές που δείχνουν αν $A>B$, $A<B$ ή $A=B$.

<u>Αλγόριθμος σύγκρισης</u>

Θεωρούμε τους δυαδικούς αριθμούς $A=A_3A_2A_1A_0$ και $B=B_3B_2B_1B_0$

Οι δυο αριθμοί είναι ίσοι αν εάν Ai=Bi $\forall$i = 0,1,2,3

Η ισότητα μεταξύ ισοδύναμων ψηφίων αναγνωρίζεται με την πύλη XNOR

Xi=AiBi+Ai´Bi´

Έχουμε Xi=1 εάν και μόνο εάν Ai=Bi.

Οι δυο αριθμοί είναι ίσοι (Α=Β) όταν Ai=Bi $\forall$i Αυτό υπαγορεύει πράξη AND

(A=B)=X3 X2 X1 X0

Σύγκριση δυο αριθμών (συν.)

Για τον προσδιορισμό της ανισότητας μεταξύ δυο αριθμών εξετάζουμε τα σχετικά μεγέθη των ζευγαριών ψηφίων, αρχίζοντας από την πιο σημαντική θέση. Εάν τα δυο ψηφία είναι ίσα, συγκρίνουμε το επόμενο λιγότερο σημαντικό ζευγάρι ψηφίων κ.ο. Αν τα αντίστοιχα Ai = 1 και Bi = 0 τότε A>B.

Οι διαδοχικές συγκρίσεις εκφράζονται αλγεβρικά ως εξής:

(A>B)= A3B3´+X3A2B2´+X3X2A1B1´+X3X2X1A0B0´

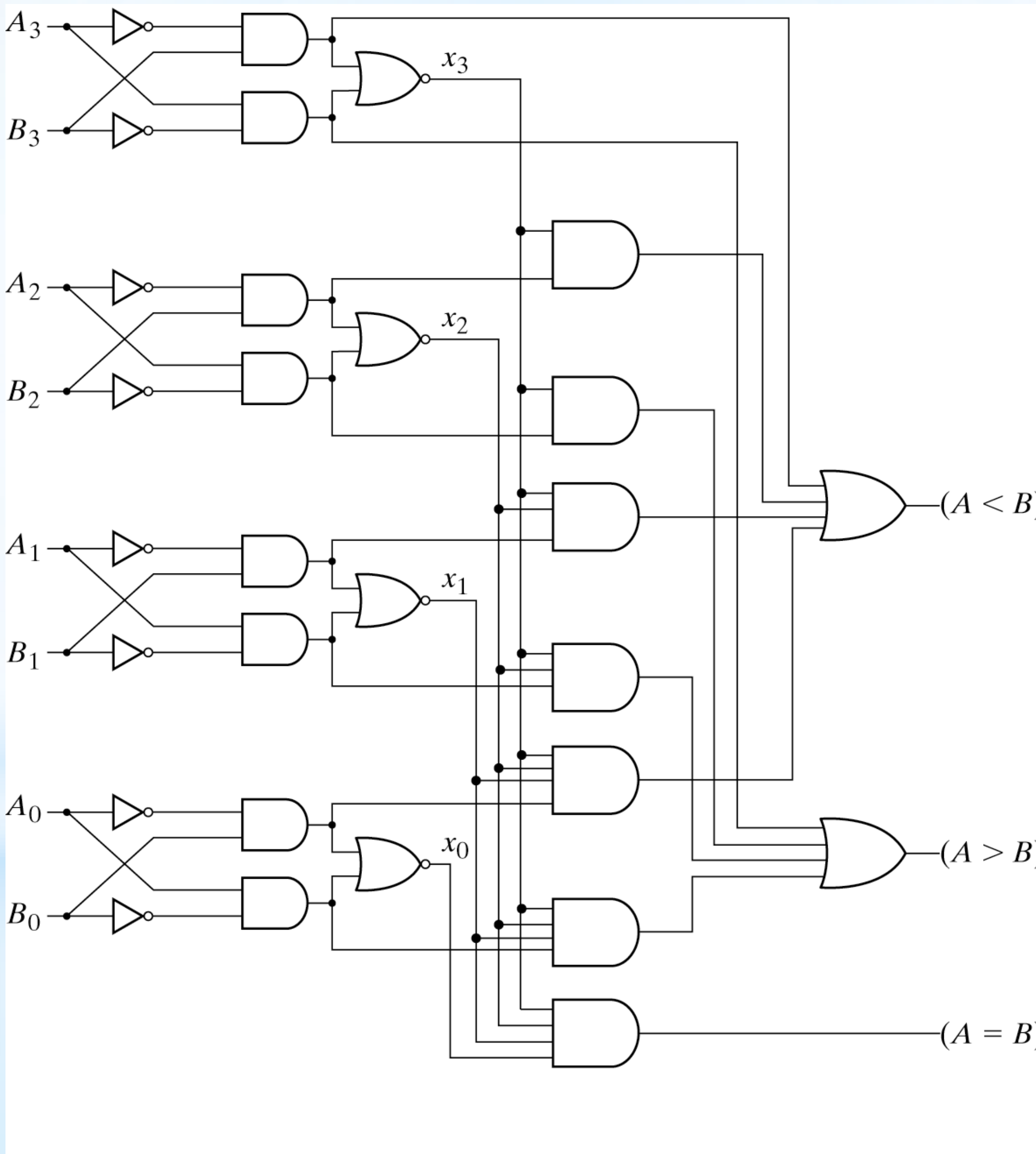
(A<B)= A3´B3+X3A2´B2+X3X2A1´B1+X3X2X1A0´B0

