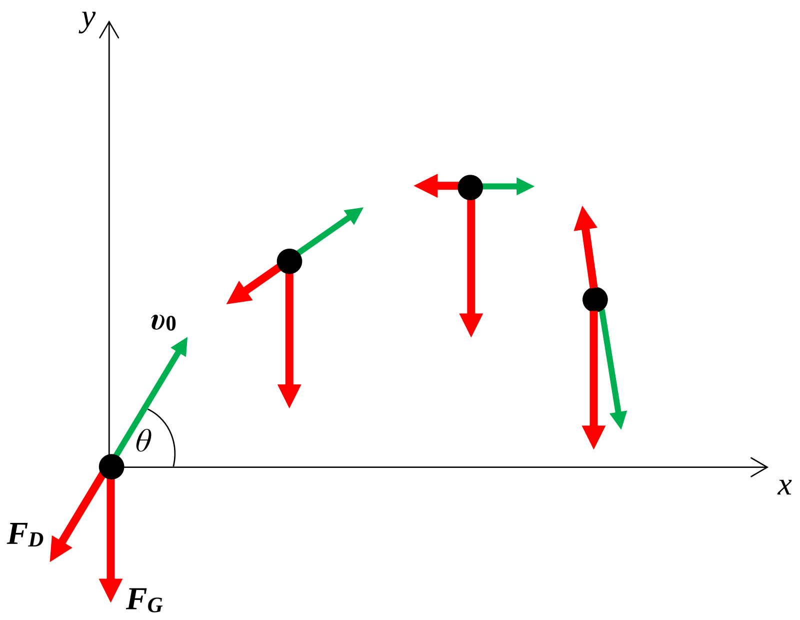
Βολή με γραμμική οπισθέλκουσα – Projectile Motion with Linear Drag



Βάρος	$\vec{F}_G = m\vec{g}$
g: ένταση πεδίου βαρύτητας	$[g] = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Οπισθέλκουσα γραμμική (linear drag ή Stokes drag)	$\vec{F}_D = -b\vec{\upsilon}$
b: συντελεστής απόσβεσης	$[b] = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m/s}} = \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$

Αρχικές συνθήκες: αρχική θέση $\vec{r}_0 = 0$ αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$

Από την Αρχή της Ορμής έχουμε

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{net} \Rightarrow m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}_G + \vec{F}_D \Rightarrow m\dot{\vec{\upsilon}} = m\vec{g} - b\vec{\upsilon} \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{\vec{\upsilon}} + \beta\vec{\upsilon} = \vec{g} \qquad (1)}$$

$\beta = \dfrac{b}{m}$	εκθέτης απόσβεσης	$[\beta] = \dfrac{[b]}{[m]} = \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\dfrac{1}{\mathrm{kg}} = \mathrm{s}^{-1}$
$\tau = \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{m}{b}$	σταθερά χρόνου ή χρόνος αποκατάστασης	$[\tau] = \mathrm{s}$

Η (1) λύνεται με ολοκληρωτικό παράγοντα.

Αν την πολλαπλασιάσω με $e^{\beta t}$ η αριστερή πλευρά της εξίσωσης γίνεται η παράγωγος του γινομένου $e^{\beta t}\vec{\upsilon}$ και άρα μπορεί να ολοκληρωθεί κατευθείαν

$$e^{\beta t}\dot{\vec{\upsilon}} + \beta e^{\beta t}\vec{\upsilon} = e^{\beta t}\vec{g} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{\beta t}\vec{\upsilon}\right) = e^{\beta t}\vec{g} \Rightarrow \int_0^t \frac{d}{dt}\left(e^{\beta t}\vec{\upsilon}\right)dt = \vec{g}\int_0^t e^{\beta t}dt \Rightarrow$$

$$e^{\beta t}\vec{\upsilon}(t)\Big|_0^t = \vec{g}\left.\frac{e^{\beta t}}{\beta}\right|_0^t \Rightarrow e^{\beta t}\vec{\upsilon}(t) - \vec{\upsilon}_0 = \frac{\vec{g}}{\beta}\left(e^{\beta t} - 1\right)$$

Όλα επί $e^{-\beta t}$ για να βρω το $\vec{\upsilon}(t)$

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 e^{-\beta t} + \frac{\vec{g}}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) \qquad \text{ή} \qquad \vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 e^{-t/\tau} + \vec{g}\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad (2)$$

Για $t \to \infty$ το σώμα «ξεχνάει» την αρχική ταχύτητα που είχε και κινείται (πέφτει) με <u>σταθερή ταχύτητα</u> στην κατεύθυνση του $\vec{g}$. Η όποια ταχύτητα είχε κάθετα στο $\vec{g}$ (οριζόντια) έχει μηδενιστεί.

$$\vec{\upsilon}(t \to \infty) = \vec{g}\tau$$

Η τελική αυτή ταχύτητα ονομάζεται οριακή ή τερματική (terminal) και έχει μέτρο ίσο με

$$\upsilon_{term} = g\tau = \frac{mg}{b}$$

Βλέπουμε ότι επιτυγχάνεται όταν η οπισθέλκουσα δύναμη από την αντίσταση του αέρα γίνει ίση σε μέτρο με τη δύναμη του βάρους

$$b\upsilon_{term} = mg$$

Για έναν άνθρωπο η τερματική ταχύτητα είναι γύρω από τα 200 km/h.

