ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΩΝ -ΒΑΡΥΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΡΟΧΙΕΣ ΠΛΑΝΗΤΩΝ

Σύστημα δύο σωμάτων

Αλλαγή δυναμικών μεταβλητών

Αντί για τις θέσεις $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ χρησιμοποιούμε τα διανύσματα $\vec{R}$ και $\vec{r}$.

Με σημείο αναφοράς το O (LAB) αυτά είναι :

$$\left.\begin{array}{ll}\text{κέντρο μάζας :} & \vec{R}=\dfrac{m_1}{M}\vec{r}_1+\dfrac{m_2}{M}\vec{r}_2 \\ \text{σχετική απομάκρυνση του 2 από το 1:} & \vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\vec{r}_1=\vec{R}-\dfrac{m_2}{M}\vec{r} \\ \vec{r}_2=\vec{R}+\dfrac{m_1}{M}\vec{r}\end{array}\right.$$

Όπου $M=m_1+m_2$

Το διάνυσμα της σχετικής απομάκρυνσης ξεκινάει από τη θέση του σώματος 1 (m_1) και εκτείνεται μέχρι τη θέση του σώματος 2 (m_2).

Οι αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν για τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις

$$\left.\begin{array}{l}\vec{V}=\dfrac{m_1}{M}\vec{\upsilon}_1+\dfrac{m_2}{M}\vec{\upsilon}_2 \\ \vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_2-\vec{\upsilon}_1\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\vec{\upsilon}_1=\vec{V}-\dfrac{m_2}{M}\vec{\upsilon} \\ \vec{\upsilon}_2=\vec{V}+\dfrac{m_1}{M}\vec{\upsilon}\end{array}\right. \quad \text{και} \quad \left.\begin{array}{l}\vec{A}=\dfrac{m_1}{M}\vec{a}_1+\dfrac{m_2}{M}\vec{a}_2 \\ \vec{a}=\vec{a}_2-\vec{a}_1\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\vec{a}_1=\vec{A}-\dfrac{m_2}{M}\vec{a} \\ \vec{a}_2=\vec{A}+\dfrac{m_1}{M}\vec{a}\end{array}\right.$$

Επιλέγουμε τις $\vec{R}$ και $\vec{r}$ ώστε να αποσυνδέσουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης των $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ που είναι συζευγμένες μέσω της κοινής δύναμης αλληλεπίδρασης.

Αλλαγή σημείου αναφοράς

Αντί για το αρχικό σημείο αναφοράς O (LAB) επιλέγουμε ως σημείο αναφοράς το CM.

Κάθε διάνυσμα θέσης θα μεταβληθεί σε:

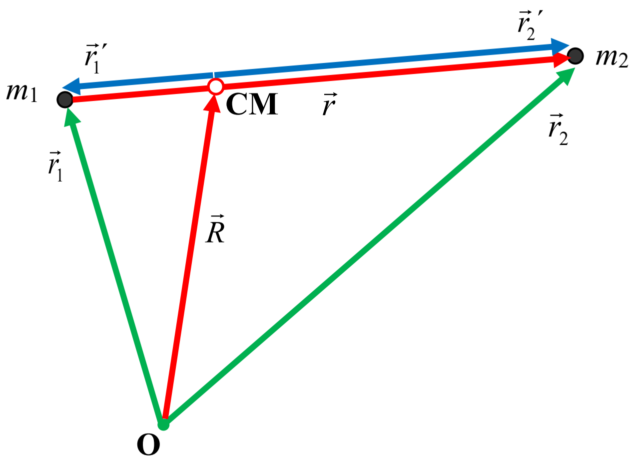
$$\vec{r}_1'=\vec{r}_1-\vec{R}$$
$$\vec{r}_2'=\vec{r}_2-\vec{R}$$

Οπότε η θέση του κέντρου μάζας θα είναι στο μηδέν (νέο σημείο αναφοράς)

$$\vec{R}'=\vec{R}-\vec{R}=0$$

ενώ το διάνυσμα της σχετικής απομάκρυνσης θα παραμείνει ίδιο

$$\vec{r}'=\vec{r}_2'-\vec{r}_1'=\vec{r}_2-\cancel{\vec{R}}-(\vec{r}_1-\cancel{\vec{R}})=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\vec{r}$$



Με σημείο αναφοράς το CM έχουμε:

κέντρο μάζας : $\vec{R}'=0$

σχετική απομάκρυνση του 2 από το 1: $\vec{r}'=\vec{r}$

$$\left.\begin{matrix}\vec{R}'=0\\ \vec{r}'=\vec{r}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\vec{r}_1{}'=-\dfrac{m_2}{M}\vec{r}\\ \vec{r}_2{}'=\dfrac{m_1}{M}\vec{r}\end{matrix}\right.$$

Οι αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν για τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις

$$\left.\begin{matrix}\vec{V}'=0\\ \vec{\upsilon}'=\vec{\upsilon}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\vec{\upsilon}_1{}'=-\dfrac{m_2}{M}\vec{\upsilon}\\ \vec{\upsilon}_2{}'=\dfrac{m_1}{M}\vec{\upsilon}\end{matrix}\right. \quad \text{και} \quad \left.\begin{matrix}\vec{A}=0\\ \vec{a}'=\vec{a}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\vec{a}_1{}'=-\dfrac{m_2}{M}\vec{a}\\ \vec{a}_2{}'=\dfrac{m_1}{M}\vec{a}\end{matrix}\right.$$

Στο σύστημα του CM τα διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης των σωματιδίων είναι συνάρτηση μόνο των σχετικών διανυσμάτων $\vec{r},\vec{\upsilon},\vec{a}$.

Ο λόγος των μέτρων των αποστάσεων από το CM r_1'/r_2' είναι αντιστρόφως ανάλογος των μαζών των σωμάτων. Δηλαδή το κέντρο μάζας βρίσκεται πιο κοντά στο σώμα με τη μεγαλύτερη μάζα:

$$\frac{r_1'}{r_2'}=\frac{m_2}{m_1}$$

<u>Χρειαζόμαστε τις εκφράσεις των κινηματικών μεταβλητών των δύο σωμάτων στο σύστημα του CM για να βρούμε τη μορφή της κινητικής ενέργειας K' και της στροφορμής $\vec{L}'$ ως προς το κέντρο μάζας</u> αφού έχουμε δείξει ότι για τη συνολική κινητική ενέργεια, στροφορμή και ορμή του συστήματος σωμάτων ισχύει

$$K=K_1+K_2=K_{CM}+K' \qquad K_{CM}=\frac{1}{2}MV^2 \qquad K'=K_1{}'+K_2{}'$$

$$\vec{L}=\vec{L}_1+\vec{L}_2=\vec{L}_{CM}+\vec{L}' \qquad \vec{L}_{CM}=M\vec{R}\times\vec{V} \qquad \vec{L}'=\vec{L}_1{}'+\vec{L}_2{}'$$

$$\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{P}_{CM}+0 \qquad \vec{P}_{CM}=M\vec{V} \qquad \vec{P}'=\vec{p}_1{}'+\vec{p}_2{}'=0$$

Επισημαίνουμε πάλι ότι στο σύστημα του κέντρου μάζας CM η συνολική ορμή είναι μηδέν γι’ αυτό και ονομάζεται και σύστημα μηδενικής ορμής.

Παρατηρούμε επίσης ότι οι K' και $\vec{L}'$ θα εξαρτώνται μόνο από τα μεγέθη της σχετικής κίνησης των δύο σωμάτων μεταξύ τους, $\vec{r}$, $\vec{\upsilon}$ τα οποία έχουν την ίδια τιμή στα δύο συστήματα LAB και CM

Πρόβλημα δύο σωμάτων

Η εύρεση της κίνησης δύο σωμάτων όταν υπόκεινται μόνο στην αμοιβαία αλληλεπίδρασή τους.

$$\vec{F}_{2/1}\equiv\vec{F}=-\vec{F}_{1/2}$$

Π.χ. ήλιος – πλανήτης, πυρήνας – ηλεκτρόνιο, δυο μάζες ενωμένες με ελατήριο, κλπ.

<u>*Κίνηση κέντρου μάζας*</u>

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt}=\vec{F}_{net}^{ext}=0\Rightarrow M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=0\Rightarrow \vec{R}=\vec{R}_0+\vec{V}_0\cdot t$$

Το κέντρο μάζας θα ηρεμεί ή θα κινείται με σταθερή ταχύτητα σύμφωνα με τις εκάστοτε αρχικές συνθήκες.

<u>*Σχετική κίνηση*</u>

$$\vec{a}=\vec{a}_2-\vec{a}_1=\frac{1}{m_2}\vec{F}_{2/1}-\frac{1}{m_1}\vec{F}_{1/2}=\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_1}\right)\vec{F}=\frac{1}{\mu}\vec{F}\Rightarrow\vec{a}=\frac{\vec{F}}{\mu}$$

Έτσι το πρόβλημα των δύο σωμάτων είναι ισοδύναμο μαθηματικά με αυτό ενός σώματος υπό την δύναμη αλληλεπίδρασης $\vec{F}=\vec{F}_{1/2}$ και με μάζα ίση με την ανηγμένη μάζα μ των δύο σωμάτων. Όπου η ανηγμένη μάζα μ ορίζεται από την έκφραση $\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}$ που εμφανίστηκε παραπάνω:

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\Rightarrow\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

Συμβολίζοντας τη μικρότερη μάζα με m και κρατώντας την σταθερή, η ανηγμένη μάζα μ παίρνει τις ακόλουθες οριακές τιμές καθώς η μεγαλύτερη μάζα M αλλάζει από m ως ∞ :

$$m = σταθ. < M, \qquad \mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1+m/M} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{M\to\infty} & \mu_{max} = m \\ \xrightarrow{M\to m} & \mu_{min} = m/2 \end{matrix}$$

Δηλαδή παίρνει ως ελάχιστη τιμή την $\mu_{min} = m/2$, δηλ. το μισό της κάθε μάζας, όταν οι δύο μάζες είναι ίσες $m_2 = m = m_1$, και μέγιστη τιμή την $\mu_{max} = m$ τη μικρή μάζα όταν η μεγαλύτερη μάζα τείνει στο άπειρο.