Η μεταβλητή (A>B) =1 όταν A>B

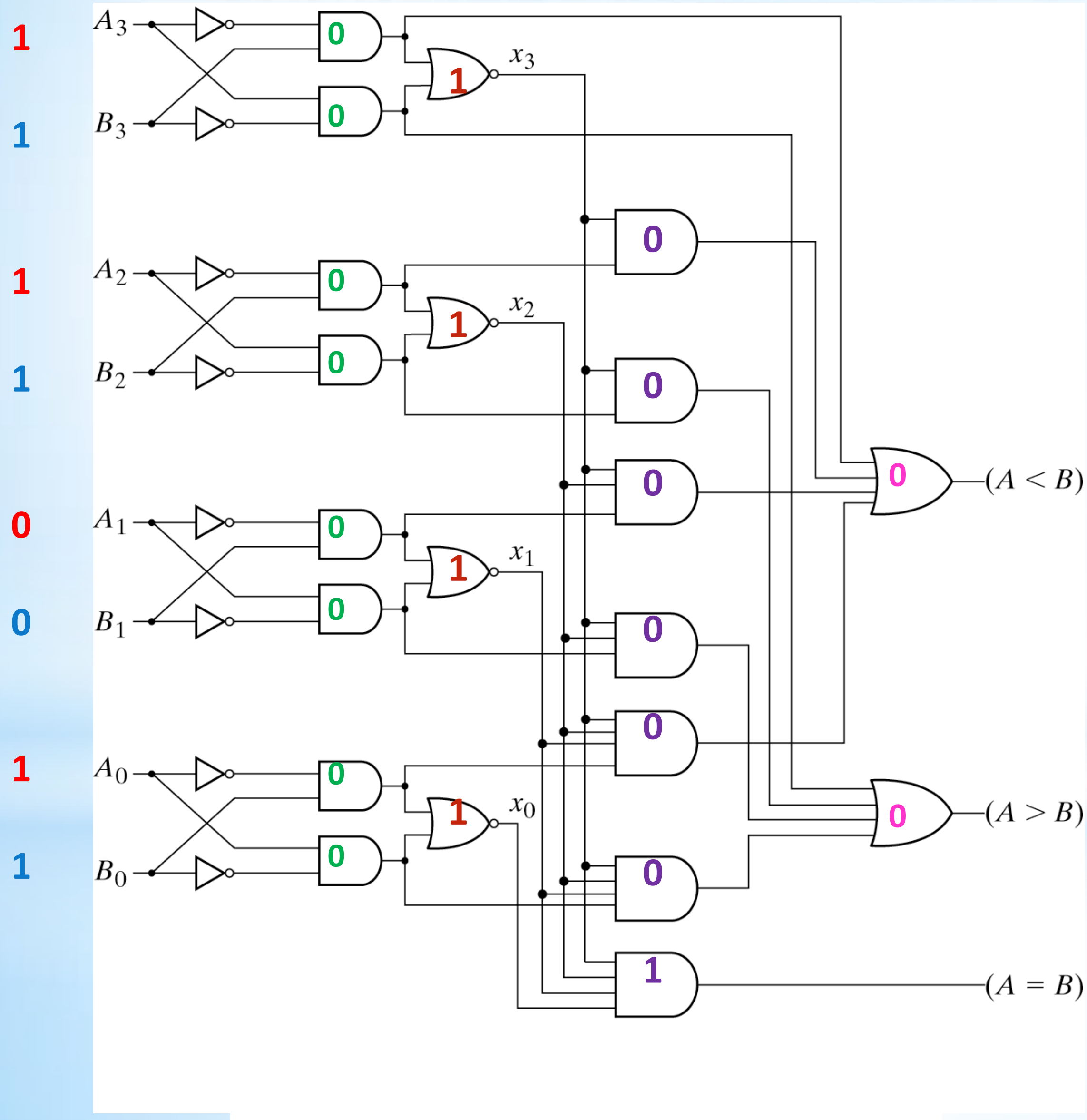
Η μεταβλητή (A<B) =1 όταν A<B

Το κύκλωμα του συγκριτή παρουσιάζει αρκετή κανονικότητα καθώς πραγματοποιεί κάποια αλγοριθμική διαδικασία, που οδηγεί τελικά σε σχετικά εύκολη υλοποίηση