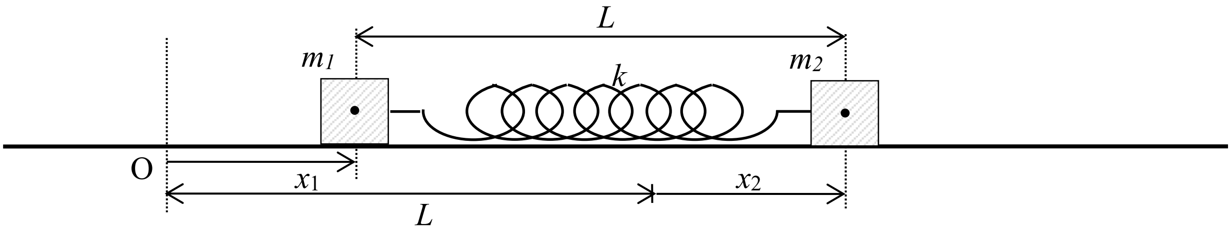
Ορίζοντας για το σύστημα των δύο σωμάτων την ορμή του ισοδύναμου ενός-σώματος (equivalent 1-Particle):

$$\vec{p} \equiv \vec{p}_{eq1P} = \mu\vec{\upsilon}$$

η διαφορική εξίσωση της σχετικής κίνησης είναι

$$\vec{F} = \mu\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Παραδείγματα προβλήματος δύο σωμάτων
Ελατήριο 1-D



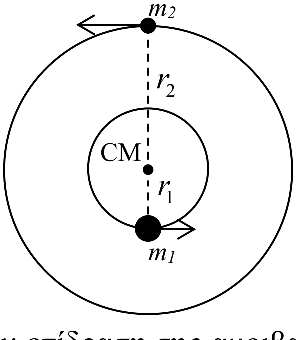
$$\begin{array}{llll} (1) \quad k(x_2 - x_1) = m_1 a_1 & (1)+(2) & 0 = MA & \text{ευθύγραμμη ομαλή} \\ & \longrightarrow & & \\ (2) \quad -k(x_2 - x_1) = m_2 a_2 & m_1(2) - m_2(1) & -kx = \mu a & \text{απλή αρμονική ταλάντωση με } \omega = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}} \end{array}$$

Βαρύτητα – Coulomb 3–D (Διπλός αστέρας – Άτομο Υδρογόνου)

$$\begin{array}{llll} (1) \quad -\dfrac{k}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^2} = m_1 a_1 & (1)+(2) & 0 = MA & \text{ευθύγραμμη ομαλή} \\ & \longrightarrow & & \\ (2) \quad \dfrac{k}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^2} = m_2 a_2 & m_1(2) - m_2(1) & -\dfrac{k}{r^2} = \mu a & \text{κύκλος, έλλειψη, παραβολή, υπερβολή} \end{array}$$

Για το άτομο του υδρογόνου τα παραπάνω δεν έχουν πρακτική αξία γιατί σωματίδια με ηλεκτρικό φορτίο όταν επιταχύνονται αποβάλλουν ενέργεια εκπέμποντας ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Έτσι θα έχαναν ενέργεια και το σύστημα (άτομο) θα κατέρρεε. Η αντιμετώπιση της σχετικής τους κίνησης πρέπει να γίνει κβαντομηχανικά.

Διπλός αστέρας σε κυκλική τροχιά



Δύο αστέρια που κινούνται υπό την επίδραση της αμοιβαίας βαρυτικής τους έλξης ονομάζονται διπλός αστέρας. Έστω ότι κινούνται σε κυκλικές τροχιές (ειδική περίπτωση). Οι αποστάσεις των δύο σωμάτων από το κέντρο μάζας τους (CM) που είναι και οι ακτίνες των κυκλικών τους τροχιών γύρω από το κέντρο μάζας θα είναι κατά τα γνωστά $r_1 = r\,m_2/M$ και $r_2 = r\,m_1/M$ και ισχύει $r_1/r_2 = m_2/m_1$

Για αυτά τα αστέρια μπορούμε να υπολογίσουμε την **ολική τους μάζα** $M = m_1 + m_2$, αν μετρήσουμε την απόσταση r μεταξύ τους και την περίοδο της περιστροφής τους T η οποία θα είναι η ίδια και για τα δύο αστέρια (για να μένει το κέντρο μάζας ακίνητο).

1ος τρόπος: Η σχετική τους θέση r διαγράφει κυκλική τροχιά με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2\pi/T$ και επιτάχυνση που είναι κεντρομόλος $a = a_c = \omega^2 r$ οπότε έχουμε :

$$F = \mu a \Rightarrow F_g = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a_c \Rightarrow G\frac{\cancel{m_1 m_2}}{r^2} = \frac{\cancel{m_1 m_2}}{M} \cdot \ \omega^2 r \Rightarrow M = \frac{r^3}{G}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

2ος τρόπος: Για τον καθένα από τους αστέρες, π.χ. τον 2, έχουμε:

$$F_{net,2} = m_2 a_2 \Rightarrow F_g = m_2 a_{2\kappa} \Rightarrow G\frac{m_1 \cancel{m_2}}{r^2} = \cancel{m_2}\omega^2 r_2 \Rightarrow G\frac{m_1}{r^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r\frac{m_1}{M} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Χρήσιμες εκφράσεις για σύστημα δύο σωμάτων

Κάνουμε τις πράξεις και υπολογίζουμε

$$\vec{P}' = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' = m_1\vec{\upsilon}_1{}' + m_2\vec{\upsilon}_2{}' = m_1\left(-\frac{m_2}{M}\vec{\upsilon}\right) + m_2\left(\frac{m_1}{M}\vec{\upsilon}\right) = 0$$

$$K' = K_1{}' + K_2{}' = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}m_1\left(-\frac{m_2}{M}\vec{\upsilon}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{M}\vec{\upsilon}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{M^{\cancel{2}}}\upsilon^2\cancel{(m_1 + m_2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\mu\upsilon^2 = \frac{p^2}{2\mu} \equiv K_{rel}$$

$$\vec{L}' = m_1\vec{r}_1{}' \times \vec{\upsilon}_1{}' + m_2\vec{r}_2{}' \times \vec{\upsilon}_2{}' = m_1\left(-\frac{m_2}{M}\vec{r}\right) \times \left(-\frac{m_2}{M}\vec{\upsilon}\right) + m_2\left(\frac{m_1}{M}\vec{r}\right) \times \left(\frac{m_1}{M}\vec{\upsilon}\right) =$$

$$= \frac{m_1 m_2}{M^{\cancel{2}}}\vec{r} \times \vec{\upsilon}\cancel{(m_1 + m_2)} = \mu\vec{r} \times \vec{\upsilon} = \vec{r} \times \vec{p} \equiv \vec{L}_{rel}$$

Οπότε για ένα σύστημα δύο σωμάτων οι εκφράσεις της ολικής κινητικής ενέργειας, της ολικής στροφορμής και της ολικής ορμής είναι

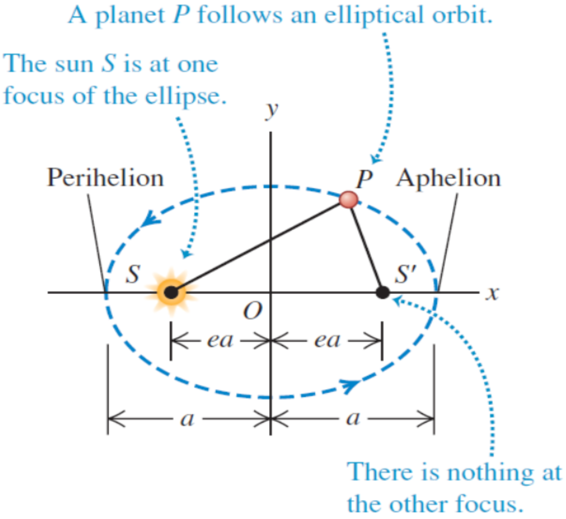
LAB	CM
$K = K_{CM} + K' = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu\upsilon^2$	$K' = K_{rel} = \frac{1}{2}\mu\upsilon^2$
$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}' = M\vec{R} \times \vec{V} + \mu\vec{r} \times \vec{\upsilon} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{p}$	$\vec{L}' = \vec{L}_{rel} = \mu\vec{r} \times \vec{\upsilon}$
$\vec{P} = \vec{P}_{CM} = M\vec{V}$	$\vec{P}' = 0$

Όπου $\vec{p}$ είναι η ορμή του ισοδύναμου ενός-σώματος : $\vec{p} \equiv \vec{p}_{eq1P} = \mu\vec{\upsilon}$

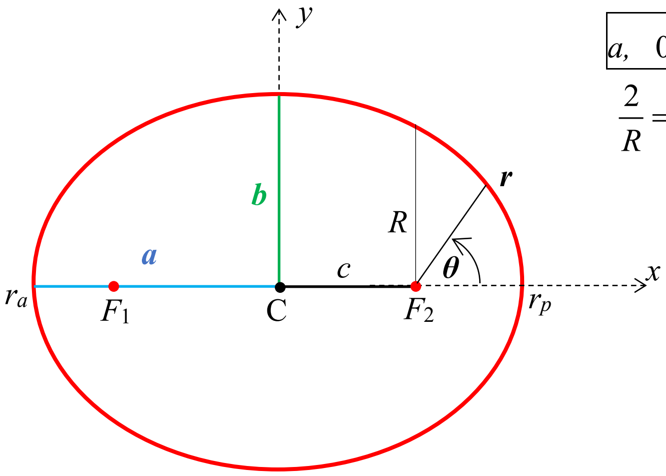
Σύστημα δύο σωμάτων αποτελεί ένας πλανήτης με έναν ήλιο.
Η τροχιά των πλανητών αποτέλεσε πρόβλημα αιώνων, από την αρχαιότητα.
Για τις τροχιές των πλανητών ισχύουν τρείς εμπειρικοί νόμοι (1609, 1619) τους οποίους ανακάλυψε ο Johannes Kepler (Ιωάννης Κέπλερ) αναλύοντας τα πολυάριθμα και ακριβή αστρονομικά δεδομένα του Tycho Brahe (Τύχωνας Μπραχέ).

Οι τρεις νόμοι του Kepler

1ος νόμος Kepler : Οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις με τον Ήλιο στη μια εστία της έλλειψης



Η γεωμετρία της έλλειψης δίνεται στο παρακάτω σχήμα



F_1, F_2: εστίες C: κέντρο

$\boxed{a,\quad 0<e<1:\quad b=a\sqrt{1-e^2}\,,\ c=ea\,,\quad R=a(1-e^2)=b^2/a}$

$$\frac{2}{R}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_p}\,,\qquad a=\frac{r_a+r_p}{2}\,,\qquad b=\sqrt{r_a r_p}\,,\qquad e=\frac{r_a-r_p}{r_a+r_p}$$

Καρτεσιανές από το C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Πολικές από το F2: $r=\dfrac{R}{1+e\cos\theta}$,

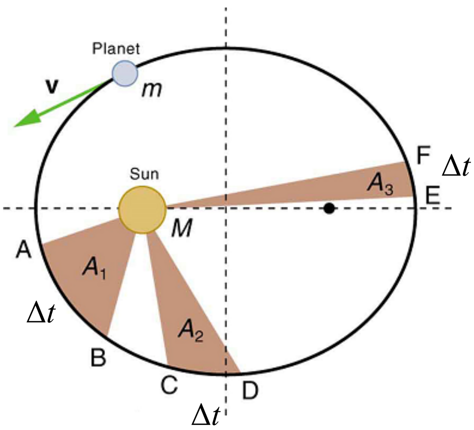
Περιήλιο: $r_p=\dfrac{R}{1+e}=a(1-e)$,

Αφήλιο : $r_a=\dfrac{R}{1-e}=a(1+e)$

Εμβαδόν: $A=\pi ab$

a: μεγάλος ημιάξονας
b : μικρός ημιάξονας
c : απόσταση κέντρου-εστιών
e : εκκεντρότητα
R : ορθή εστιακή ημιχορδή
r_p : απόσταση περιηλίου
r_a : απόσταση αφηλίου

2^ος^ νόμος Kepler : Η εμβαδική ταχύτητα κάθε πλανήτη είναι σταθερή. Δηλαδή τα εμβαδά που σαρώνει η επιβατική ακτίνα σε ίσα χρονικά διαστήματα είναι ίσα μεταξύ τους.



$A_1=A_2=A_3$

$$\frac{dA}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Οι ίσες επιφάνειες $A_1 = A_2 = A_3$ σαρώνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα $\Delta t = t_B - t_A = t_D - t_C = t_F - t_E$

3ος νόμος Kepler : Στο ηλιακό μας σύστημα ο λόγος των περιόδων δύο οποιονδήποτε πλανητών είναι ανάλογος με το λόγο των κύριων ημιαξόνων τους στη δύναμη 3/2 :

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{3/2}$$

Για όλους τους πλανήτες : $\frac{T^2}{a^3} = \sigma\tau\alpha\theta. \simeq 3,0 \times 10^{-19}$ (SI)

Τα δεδομένα που είχε ο Kepler φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Οι αποστάσεις είναι σε μονάδες au. Η au (astronomical unit) είναι η απόσταση Γης – Ήλιου 1 au = 1,495 978 707 10^{11} m ακριβώς ≈ 150 εκατομμύρια χιλιόμετρα.

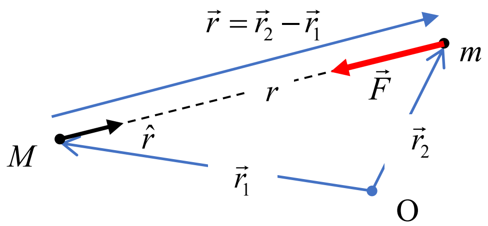
Πλανήτης	Κύριος ημιάξονας *a* (au)	Περίοδος (d =ημέρες)	$\frac{a^3}{T^2}$ $\left(10^{-6}\,\frac{\mathrm{au}^3}{\mathrm{d}^2}\right)$
Ερμής	0,389	87,77	7,64
Αφροδίτη	0,724	224,70	7,52
Γη	1	365,25	7,50
Άρης	1,524	686,95	7,50
Δίας	5,20	4332,62	7,49
Κρόνος	9,510	10759,2	7,43

Οι εμπειρικοί αυτοί νόμοι του Kepler, μπορούν όλοι να αποδειχθούν από μία μόνο απλή υπόθεση, το νόμο της βαρύτητας του Νεύτωνα (1687).

Ο νόμος της παγκόσμιας βαρύτητας του Νεύτωνα (1687).

Η αμοιβαία δύναμη μεταξύ δύο ουράνιων σωμάτων είναι κεντρική, ανάλογη με το γινόμενο των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της μεταξύ τους απόστασης:

$$\vec{F}_{2/1} = \vec{F}(r) = -\frac{k}{r^2}\hat{r} \qquad \text{με } k = GMm \qquad \text{και} \quad G = 6{,}67\times10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2} \text{ (Cavendish 1798)}$$



Άμεσες συνέπειες για απομονωμένο σύστημα δύο σωμάτων όπου : $\vec{F}^{ext}_{net} = 0$, $\vec{\tau}^{ext}_{net} = 0$

Διατήρηση ορμής (από αμοιβαιότητα)

$$\vec{F}_{2/1} = -\frac{k}{r^2}\hat{r} = -\vec{F}_{1/2} \equiv \vec{F} \qquad \text{(δράση – αντίδραση)}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{net} = \cancel{\vec{F}^{ext}_{net}} + \vec{F}^{int}_{net} = \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P}_{CM} = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow$$

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}_{CM}}{M} = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}t$$

$$\vec{L}_{CM} = M\vec{R}\times\vec{V} = M\left(\vec{R}_0+\vec{V}t\right)\times\vec{V} = M\vec{R}_0\times\vec{V} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

$$K_{CM} = \frac{1}{2}MV^2 = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Διατήρηση ενέργειας. Οι κεντρικές δυνάμεις είναι διατηρητικές, άρα ορίζεται δυναμική ενέργεια.

$$d(E_1+E_2) = \vec{F}_{1/2}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{2/1}\cdot d\vec{r}_2 = -\vec{F}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 \Rightarrow = \vec{F}\cdot d(\vec{r}_2-\vec{r}_1) = \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow$$

$$d(E_1+E_2) - F\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow d(E_1+E_2)+dU = 0 \Rightarrow d(E_1+E_2+U) = 0$$

$$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_r^\infty dU = -\int_r^\infty \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow \cancel{U(\infty)} - U(r) = -\int_r^\infty \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow$$

Υπάρχει συνάρτηση δυναμικής ενέργειας: $U(r) = \int_r^\infty \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\dfrac{k}{r}$

$$E_1+E_2+U = Mc^2+K_1+mc^2+K_2+U = (M+m)c^2+K_{CM}+K_{rel}+U = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow$$

$$E = K_{rel}+U = \frac{1}{2}\mu\upsilon^2 - \frac{k}{r} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Για δύο οποιαδήποτε σημεία της τροχιάς θα ισχύει

$$E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\upsilon_A^2 - \frac{k}{r_A} = \frac{1}{2}\mu\upsilon_B^2 - \frac{k}{r_B}$$

Επειδή η κινητική ενέργεια είναι πάντα θετική και η δυναμική ενέργεια γίνεται μηδέν στο άπειρο, το πρόσημο της ενέργειας καθορίζει αν η τροχιά θα είναι ανοικτή ή κλειστή. Δηλαδή αν ο πλανήτης και ο ήλιος θα κινούνται σε περιορισμένες τροχιές γύρω από το κέντρο μάζας τους με σχετική απομάκρυνση μέσα σε κάποια όρια $r_p \le r \le r_a$ ή αν θα απομακρυνθούν έως το άπειρο $r_p \le r < \infty$

Αν η ενέργεια είναι μεγαλύτερη ή ίση από το μηδέν τα σώματα μπορούν να απομακρυνθούν απεριόριστα, δηλαδή το r μπορεί να πάρει την τιμή ∞:

$$E = E_\infty \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\upsilon_\infty^2 - \frac{k}{\infty} \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\upsilon_\infty^2 \ge 0 \text{ ΙΣΧΥΕΙ}$$

Για αρνητική ενέργεια αυτό δεν ισχύει άρα η κίνηση θα είναι περιορισμένη, το r δεν μπορεί να πάρει την τιμή ∞:

$$E = E_\infty < 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\upsilon_\infty^2 - \frac{k}{\infty} < 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\upsilon_\infty^2 < 0 \text{ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ}$$

Η απόσταση ελάχιστης απομάκρυνσης r_p ονομάζεται περιήλιο (perihelion) ενώ ή απόσταση μέγιστης απομάκρυνσης r_a ονομάζεται αφήλιο (aphelion) [για σώματα εκτός ηλιακού συστήματος ονομάζονται περίκεντρο ή περιαψίδα και απόκεντρο ή αποαψίδα].

Ο λόγος
$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$
ονομάζεται εκκεντρότητα της τροχιάς (για κύκλο είναι ίση με μηδέν). Επειδή $r_p \le r \le r_a \Rightarrow 0 \le e < 1$

Στο περιήλιο και στο αφήλιο η ταχύτητα δεν μπορεί να έχει ακτινική συνιστώσα και άρα είναι κάθετη στην ακτίνα ($\vec{\upsilon}_a \perp \vec{r}_a$ και $\vec{\upsilon}_p \perp \vec{r}_p$) αλλιώς ο πλανήτης θα πλησίαζε ή αντίστοιχα θα απομακρύνονταν περισσότερο.

Διατήρηση στροφορμής (επειδή οι δυνάμεις είναι κεντρικές δεν παράγουν ροπές)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{net} = \cancel{\vec{\tau}_{net}^{ext}} + \vec{\tau}_{net}^{int} = \vec{r}_1\times\vec{F}_{1/2} + \vec{r}_2\times\vec{F}_{2/1} = -\frac{k}{r^2}\left(-\vec{r}_1\times\hat{r} + \vec{r}_2\times\hat{r}\right) = -\frac{k}{r^2}\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)\times\hat{r} = -\frac{k}{r^2}\vec{r}\times\hat{r} = 0$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel} = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \vec{L}_{rel} = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \vec{r}_A\times\vec{\upsilon}_A = \vec{r}_B\times\vec{\upsilon}_B$$

Για τα σημεία μέγιστης και ελάχιστης απομάκρυνσης που η σχετική ταχύτητα δεν μπορεί να έχει ακτινική συνιστώσα και είναι $\vec{\upsilon}_a \perp \vec{r}_a$ και $\vec{\upsilon}_p \perp \vec{r}_p$ έχουμε :

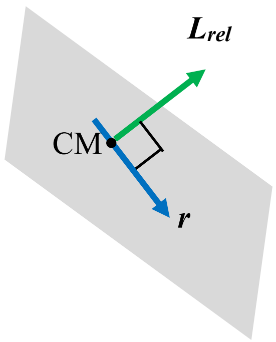
$$\frac{L_{rel}}{\mu} = r_a \upsilon_a = r_p \upsilon_p$$

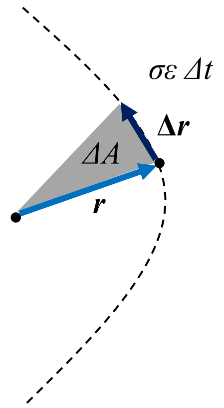
Από τη διατήρηση της στροφορμής συνεπάγεται :