Συγκριτής Μεγέθους 4 ψηφίων



Συγκριτής Μεγέθους 4 ψηφίων



Σύγκριση

1101 με 1101

X3 =1

X2 =1

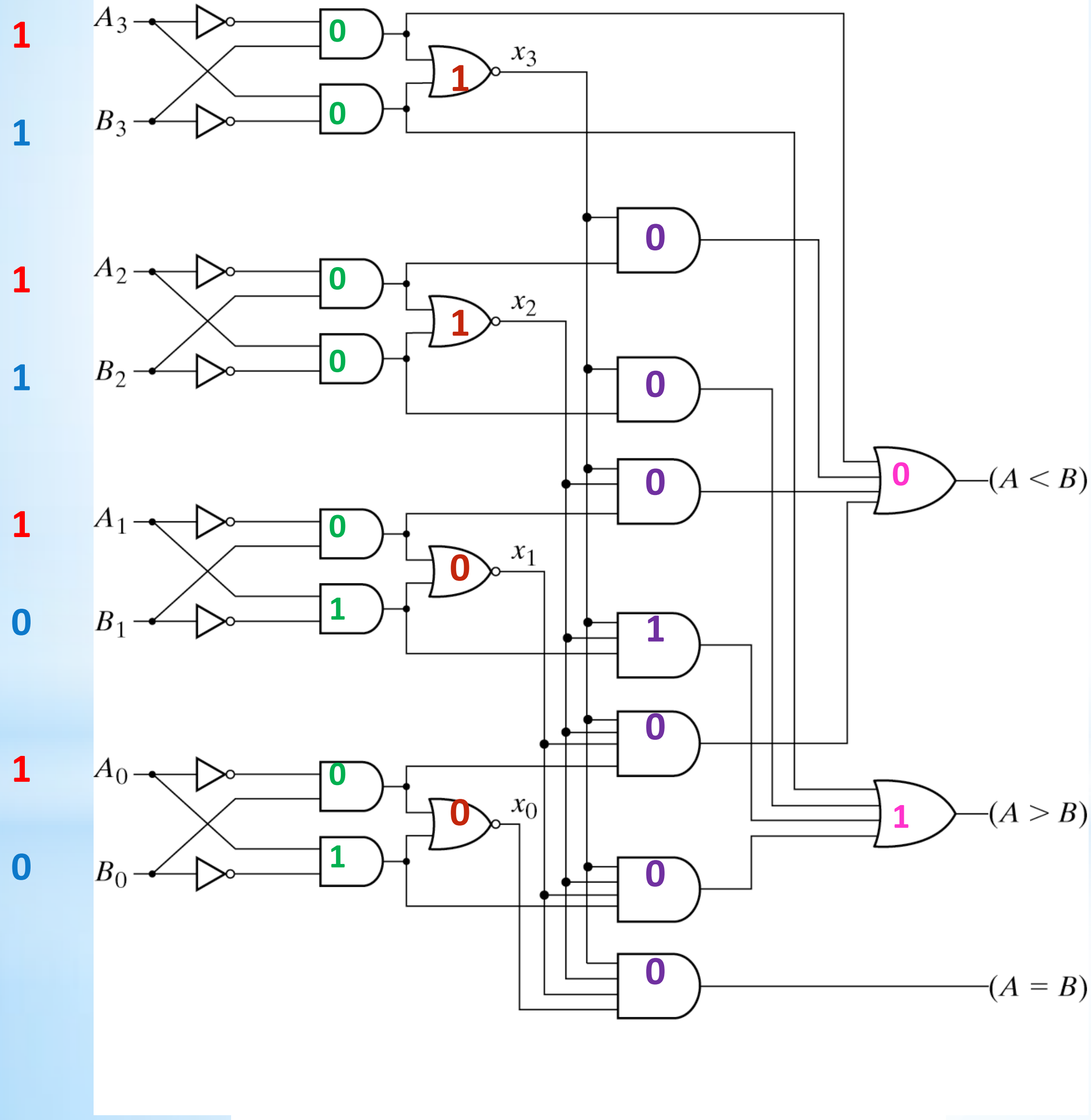
X1 =1

X0 =1

(A = B) ->1

Ισότητα

Συγκριτής Μεγέθους 4 ψηφίων

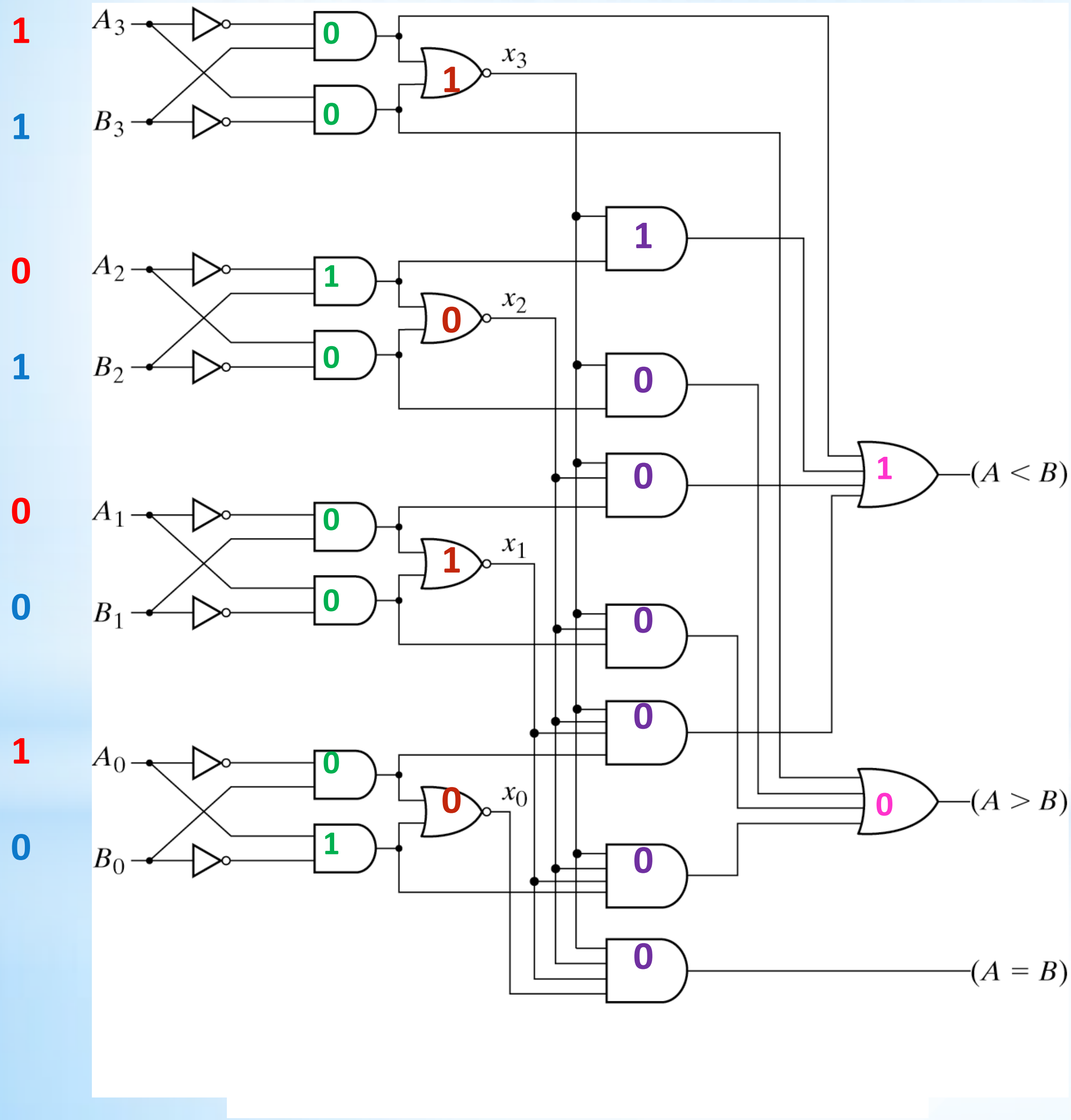


Σύγκριση
1110 με 1101

X3 =1
X2 =1
X1 = 0
X0 =0
Δεν είναι ίσοι

X3*X2*A1*B1’ = 1
(A > B) -> 1

Συγκριτής Μεγέθους 4 ψηφίων



Σύγκριση
1001 με 1100

X3 = 1
X2 = 0
X1 = 1
X0 = 0
Δεν είναι ίσοι

X3*A1'*B1 = 1
(A < B) -> 1

Πολλαπλασιασμός δυαδικών αριθμών

Είναι μια πράξη ακριβώς ίδια με την αντίστοιχη των δεκαδικών και ακόμη ευκολότερη γιατί τα ψηφία πού χρησιμοποιούνται είναι μόνο δύο, το "0" και το "1", οπότε το επιμέρους γινόμενο θα είναι είτε το 0, είτε ο πολλαπλασιαστέος.

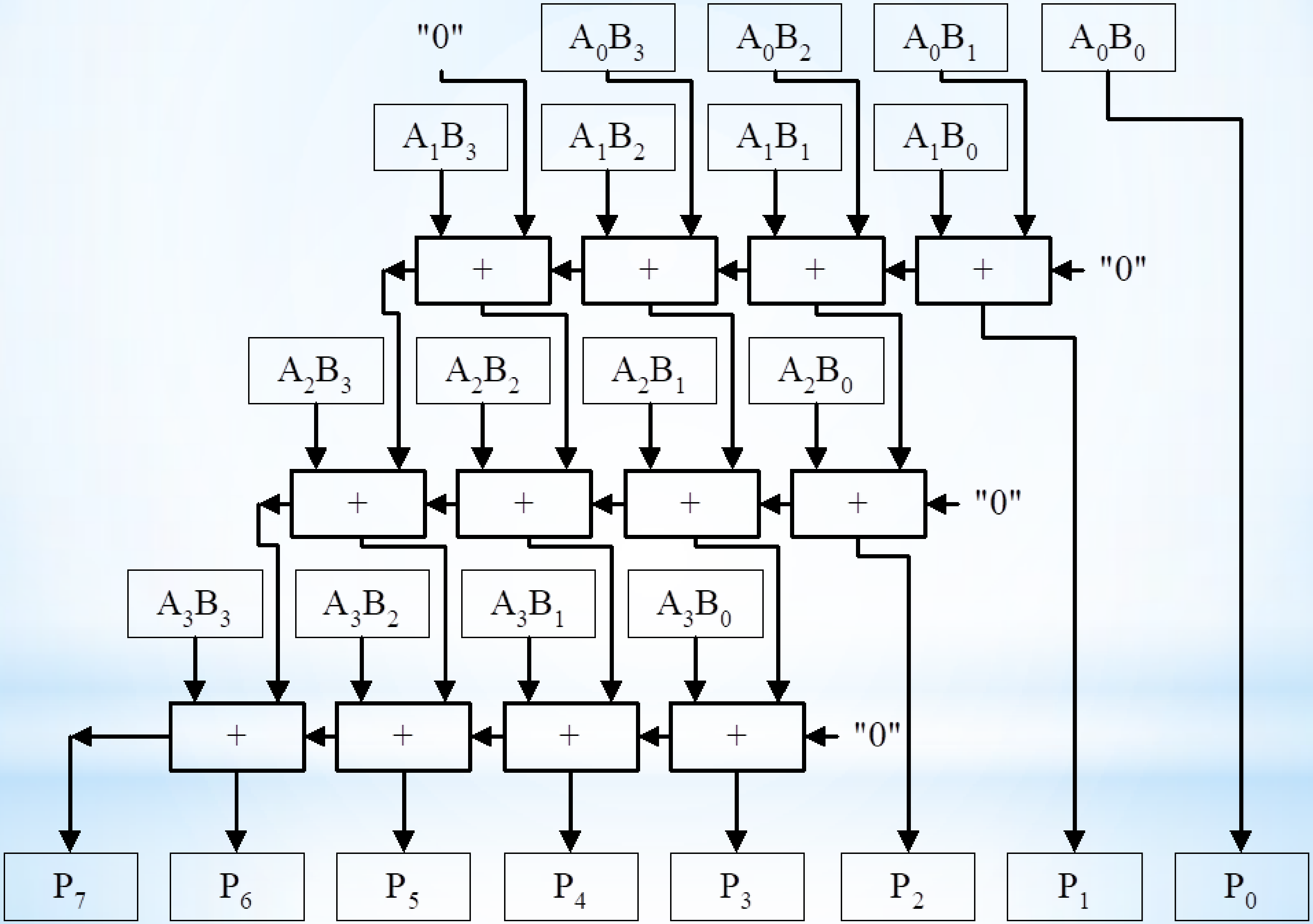
Αφού βρεθούν όλα τα επιμέρους γινόμενα, προστίθενται και προκύπτει το τελικό αποτέλεσμα.