1) ότι η τροχιά είναι επίπεδη
2) ο $2^{ος}$ νόμος του Kepler

1) Επειδή η ακτίνα $\vec{r}$ είναι πάντα κάθετη στη στροφορμή $\vec{L}_{rel} = \vec{r} \times \vec{\upsilon} = \sigma\tau\alpha\theta.$ η οποία στην περίπτωσή μας είναι ένα σταθερό διάνυσμα, το διάνυσμα της $\vec{r}$ θα κείται πάντα στο επίπεδο που είναι κάθετο στην $\vec{L}_{rel}$ και περνάει από το κέντρο μάζας:

$$\vec{r}\cdot \vec{L}_{rel} = \vec{r}\cdot \left(\vec{r}\times\vec{p}\right) = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{L}_{rel}$$





2) Το «τριγωνάκι» που σαρώνει η επιβατική ακτίνα $\vec{r}$ σε χρόνο Δt έχει εμβαδό $\Delta A = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\Delta\vec{r}\right|$

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{\upsilon}\right| = \frac{1}{2\mu}\left|\vec{L}_{rel}\right| = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Πρόσθετο διατηρούμενο μέγεθος λόγω δύναμης αντίστροφου τετραγώνου $F \propto 1/r^2$

Επειδή η δύναμη εξαρτάται από **<u>το αντίστροφο του τετραγώνου της απόστασης</u>** προκύπτει (ειδικά και μόνο για αυτού του είδους τη δύναμη) ότι εκτός από τη στροφορμή και την ενέργεια διατηρείται και το παρακάτω διάνυσμα

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu k}\vec{p}\times\vec{L}_{rel} - \hat{r} = \frac{\mu}{k}\vec{\upsilon}\times\left(\vec{r}\times\vec{\upsilon}\right) - \hat{r} = \frac{1}{G(M+m)}\vec{\upsilon}\times\left(\vec{r}\times\vec{\upsilon}\right) - \hat{r}$$

όπου $\vec{p} = \mu\vec{\upsilon}$ η ορμή του ισοδύναμου ενός σώματος

$\vec{L}_{rel} = \mu\vec{r}\times\vec{\upsilon} = \vec{r}\times\vec{p}$ η σχετική στροφορμή ως προς το CM

Για να δείξουμε τη σταθερότητα του $\vec{e}$, θα χρειαστούμε τα παρακάτω

$\vec{r} = r\hat{r}$, $\qquad \hat{r}\cdot\dot{\hat{r}} = 0$,

$\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$ $\qquad \vec{p} = \mu\vec{\upsilon} = \mu\dot{r}\hat{r} + \mu r\dot{\hat{r}}$, $\quad \dot{\vec{p}} = \vec{F}_{net} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$

$\vec{p}\cdot\hat{r} = \mu\dot{r}$ $\qquad \dot{\hat{r}} = \frac{\vec{p}}{\mu r} - \frac{\dot{r}}{r}\hat{r} = \frac{\vec{p}}{\mu r} - \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{\mu r}\hat{r}$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mu k}\vec{p}\times\vec{L}_{rel} - \hat{r}\right) = \frac{1}{\mu k}\dot{\vec{p}}\times\vec{L}_{rel} + \frac{1}{\mu k}\vec{p}\times\cancel{\dot{\vec{L}}_{rel}} - \dot{\hat{r}} = \frac{1}{\mu \cancel{k}}\left(-\frac{\cancel{k}}{r^2}\hat{r}\right)\times(\vec{r}\times\vec{p}) - \left(\frac{\vec{p}}{\mu r} - \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{\mu r}\hat{r}\right)$$

$$-\frac{1}{\mu r^2}\left(\left(\hat{r}\cdot\vec{p}\right)\vec{r} - \left(\hat{r}\cdot\vec{r}\right)\vec{p}\right) - \frac{k}{\mu r}\vec{p} + \frac{k}{\mu r}\left(\vec{p}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} = \cancel{-\frac{k}{\mu r}\left(\hat{r}\cdot\vec{p}\right)\hat{r}} + \cancel{\frac{k}{\mu r}\vec{p}} - \cancel{\frac{k}{r}\vec{p}} + \cancel{\frac{k}{r}\left(\vec{p}\cdot\hat{r}\right)\hat{r}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{e}=\sigma\tau\alpha\theta.$$

Τροχιές από το διάνυσμα $\vec{e}$ (ο πιο σύντομος δρόμος)

Για να βρούμε την τροχιά παίρνουμε απλώς το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\vec{e}$ με την ακτίνα $\vec{r}$.
Θα χρειαστούμε την ταυτότητα : $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

$$\left.\begin{aligned}&\vec{e}\cdot\vec{r}=|\vec{e}|\,r\cos\theta\\ &\vec{e}\cdot\vec{r}=\vec{r}\cdot\left(\frac{1}{\mu k}\vec{p}\times\vec{L}_{rel}-\hat{r}\right)=\frac{1}{\mu k}(\vec{r}\times\vec{p})\cdot\vec{L}_{rel}-r=\frac{L_{rel}^2}{\mu k}-r\end{aligned}\right\}\Rightarrow|\vec{e}|\,r\cos\theta=\frac{L_{rel}^2}{\mu k}-r\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|\vec{e}|\,r\cos\theta+r=\frac{L_{rel}^2}{\mu k}\Rightarrow r\left(1+|\vec{e}|\cos\theta\right)=\frac{L_{rel}^2}{\mu k}$$

Άρα

$$\boxed{r=\frac{\left(\dfrac{L_{rel}^2}{\mu k}\right)}{1+|\vec{e}|\cos\theta}=\frac{R}{1+e\cos\theta}}$$

Αυτή είναι η εξίσωση μιας κωνικής τομής (κύκλος, έλλειψη, παραβολή, υπερβολή) σε πολικές συντεταγμένες με εκκεντρότητα e και ορθή εστιακή ημιχορδή R ίσες με :

$$R=\frac{L_{rel}^2}{\mu k},\qquad e=|\vec{e}|$$

Για το λόγο αυτό το διάνυσμα $\vec{e}$ ονομάζεται **διάνυσμα εκκεντρότητας**

Άρα από το νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας του Νεύτωνα προκύπτει και ο 1ος εμπειρικός νόμος του Kepler.

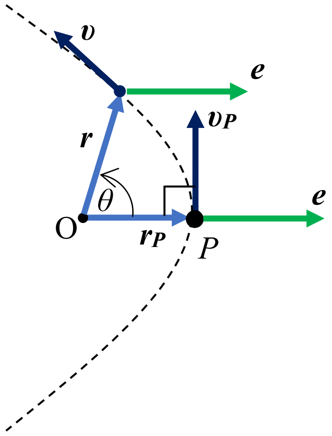
Κατεύθυνση και μέτρο του διανύσματος εκκεντρότητας $\vec{e}$

Επειδή το $\vec{e}$ είναι σταθερό παρέχει έναν άξονα για να μετριέται η γωνία θ στην επίπεδη τροχιά.
Αφού το διάνυσμα είναι σταθερό για να βρούμε την κατεύθυνσή του το υπολογίζουμε σε ένα κατάλληλο σημείο της επίπεδης τροχιάς. Κάθε τροχιά έχει ένα σημείο μέγιστης προσέγγισης, το περιήλιο, όπου η ταχύτητα είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης,

$$\vec{e}=\frac{\mu}{k}\vec{\upsilon}_P\times\left(\vec{r}_P\times\vec{\upsilon}_P\right)-\hat{r}_P=\frac{\mu}{k}\left(\vec{\upsilon}_P\cdot\vec{\upsilon}_P\right)\vec{r}_P-\frac{\mu}{k}\cancel{\left(\vec{\upsilon}_P\cdot\vec{r}_P\right)}\vec{\upsilon}_P-\hat{r}_P=\frac{\mu}{k}\upsilon_P^2\vec{r}_p-\frac{\vec{r}_P}{r_p}=\frac{1}{k}\left(\mu\upsilon_P^2-\frac{k}{r_p}\right)\vec{r}_P$$

Ο όρος στην παρένθεση είναι ίσος με $2K_p+U_p=K_p+E$ και άρα είναι θετικός για $E>0$ δηλαδή για ανοιχτές τροχιές (παραβολές, υπερβολές). Δείχνουμε παρακάτω ότι είναι θετικός και για κλειστές τροχιές

Άρα το διάνυσμα $\vec{e}$ είναι στην κατεύθυνση του $\vec{r}_P$ δηλαδή από την αρχή του $\vec{r}$ (εκεί που βρίσκεται ο ήλιος μάζας M) προς το περιήλιο P.



Για να δείξουμε ότι ο όρος στην παρένθεση είναι θετικός για περιορισμένες τροχιές χρησιμοποιούμε τη διατήρηση της ενέργειας και της στροφορμής στο αφήλιο και στο περιήλιο $r_p \le r \le r_a$:

$$r_a\upsilon_a = r_p\upsilon_p \Rightarrow \upsilon_a = \frac{r_p}{r_a}\upsilon_p$$

$$\frac{1}{2}\mu\upsilon_p^2 - \frac{k}{r_p} = \frac{1}{2}\mu\upsilon_a^2 - \frac{k}{r_a} \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\left(\upsilon_p^2 - \upsilon_a^2\right) = k\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\upsilon_p^2\left(1 - \frac{r_p^2}{r_a^2}\right) = k\frac{r_a - r_p}{r_a r_p} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\mu\upsilon_p^2\frac{r_a^2 - r_p^2}{r_a^{\cancel{2}}} = k\frac{r_a - r_p}{\cancel{r_a}r_p} \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\upsilon_p^2\frac{\cancel{(r_a - r_p)}(r_a + r_p)}{r_a} = k\frac{\cancel{(r_a - r_p)}}{r_p} \Rightarrow \mu\upsilon_p^2 = \frac{k}{r_p}\frac{2r_a}{r_a + r_p}$$

Οπότε ο όρος στην παρένθεση είναι θετικός

$$\mu\upsilon_P^2 - \frac{k}{r_p} = \frac{k}{r_p}\frac{2r_a}{r_a + r_p} - \frac{k}{r_p} = \frac{k}{r_p}\left(\frac{2r_a}{r_a + r_p} - 1\right) = \frac{k}{r_p}\frac{2r_a - (r_a + r_p)}{r_a + r_p} = \frac{k}{r_p}\frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} > 0$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = e$ είναι η εκκεντρότητα της τροχιάς και τελικά έχουμε

$$\mu\upsilon_P^2 - \frac{k}{r_p} = \frac{k}{r_p}e$$

Άρα πράγματι το μέτρο του διανύσματος $\vec{e}$ είναι ίσο με την εκκεντρότητα της τροχιάς

$$\left|\vec{e}\right| = \frac{1}{k}\left(\mu\upsilon_P^2 - \frac{k}{r_p}\right)\left|\vec{r}_P\right| = \frac{1}{k}\frac{k}{r_p}er_p = e$$

$$\vec{e} = e\hat{r}_p$$

Κυκλικές τροχιές

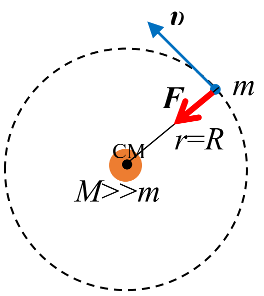
$$e = 0, \quad r = R = \sigma\tau\alpha\theta$$

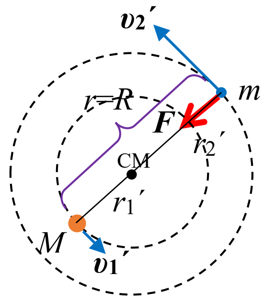
Στις κυκλικές τροχιές δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε όλο τον παραπάνω μηχανισμό.
Απλά εξισώνουμε τη δύναμη της βαρύτητας με την κεντρομόλο δύναμη.