Πολλαπλασιασμός δυαδικών αριθμών

B	1001_2	=	9_{10}
A	x 1011_2	=	11_{10}
B*A0	1001		
B*A1	1001		
B*A2	0000		
B*A3	1001		
	1100011_2	=	99_{10}

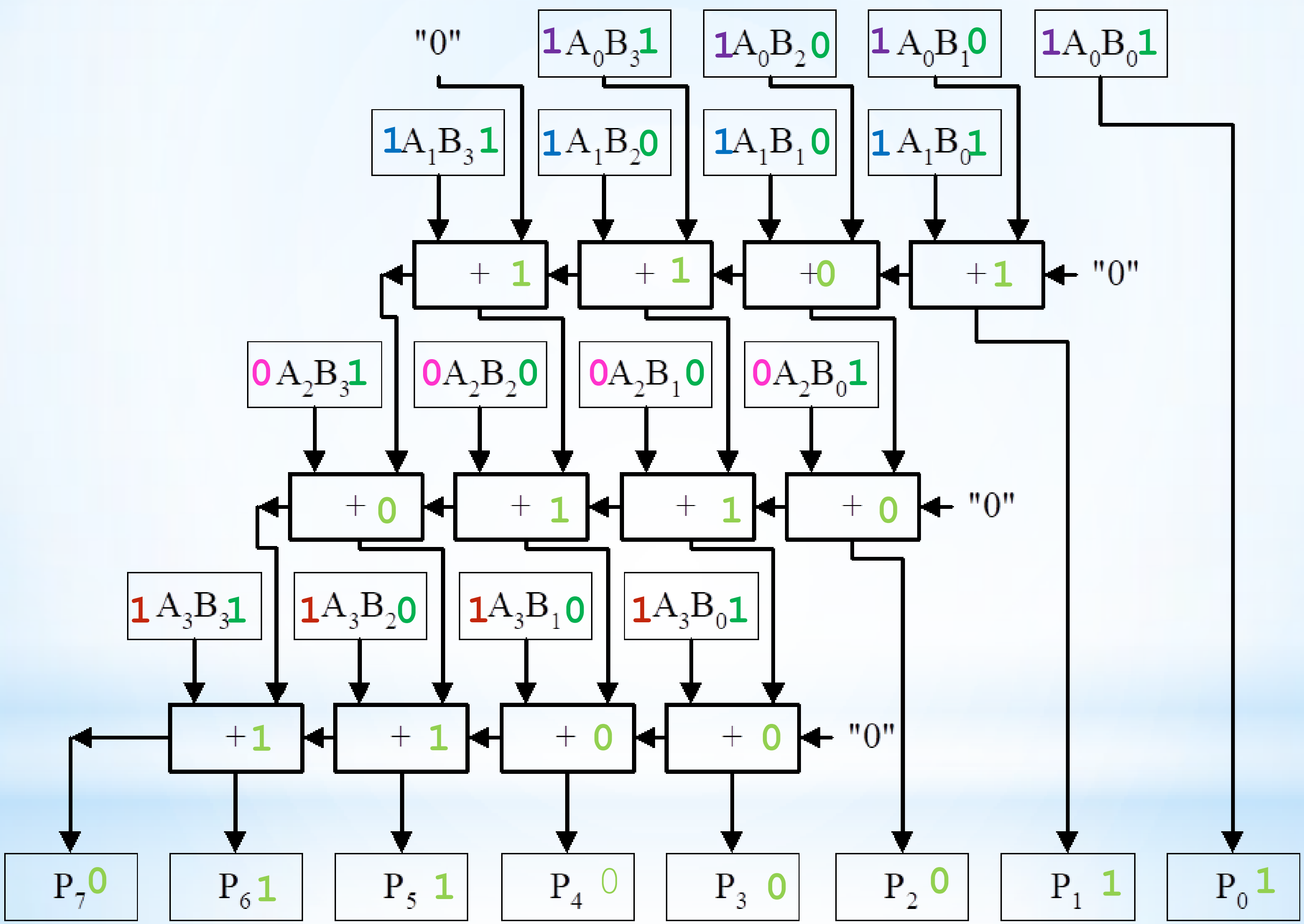
Παράδειγμα πολλαπλασιασμού δύο τετραψήφιων δυαδικών αριθμών