Ταχύτητα κυκλικής τροχιάς

<u>Για *M*>>*m*</u> $\mu \to m$ και $\vec{r}_1{}' = -\frac{m}{M+m}\vec{r} \to 0, \quad \vec{r}_2{}' = \frac{M}{M+m}\vec{r} \to \vec{r}$

$$\vec{\upsilon}_1{}' = -\frac{m}{M+m}\vec{\upsilon} \to 0, \quad \vec{\upsilon}_2{}' = \frac{M}{M+m}\vec{\upsilon} \to \vec{\upsilon}$$





Η βαρυτική δύναμη $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$ παρέχει την κεντρομόλο επιτάχυνση :

$$\sum F_r = ma_c \Rightarrow G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$ **δεν εξαρτάται από τη μάζα *m* του δορυφόρου**

Π.χ. ταχύτητα διεθνούς διαστημικού σταθμού που βρίσκεται σε ύψος 409 km πάνω από την επιφάνεια της Γης

$M_E = (5{,}9722 \pm 0{,}0006)\times 10^{24}$ kg, $G = 6{,}6743\times 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}, $GM_E = 39{,}860\times 10^{13}$ m^{3}s^{-2}

$R_E = 6.371$ km, $R = R_E + h = 6.371 + 409 = 6.780$ km

$$\upsilon = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{39{,}860\times 10^{13}}{0{,}6780\times 10^{7}}} = 10^3\sqrt{58{,}7906} = 7{,}67 \text{ km/s}$$

$$\text{Περίοδος } T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{2\pi\cdot\ 6.780}{7{,}67} = 5.555{,}7 \text{ s} \approx 92{,}6 \text{ min}$$

Π.χ. ταχύτητα δορυφόρου σε ύψος λίγο πάνω από την επιφάνεια της Γης (tree top satellite)

$R = R_E = 6.371$ km

$$\upsilon = \sqrt{\frac{GM}{R_E}} = \sqrt{\frac{39{,}860\times 10^{13}}{0{,}6371\times 10^{7}}} = 10^3\sqrt{62{,}56475} = 7{,}91 \text{ km/s}$$

$$\text{Περίοδος } T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{2\pi\cdot\ 6.371}{7{,}91} = 5.060{,}7 \text{ s} \approx 84{,}3 \text{ min}$$

Για *M*>*m* έχουμε κανονικά

$$\vec{r}_1{}' = -\frac{m}{M+m}\vec{r}, \quad \vec{r}_2{}' = \frac{M}{M+m}\vec{r}$$
$$\vec{\upsilon}_1{}' = -\frac{m}{M+m}\vec{\upsilon}, \quad \vec{\upsilon}_2{}' = \frac{M}{M+m}\vec{\upsilon}$$

Βρίσκουμε πρώτα τη σχετική ταχύτητα υ και στη συνέχεια τις ταχύτητες των σωμάτων γύρω από το CM

$$\sum F_r = \mu a \Rightarrow GM\frac{m}{R^2} = \mu\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{GMm}{\mu R}} = \sqrt{\frac{G(M+m)}{R}}$$

$$\upsilon_1{}' = \frac{m}{M+m}\sqrt{\frac{G(M+m)}{R}} = m\sqrt{\frac{G}{(M+m)R}} \quad , \quad \vec{\upsilon}_2{}' = \frac{M}{M+m}\sqrt{\frac{G(M+m)}{R}} = M\sqrt{\frac{G}{(M+m)R}}$$

3ος *νόμος Kepler*

Για *M*>>*m*

$$\upsilon = \sqrt{\frac{GM}{R}} \Rightarrow \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R}} \Rightarrow \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R} \Rightarrow T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)R^3$$ 3ος νόμος Kepler

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$M = \dfrac{2\pi}{G}\dfrac{R^3}{T^2}$ από την ακτίνα και την περίοδο των πλανητών βρίσκουμε τη μάζα του ήλιου

<u>Για *M>m*</u>

$$R = r_1' + r_2'$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{G(M+m)}{R}} \Rightarrow \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{G(M+m)}{R}} \Rightarrow T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G(M+m)}\right) R^3 \qquad 3^{ος} \text{ νόμος Kepler}$$

Όπως στο παράδειγμα του διπλού αστέρα παραπάνω.

Ενέργεια κυκλικής τροχιάς

<u>Για *M>>m*</u>

$K = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} m \frac{GM}{R}$, $\quad U = -\frac{GMm}{R}$. $\quad$ Παρατηρούμε ότι $U = -2K \Rightarrow K = -\frac{U}{2}$

$$E = K + U = \frac{1}{2} m \frac{GM}{R} - m \frac{GM}{R} \Rightarrow$$

$$E = -\frac{GMm}{2R} < 0$$

Παρατηρούμε ότι $E = -K$ και $E = \frac{U}{2}$

<u>Για *M>m*</u>

$K = \frac{1}{2} \mu\upsilon^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{G(M+m)}{R} = \frac{1}{2} \frac{GMm}{R}$, $\quad U = -\frac{GMm}{R}$.

Παρατηρούμε ότι οι εκφράσεις δεν άλλαξαν και επίσης έχουμε πάλι : $U = -2K \Rightarrow K = -\frac{U}{2}$

$$E = K + U = \frac{1}{2} m \frac{GM}{R} - m \frac{GM}{R} \Rightarrow$$

$$E = -\frac{GMm}{2R} < 0$$

Παρατηρούμε πάλι ότι $E = -K$ και $E = \frac{U}{2}$

Στροφορμή κυκλικής τροχιάς

<u>Για *M>>m*</u>

$$L = m\upsilon R = m\sqrt{\frac{GM}{R}} R = m\sqrt{GMR}$$

<u>Για *M>m*</u>

$$L = \mu\upsilon R = \mu\sqrt{\frac{G(M+m)}{R}} R = \mu\sqrt{G(M+m)R}$$

Σχέση ενέργειας στροφορμής

$$L = \mu\sqrt{G(M+m)R} \Rightarrow R = \frac{L^2}{\mu^2 G(M+m)}$$

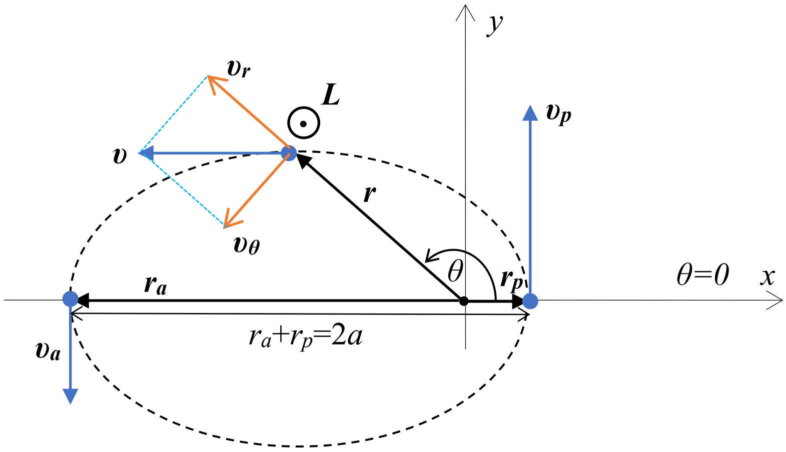
$$E = -\frac{GMm}{2R} = -\frac{GMm}{\frac{2L^2}{\mu^2 G(M+m)}} \Rightarrow 2EL^2 = -\mu^2 G(M+m) GMm = -\mu \frac{Mm}{\cancel{M+m}} \cancel{(M+m)} G^2 Mm$$

$$\boxed{2EL^2 = -\mu (GMm)^2}$$

Ελλειπτικές τροχιές

Βρίσκουμε πρώτα την ενέργεια και στη συνέχεια από την ενέργεια την ταχύτητα.
Χρησιμοποιούμε το αφήλιο και το περιήλιο.
Στο αφήλιο r_a και στο περιήλιο r_p η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα.
Επίσης η στροφορμή και η ενέργεια διατηρούνται.

Αν θέλουμε την περίπτωση $M>>m$ αντικαθιστούμε σε όλες τις παρακάτω εκφράσεις $\mu\to m$, $M+m\to M$.



Ενέργεια ελλειπτικής τροχιάς

<u>1ος τρόπος</u> : διατήρηση ενέργειας και στροφορμής στο περιήλιο και στο αφήλιο

$$E_a = E_p \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\upsilon_a^2 - \frac{k}{r_a} = \frac{1}{2}\mu\upsilon_p^2 - \frac{k}{r_p} \qquad (k = GMm) \qquad (1)$$

$$L_a = L_p \Rightarrow m\upsilon_a r_a = m\upsilon_p r_p \qquad (2)$$

Από την (1) χρησιμοποιώντας την (2) βρίσκουμε την ταχύτητα υ_a σαν συνάρτηση του r_a και υπολογίζουμε την E.

$$\frac{1}{2}\mu\upsilon_a^2 - \frac{k}{r_a} = \frac{1}{2}\mu\upsilon_p^2 - \frac{k}{r_p} \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\upsilon_a^2 - \frac{1}{2}\mu\frac{r_a^2}{r_p^2}\upsilon_a^2 = k\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\upsilon_a^2\left(\frac{r_p^2 - r_a^2}{r_p^2}\right) = k\frac{r_p - r_a}{r_p r_a} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\mu\upsilon_a^2\frac{(r_p - r_a)(r_p + r_a)}{r_p} = k\frac{r_p - r_a}{r_a} \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\upsilon_a^2 2a = GM\frac{r_p}{r_a} \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\upsilon_a^2 = k\frac{2a - r_a}{2ar_a} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\mu\upsilon_a^2 = k\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{2a}\right)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την

$$a = \frac{r_a + r_p}{2}.$$

Οπότε η ενέργεια της τροχιάς είναι

$$E = \frac{1}{2}\mu\upsilon_a^2 - \frac{k}{r_a} = k\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{2a}\right) - \frac{k}{r_a} \Rightarrow$$

$$E = -\frac{k}{2a} = -\frac{GMm}{2a}$$

Επιβεβαιώνουμε ότι παίρνουμε την ενέργεια της κυκλικής τροχιάς για $a=R$.

<u>2ος τρόπος</u> : διατήρηση ενέργειας και στροφορμής σε τυχαίο σημείο

$$E = \frac{1}{2}\mu\upsilon^2 - \frac{k}{r} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_r + \vec{\upsilon}_\theta = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} \Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon_r^2 + \upsilon_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{k}{r}$$

$$\vec{L} = \mu\vec{r}\times\vec{\upsilon} = \mu\vec{r}\times\vec{\upsilon}_\theta \Rightarrow \vec{L} = \mu r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{z} \Rightarrow L^2 = \mu^2 r^4\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \Rightarrow \mu r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{\mu r^2}$$

$$E=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2}-\frac{k}{r}\Rightarrow 2\mu E r^2+2\mu k r-L^2-\mu^2r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=0$$

Όταν $\frac{dr}{dt}=0$, δηλαδή στο αφήλιο και στο περιήλιο, η παραπάνω γίνεται μια δευτεροβάθμια ως προς *r* οι λύσεις της οποίας είναι το r_a και το r_p :

$$2\mu E\cdot r^2+2\mu k\cdot r-L^2=0$$

$$r_{a,p}=\frac{-2\mu k\pm\sqrt{4\mu^2k^2+8\mu EL^2}}{4\mu E}=-\frac{k}{2E}\pm\frac{\sqrt{\mu^2k^2+2\mu EL^2}}{2\mu E}$$

Όμως : $r_a+r_p=2a\Rightarrow-\frac{k}{2E}=2a\Rightarrow E=-\frac{k}{2a}=-\frac{GMm}{2a}$

Ταχύτητα ελλειπτικής τροχιάς

$K+U=E\Rightarrow\ \frac{1}{2}\mu\upsilon^2-\frac{k}{r}=-\frac{k}{2a}\Rightarrow$

$$\upsilon=\sqrt{\frac{k}{\mu}\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}=\sqrt{G(M+m)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}$$

Επιβεβαιώνουμε ότι παίρνουμε την ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς για *r*=*a*=*R*.

Στροφορμή ελλειπτικής τροχιάς

Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις $r_a+r_p=2a$ και $r_ar_p=b^2$ και τον τύπο της ενέργειας

$$\frac{1}{2}\mu\upsilon_a^2=k\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{2a}\right)\Rightarrow\upsilon_a^2=\frac{2k}{\mu}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_a+r_p}\right)=\frac{2k}{\mu}\left(\frac{\cancel{r_a}+r_p-\cancel{r_a}}{r_a(r_a+r_p)}\right)\Rightarrow\upsilon_a^2=\frac{k}{\mu a}\frac{r_p}{r_a}\Rightarrow$$

$$\upsilon_a^2=\frac{k}{\mu a}\frac{b^2}{r_a^2}\Rightarrow\ \upsilon_a=\sqrt{\frac{k}{\mu a}}\frac{b}{r_a}$$

$$L=\mu\upsilon_ar_a=\mu\sqrt{\frac{k}{\mu a}}\frac{b}{r_a}r_a\Rightarrow L=\sqrt{k\mu}\frac{b}{\sqrt{a}}=\mu\sqrt{G(M+m)}\frac{b}{\sqrt{a}}=\mu\sqrt{G(M+m)}\sqrt{R}$$

Επιβεβαιώνουμε ότι παίρνουμε τη στροφορμή της κυκλικής τροχιάς για *a*=*b*=*R*.

Περίοδος ελλειπτικής τροχιάς

Η εμβαδική ταχύτητα είναι σταθερή (2^{ος} νόμος Kepler) και είναι ανάλογη της στροφορμής. Το εμβαδόν της έλλειψης είναι ίσο με $A=\pi ab$ (δείτε ότι παίρνουμε το εμβαδόν του κύκλου για *a*=*b*=*R*)

$$\frac{dA}{dt}=\frac{L}{2\mu}\Rightarrow\frac{\pi a\cancel{b}}{T}=\cancel{\mu}\sqrt{G(M+m)}\frac{\cancel{b}}{\sqrt{a}}\frac{1}{2\cancel{\mu}}\Rightarrow a^3=\left(\frac{G(M+m)}{4\pi^2}\right)T^2\Rightarrow$$

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{G(M+m)}=3,0\times10^{-19}\ \mathrm{s^2/m^3}\qquad 3^{ος}\text{ νόμος Kepler}$$

$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(M+m)}}$ Επιβεβαιώνουμε ότι παίρνουμε την περίοδο της κυκλικής τροχιάς για *a*=*R*.

Αγνοώντας τη μάζα των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος σε σύγκριση με αυτή του Ήλιου και παίρνοντας τις προσεγγίσεις $\pi^2\simeq10$ και $G=\frac{20}{3}\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$ μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μάζα του Ήλιου

$$\frac{4\pi^2}{G(M_{sun}+\cancel{m})}=3,0\times10^{-19}\Rightarrow M_{sun}=\frac{4\pi^2}{G\cdot 3,0\times10^{-19}}=\frac{4\cdot10}{\frac{20}{3}\times10^{-11}\cdot3,0\times10^{-19}}=2,0\times10^{30}\ \ \mathrm{kg}$$

Συγκρίνετε με την ακριβή τιμή (2013) $1{,}9885\times10^{30}$ kg για να δείτε πόσο κοντά πέσαμε

Σχέση μεταξύ ενέργειας, στροφορμής και εκκεντρότητας

Από $L=\sqrt{k\mu}\dfrac{b}{\sqrt{a}}$ και $E=-\dfrac{k}{2a}$

$$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=1+\left(\frac{b^2}{a}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)=1+\left(\frac{L^2}{k\mu}\right)\left(\frac{2E}{k}\right)\Rightarrow e=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu k^2}}=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu\left(GMm\right)^2}}$$

Από : $r_{p,a}=\dfrac{-2\mu k\pm\sqrt{4\mu^2k^2+8\mu EL^2}}{4\mu E}$

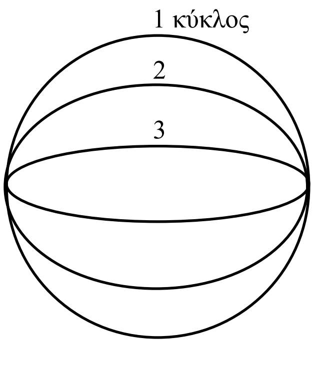
$$e=\frac{r_a-r_p}{r_a+r_p}=\frac{\dfrac{k}{2|E|}+\dfrac{\sqrt{\mu^2k^2+2\mu EL^2}}{2\mu|E|}-\left(\dfrac{k}{2|E|}-\dfrac{\sqrt{\mu^2k^2+2\mu EL^2}}{2\mu|E|}\right)}{\dfrac{k}{2|E|}+\dfrac{\sqrt{\mu^2k^2+2\mu EL^2}}{2\mu|E|}+\left(\dfrac{k}{2|E|}-\dfrac{\sqrt{\mu^2k^2+2\mu EL^2}}{2\mu|E|}\right)}=\frac{\dfrac{\sqrt{\mu^2k^2+2\mu EL^2}}{\cancel{2|E|}\mu}}{\dfrac{k}{\cancel{2|E|}}}$$

$$=\frac{\sqrt{\mu^2k^2+2\mu EL^2}}{\mu k}=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu k^2}}$$

$$\boxed{e=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu k^2}}=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu\left(GMm\right)^2}}}$$

Σχέση γεωμετρικών χαρακτηριστικών της τροχιάς με την ενέργεια και τη στροφορμή

Ίδιο a



Όλες οι τροχιές έχουν την **ίδια ενέργεια** επειδή έχουν ίσους κύριους άξονες a

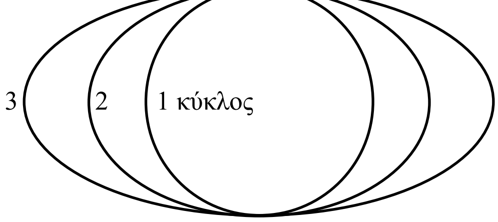
$E\propto-\dfrac{1}{a},\quad E_1=E_2=E_3$

Οι τροχιές έχουν διαφορετική στροφορμή επειδή έχουν διαφορετικούς δευτερεύοντες άξονες b

$L\propto\dfrac{b}{\sqrt{a}},\quad L_1>L_2>L_3$

Τη μεγαλύτερη στροφορμή την έχει η κυκλική τροχιά (όταν έχουν ίδιες ενέργειες)

Ίδιο b



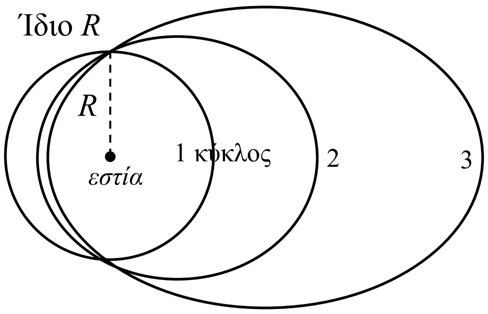
Οι τροχιές έχουν διαφορετική ενέργεια επειδή έχουν διαφορετικούς κύριους άξονες a

$E\propto-\dfrac{1}{a},\quad E_1<E_2<E_3$

Οι τροχιές έχουν διαφορετική στροφορμή παρόλο που έχουν ίδιους δευτερεύοντες άξονες επειδή η στροφορμή εξαρτάται και από το a και από το b

$L\propto\dfrac{b}{\sqrt{a}}=\sqrt{R},\quad L_1>L_2>L_3$

Τη μεγαλύτερη στροφορμή την έχει πάλι η κυκλική τροχιά που έχει το μικρότερο a



Οι τροχιές έχουν διαφορετική ενέργεια επειδή έχουν διαφορετικούς κύριους άξονες *a*

$$E \propto -\frac{1}{a}, \quad E_1 < E_2 < E_3$$

Οι τροχιές έχουν την ίδια στροφορμή επειδή έχουν την ίδια ορθή εστιακή ημιχορδή

$$L^2 \propto R = \frac{b^2}{a}, \quad L_1 = L_2 = L_3$$

Τη μικρότερη ενέργεια την έχει η κυκλική τροχιά (όταν έχουν ίδια στροφορμή)

Τροχιές με διαφορικές εξισώσεις (ο πιο μακρύς δρόμος)

Έχουμε να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση του ισοδύναμου ενός σώματος

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \frac{d(\mu\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{\mu} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{\mu r^2}\hat{r}$$

για να βρούμε την εξίσωση κίνησης $\vec{r}(t) = \ldots$.