Πολλαπλασιασμός δυαδικών αριθμών



Λογικό Διάγραμμα κυκλώματος
πολλαπλασιασμού δύο τετραψήφιων δυαδικών αριθμών

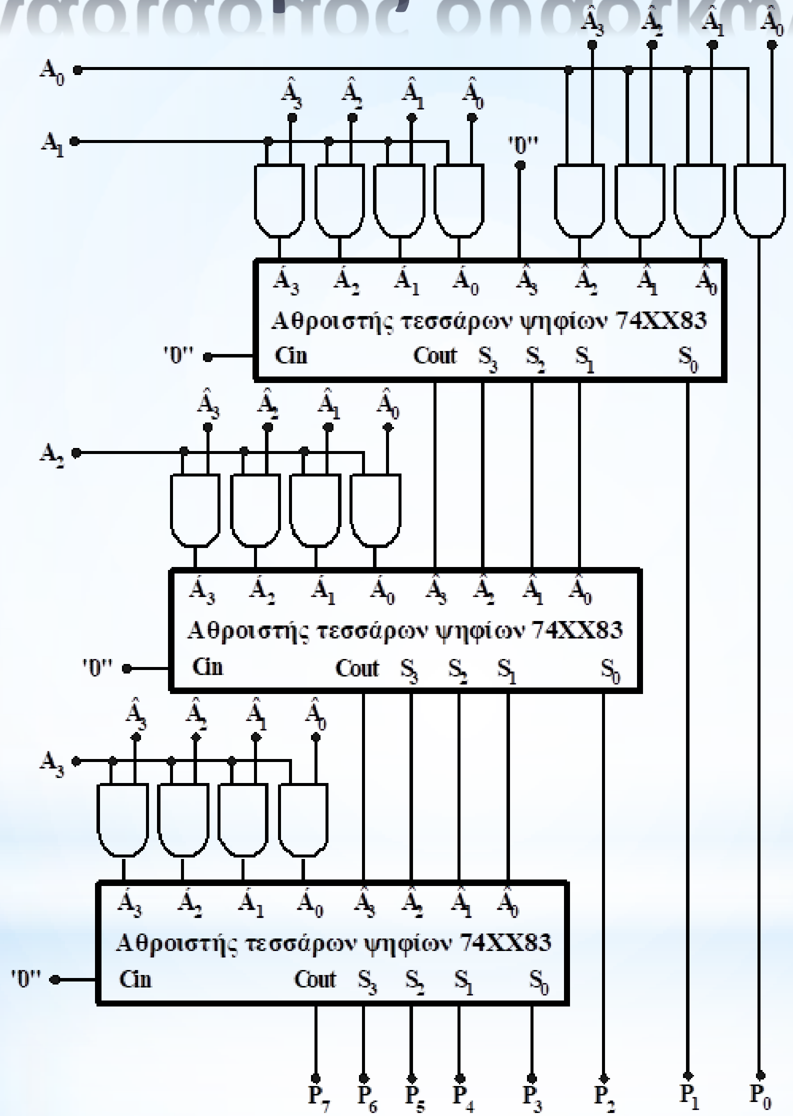
Πολλαπλασιασμός δυαδικών αριθμών



Παράδειγμα εκτέλεσης πολλαπλασιασμού των δυαδικών αριθμών

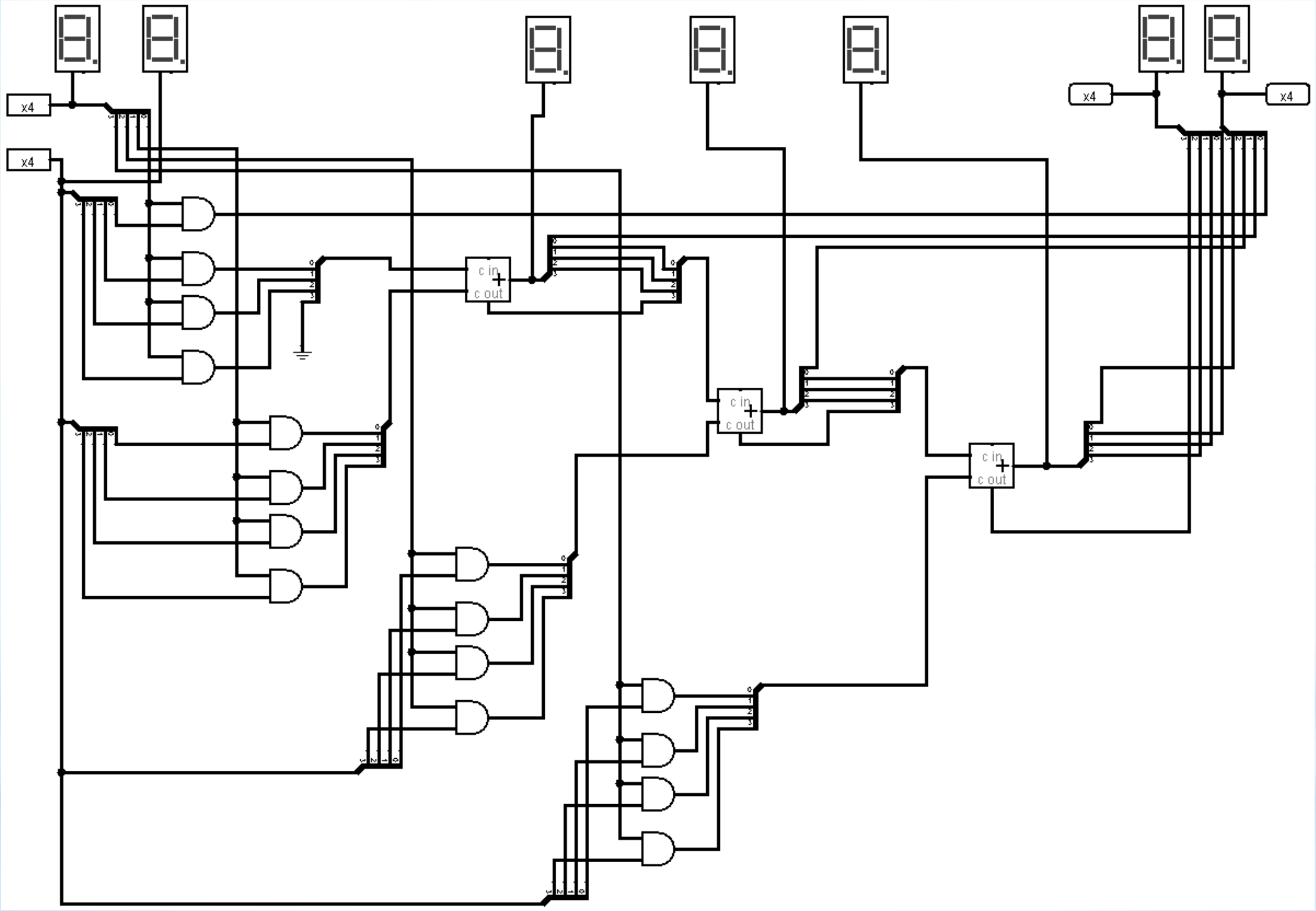
1001 X 1011

Πολλαπλασιασμός δυαδικών αριθμών



Σχεδίαση πολλαπλασιαστή δυο τετραψήφιων δυαδικών αριθμών
με τρείς δυαδικούς αθροιστές τεσσάρων ψηφίων

Πολλαπλασιασμός δυαδικών αριθμών



Σχεδίαση πολλαπλασιαστή δυο τετραψήφιων δυαδικών αριθμών στο σχεδιαστικό περιβάλλον Logisim.