Το κάνουμε σε πολικές συντεταγμένες και καταλήγουμε στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή !! (από εκεί εμφανίζεται το $\cos\theta$)

Όλα τα μεγέθη παρακάτω αφορούν τη σχετική κίνηση. Αν θέλουμε την περίπτωση πλανήτη γύρω από ήλιο πολύ μεγάλης μάζας *M*>>*m*, στην αρχή των αξόνων, τότε απλά αντικαθιστούμε την *μ* με *m*.

1) Η τροχιά είναι επίπεδη.

Επειδή η δύναμη είναι κεντρική και άρα κατά την κίνηση του πλανήτη η στροφορμή διατηρείται, η τροχιά του πλανήτη θα είναι επίπεδη αφού το διάνυσμα θέσης είναι πάντα κάθετο στη σταθερή στροφορμή.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu\vec{\upsilon}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mu\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{\upsilon}\right) = \mu\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{\upsilon} + \vec{r}\times\mu\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \cancel{\vec{\upsilon}\times\vec{\upsilon}} + \vec{r}\times\vec{F}(r) = -\frac{k}{r^2}\cancel{\vec{r}\times\hat{r}} = 0$$

$$\vec{r}\times\vec{L} = \mu\vec{r}\times\left(\vec{r}\times\vec{\upsilon}\right) = \mu\left(\vec{r}\times\vec{r}\right)\cdot\ \vec{\upsilon} = 0 \Rightarrow \vec{r}\perp\vec{L}$$

Οπότε επιλέγουμε την διεύθυνση της $\vec{L} = L\hat{z}$ να είναι ο άξονας $\hat{z}$ και έτσι η τροχιά βρίσκεται στο επίπεδο *x-y*. Επειδή η δύναμη είναι κεντρική και άρα εξαρτάται μόνο από την ακτίνα *r*, θα επιλέξουμε πολικές συντεταγμένες (*r*, *θ*) για να περιγράψουμε την τροχιά :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Άρα τα ζητούμενα είναι :

Παραμετρικές εξισώσεις κίνησης : $r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$, με παράμετρο το χρόνο *t*

Εξίσωση τροχιάς : $r = r(\theta)$

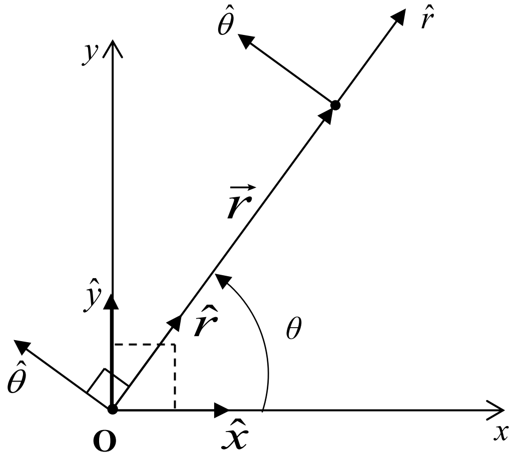
2) Πολικές συντεταγμένες

Το να βρούμε τις εκφράσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες είναι απλά μια άσκηση παραγωγίσεων ως προς το χρόνο, του διανύσματος θέσης εκφρασμένο σε πολικές συντεταγμένες:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(r\hat{r}\right)}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}\right)}{dt} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\hat{r}} = \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\hat{r}}$$



Οι χρονικές παράγωγοι των πολικών μοναδιαίων διανυσμάτων $\dot{\hat{r}},\ \dot{\hat{\theta}}$ υπολογίζονται εύκολα από τη σχέση που τα συνδέει με τα καρτεσιανά μοναδιαία διανύσματα (από το σχήμα):

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \qquad \text{και} \qquad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$$

τα οποία όμως δεν μεταβάλλονται $\dot{\hat{x}} = 0 = \dot{\hat{y}}$ με το χρόνο.

Έτσι, η μεταβολή των $\hat{r},\ \hat{\theta}$ θα προέλθει μόνο από τις χρονικές παραγώγους $\dot{\theta}$ και $\ddot{\theta}$, της αζιμουθιακής γωνίας θ, οι οποίες έχουν συνήθως τον παρακάτω συμβολισμό και ονομασία

γωνιακή ταχύτητα: $\omega \equiv \dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$

γωνιακή επιτάχυνση: $\alpha \equiv \ddot{\theta} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{d\omega}{dt}$

Οπότε παίρνουμε

$$\begin{matrix} \dot{\hat{r}} = -\omega\sin\theta\hat{x} + \omega\cos\theta\hat{y} \\ \dot{\hat{\theta}} = -\omega\cos\theta\hat{x} - \omega\sin\theta\hat{y} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{\hat{r}} = \omega\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} = -\omega\hat{r} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \ddot{\hat{r}} = \alpha\hat{\theta} + \omega\dot{\hat{\theta}} \\ \ddot{\hat{\theta}} = -\alpha\hat{r} - \omega\dot{\hat{r}} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \ddot{\hat{r}} = -\omega^2\hat{r} + \alpha\hat{\theta} \\ \ddot{\hat{\theta}} = -\alpha\hat{r} - \omega^2\hat{\theta} \end{matrix}$$

Παρατηρούμε και πάλι ότι η παράγωγος ενός μοναδιαίου διανύσματος είναι κάθετη στο διάνυσμα.
Από τα παραπάνω η έκφραση για την ταχύτητα θα είναι :

$$\vec{\upsilon} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} \Rightarrow \qquad \vec{\upsilon} = \dot{r}\hat{r} + \omega r\hat{\theta} = \upsilon_r\hat{r} + \upsilon_\theta\hat{\theta}$$

Ο πρώτος όρος ονομάζεται ακτινική ταχύτητα : $\upsilon_r = \dot{r} = \dfrac{dr}{dt}$.

Η ακτινική ταχύτητα δηλώνει το πόσο γρήγορα απομακρύνεται το κινητό από το κέντρο ($dr/dt > 0$) ή το πόσο γρήγορα το πλησιάζει ($dr/dt < 0$) κατά μήκος της ακτίνας

Ο δεύτερος όρος ονομάζεται αζιμουθιακή ή γωνιακή ταχύτητα $\upsilon_\theta = \omega r = r\dfrac{d\theta}{dt}$.

Η αζιμουθιακή ταχύτητα δηλώνει πόσο γρήγορα γυρίζει το κινητό γύρω από το κέντρο. Όταν η αζιμουθιακή ταχύτητα είναι θετική το κινητό γυρίζει δεξιόστροφα (αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού) γύρω από το κέντρο.
Αντίστοιχα για την επιτάχυνση παίρνουμε

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\hat{r}} = \ddot{r}\hat{r} + 2\omega\dot{r}\hat{\theta} - \omega^2 r\hat{r} + \alpha r\hat{\theta} \Rightarrow \qquad \vec{a} = \left(\frac{d\upsilon_r}{dt} - \omega^2 r\right)\hat{r} + \left(r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\dot{r}\right)\hat{\theta}$$

Η ερμηνεία για τους πρώτους όρους της κάθε συνιστώσας είναι προφανής. Είναι οι αντίστοιχες «καθαρές» επιταχύνσεις ακτινικά και γωνιακά. Ο ακτινικός όρος μπορεί να υπάρχει ακόμα και αν η γωνία δεν αλλάζει (δεν υπάρχει περιστροφή) ενώ ο αζιμουθιακός όρος μπορεί να υπάρχει ακόμα και αν η ακτίνα δεν αλλάζει (κίνηση σε κύκλο). Ο δεύτεροι όροι αναμιγνύουν γωνιακές ή ακτινικές επιταχύνσεις με ακτινικές και γωνιακές ταχύτητες αντίστοιχα. Είναι :

η γνωστή μας «κεντρομόλος» επιτάχυνση $a_c = -\omega^2 r = -\dfrac{\upsilon_\theta^2}{r}$

και η επιτάχυνση Coriolis : $a_C = 2\omega\dot{r} = 2\omega\upsilon_r$

Την επιτάχυνση Coriolis μπορούμε να την αισθανθούμε αν προσπαθήσουμε να κινηθούμε ευθεία κατά μήκος μιας ακτίνας, πάνω σε ένα δάπεδο που γυρίζει σταθερά (α=0), όπως το «γύρω-γύρω» μιας παιδικής χαράς. Παρόλο που δεν είμαστε μεθυσμένοι το πάτωμα «θα γυρίζει» σαν να ήμασταν και θα δυσκολευόμαστε να κρατηθούμε στην ευθεία επειδή θα νιώθουμε μια πλάγια επιτάχυνση.

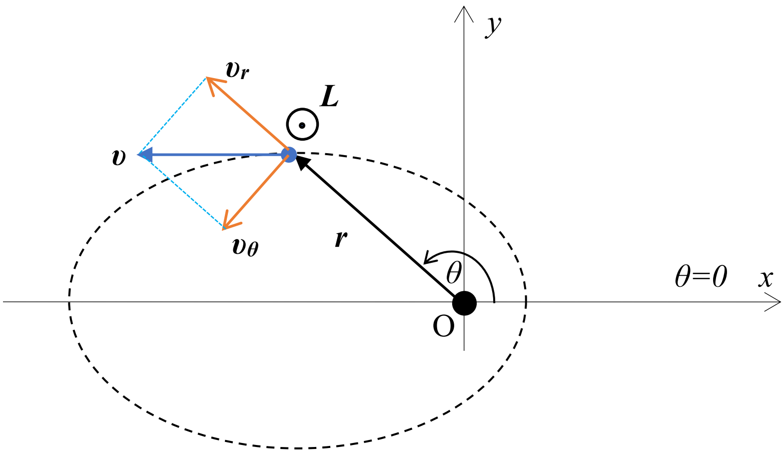
3) Στροφορμή σε πολικές συντεταγμένες και σταθερότητα εμβαδικής ταχύτητας (2ος νόμος Kepler):

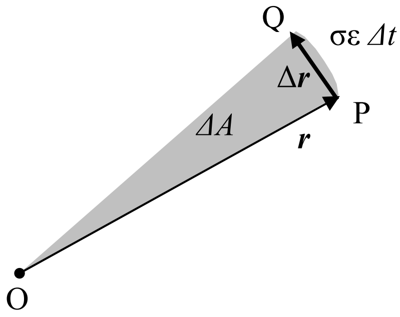
$$L = \mu r^2\dot{\theta} = 2\mu\dot{A} = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (1)$$

Η στροφορμή σε πολικές συντεταγμένες είναι :

$$\vec{L} = \mu\vec{r}\times\vec{\upsilon} = \mu(r\hat{r})\times\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\right) = \mu r\dot{r}\hat{r}\times\hat{r} + \mu r^2\dot{\theta}\hat{r}\times\hat{\theta} = \mu r^2\dot{\theta}\hat{z}$$

$$L = \mu r^2\dot{\theta} = \mu r(r\omega) = m\upsilon_\theta r \qquad \text{ή} \qquad \omega = \dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$$





Έστω ότι σε χρονικό διάστημα Δt το σώμα μετακινείται από το σημείο P στο σημείο Q . Το εμβαδόν που έχει σαρώσει είναι κατά προσέγγιση το μισό του παραλληλογράμμου με πλευρές $\vec{r}$ και $\Delta\vec{r}$ το οποίο δίνεται από το διανυσματικό γινόμενο : $\Delta A = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\Delta\vec{r}\right|$. Διαιρώντας με Δt και παίρνοντας το όριο $\Delta t\to 0$ έχουμε :

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{\upsilon}\right| = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{L}{\mu}$$

Άρα $\dot{A} = \dfrac{L}{2\mu} = \sigma\tau\alpha\theta.$

4) *Ο 2ος νόμος Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες είναι η μη ομογενής διαφορική εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή*

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\kappa}{h^2}, \qquad \text{όπου } u = 1/r, \quad \kappa = k/\mu \text{ και } h = L/\mu$$

Από την έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{r}\right)\hat{\theta}$$

Παίρνουμε

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{\mu} \Rightarrow \left(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{r}\right)\hat{\theta} = -\frac{k}{\mu r^2}\hat{r} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r = -\dfrac{\kappa}{r^2} & (2) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{r} = 0 & (3) \end{cases}$$

Με $\kappa = \dfrac{k}{\mu} = \dfrac{GMm}{Mm/(M+m)} = G(M+m) \simeq GM \quad$ για $M >> m$

Η εξίσωση (3) είναι ισοδύναμη με την (1) και δεν μας δίνει κάποια νέα πληροφορία:

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{r} = \frac{1}{r}\left(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}\right) = \frac{1}{\mu r}\frac{d}{dt}\left(\mu r^2\dot{\theta}\right) = \frac{1}{\mu r}\frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Στη (2) κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $r = 1/u$ και χρησιμοποιούμε την (1) $\dot{\theta} = L/\mu r^2 = h/r^2$, δηλ. $h = \dfrac{L}{\mu}$, για να απαλείψουμε τη γωνιακή ταχύτητα

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{h}{r^2} = hu^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = h^2u^4$$

Οπότε η (2) γίνεται :

$$\ddot{r} - h^2u^4 \cdot \frac{1}{u} = -\kappa u^2 \qquad (4)$$

Εκφράζουμε τη δεύτερη παράγωγο ως προς τη μεταβλητή *u* και επίσης απαλείφουμε το χρόνο εκφράζοντας τις χρονικές παραγώγους σαν παραγώγους ως προς θ με τον κανόνα της αλυσίδας

$$r = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \left(-\frac{1}{u^2}\right)\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot hu^2 = -h\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}hu^2 \Rightarrow \ddot{r} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Αντικαθιστούμε στην (4) και παίρνουμε τελικά

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3 = -\kappa u^2 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\kappa}{h^2} \qquad (5)$$

Αφού η ομογενής $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0$ είναι η εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή, τότε η $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \dfrac{\kappa}{h^2}$ είναι η μη ομογενής εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή

5) *Εξισώσεις τροχιάς = κωνικές τομές = έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή*

Η λύση της (5) είναι η λύση της ομογενούς συν μια μερική λύση

Η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι κατά τα γνωστά η : $u_{ομογ} = A\cos(\theta + \theta_0)$

Τη μερική λύση τη βρίσκουμε εύκολα βλέποντας ότι είναι απλά η σταθερά του δεύτερου μέλους αφού τότε η *u* είναι σταθερή και η δεύτερη παράγωγος γίνεται μηδέν : $u_{μερ} = \kappa/h^2 \Rightarrow \dfrac{d^2u_{μερ}}{d\theta^2} = 0$

Οπότε η γενική λύση είναι : $u = u_{ομογ} + u_{μερ} \Rightarrow \; u(\theta) = A\cos(\theta + \theta_0) + \dfrac{\kappa}{h^2}$

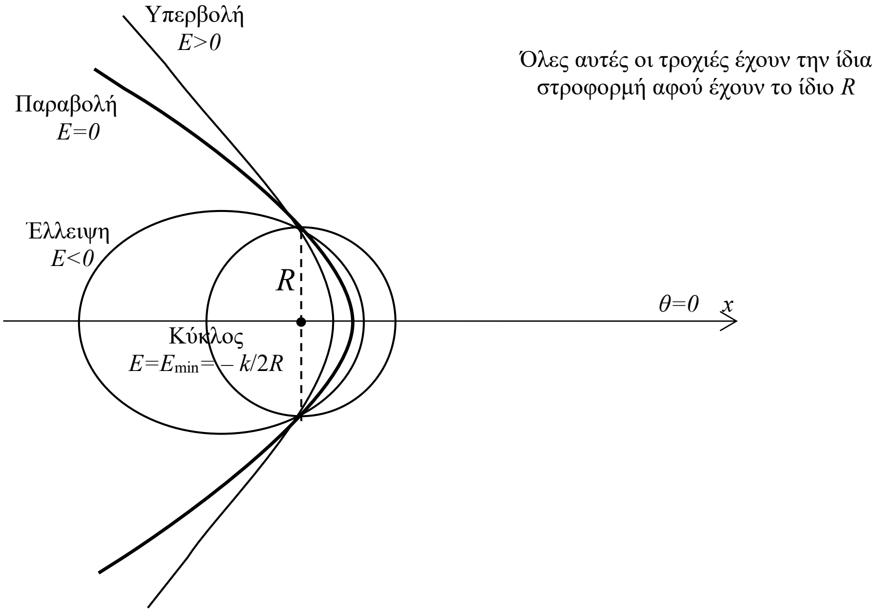
και άρα η εξίσωση της τροχιάς είναι : $r = \dfrac{1}{\kappa/h^2 + A\cos(\theta+\theta_0)} = \dfrac{\left(h^2/\kappa\right)}{1+\left(Ah^2/\kappa\right)\cos(\theta+\theta_0)} \Rightarrow$

$$r = \frac{R}{1+e\cos(\theta+\theta_0)}$$

όπου το R εξαρτάται από τη στροφορμή και οι αυθαίρετες σταθερές $e = AR$ και θ_0 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Αυτή είναι η εξίσωση των κωνικών τομών με

e=0 κύκλος
0<e<1 έλλειψη
e=1 παραβολή
1<e υπερβολή



$$R = \frac{h^2}{\kappa} = \frac{L^2}{\mu^2}\frac{\mu}{k} = \frac{L^2}{\mu k}$$

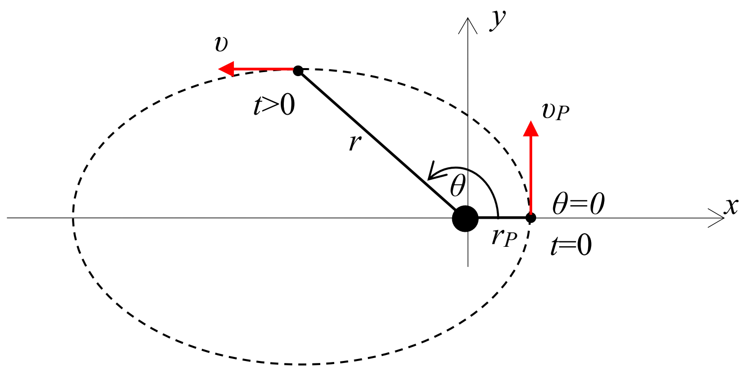
Ως αρχική τιμή για τη θέση θεωρούμε θ=0 όταν το r γίνεται ελάχιστο (στο περιήλιο) $r(\theta=0) = r_p = \dfrac{R}{1+e\cos\theta_0}$. Για να είναι αυτό ελάχιστο πρέπει το $\cos\theta_0$ να είναι μέγιστο, δηλ. $\cos\theta_0 = 1$,

οπότε θ_0=0 και $r(\theta=0) = r_p = \dfrac{R}{1+e} = r_{\min}$.

Έτσι τελικά

$$r = \frac{1}{\kappa/h^2 + A\cos\theta} \Rightarrow \quad r = \frac{\left(h^2/\kappa\right)}{1+\left(Ah^2/\kappa\right)\cos\theta} \Rightarrow \qquad \boxed{r = \frac{R}{1+e\cos\theta}}$$

με $R = L^2/\mu k$ και $e = AR$



Η σταθερά e θα προσδιοριστεί από τις αρχικές συνθήκες υ_p και r_P ή ισοδύναμα από την ενέργεια και τη στροφορμή.

$$r=\frac{R}{1+e\cos\theta}\Rightarrow r_p=\frac{R}{1+e\cos 0^{o}}=\frac{R}{1+e}\Rightarrow \frac{1}{r_p}=\frac{1+e}{R}$$

$$L=\mu\upsilon_p r_p\Rightarrow \mu\upsilon_p^2=\frac{L^2}{\mu r_p^2}$$

$$E=K+U=\frac{1}{2}\mu\upsilon_p^2-\frac{k}{r_p}=\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r_p^2}-\frac{k}{r_p}=\frac{R\mu k}{2\mu}\left(\frac{1+e}{R}\right)^2-k\left(\frac{1+e}{R}\right)\Rightarrow$$

$$E=\frac{k}{2R}\left(1+2e+e^2\right)-\frac{k}{R}-\frac{k}{R}e=\frac{k}{2R}+\cancel{\frac{k}{R}e}+\frac{k}{2R}e^2-\frac{k}{R}-\cancel{\frac{k}{R}e}\Rightarrow$$

$$E=\frac{k}{2R}e^2-\frac{k}{2R}\Rightarrow \frac{k}{2R}e^2=E+\frac{k}{2R}\Rightarrow e^2=1+\frac{2RE}{k}=1+\frac{2E\,L^2/\mu k}{k}\Rightarrow$$

$$\boxed{e=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu k^2}}}$$

Το οποίο είναι με άλλη μέθοδο το μέτρο του διανύσματος εκκεντρότητας.

Άρα η τροχιά με αναφορά στην στροφορμή και την ενέργεια της είναι :

$$\boxed{r=\frac{L^2/\mu k}{1+\sqrt{1+2EL^2/\mu k^2}\cdot\ \cos\theta}}$$