Η επιτάχυνση βρίσκεται με παραγώγιση της (2)

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} = \vec{\upsilon}_0(-1/\tau)e^{-t/\tau} - \vec{g}\tau(-1/\tau)e^{-t/\tau}$$

$$\vec{a}(t) = \left(\vec{g} - \beta\vec{\upsilon}_0\right)e^{-\beta t} \qquad \vec{a}(t) = \left(\vec{g} - \frac{\vec{\upsilon}_0}{\tau}\right)e^{-t/\tau} \quad (3)$$

Πράγματι η επιτάχυνση τείνει στο μηδέν για μεγάλους χρόνους και άρα η κίνηση καταλήγει σε ευθύγραμμη και ομαλή

$$\vec{a}(t \to \infty) = 0$$

Για να βρούμε την εξίσωση κίνησης $\vec{r}(t)$ ολοκληρώνουμε την (2)

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{\upsilon}(t) \Rightarrow \quad d\vec{r}(t) = \vec{\upsilon}(t)dt \Rightarrow \quad \int_0^{\vec{r}} d\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{\upsilon}(t)dt$$

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \left(\vec{\upsilon}_0 e^{-t/\tau} + \vec{g}\tau(1 - e^{-t/\tau})\right)dt = (\vec{\upsilon}_0 - \vec{g}\tau)\int_0^t e^{-t/\tau}dt + \vec{g}\tau\int_0^t dt$$

$$\vec{r}(t) = (\vec{\upsilon}_0 - \vec{g}\tau)\left.\frac{e^{-t/\tau}}{(-1/\tau)}\right|_0^t + \vec{g}\tau t = -\tau(\vec{\upsilon}_0 - \vec{g}\tau)(e^{-t/\tau} - 1) + \vec{g}\tau t$$

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{\beta}\left(\vec{\upsilon}_0 - \frac{\vec{g}}{\beta}\right)(1 - e^{-\beta t}) + \frac{\vec{g}}{\beta}t \qquad \text{ή} \qquad \vec{r}(t) = \tau(\vec{\upsilon}_0 - \vec{g}\tau)(1 - e^{-t/\tau}) + \vec{g}\tau t \quad (4)$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος $\vec{g}\tau$ δεν είναι παρά η τερματική ταχύτητα : $\vec{\upsilon}_{term} = \vec{g}\tau$

Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{r}(t) = (\vec{\upsilon}_0 - \vec{\upsilon}_{term})\tau(1 - e^{-t/\tau}) + \vec{\upsilon}_{term}t \quad (5)$$

Για μεγάλα t ($t \to \infty$)

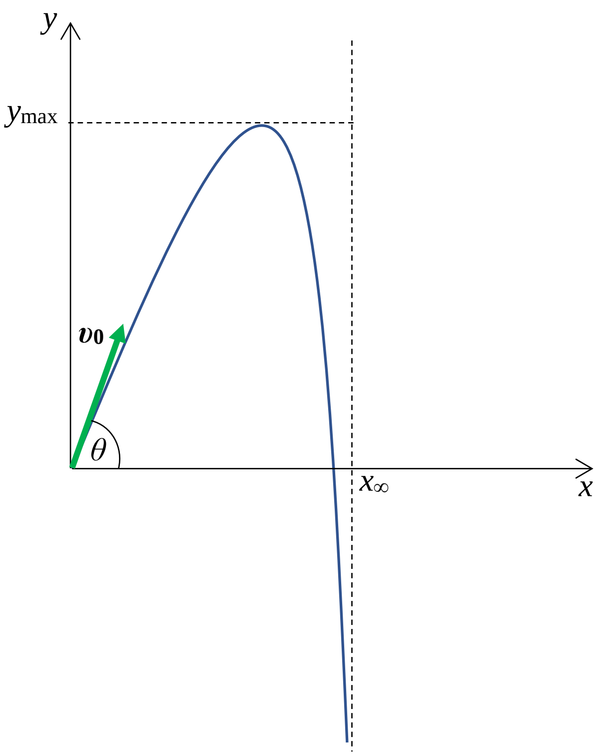
$$\vec{r}(t \to \infty) = (\vec{\upsilon}_0 - \vec{\upsilon}_{term})\tau + \vec{\upsilon}_{term}t$$

Σε συνιστώσες

$$x_\infty = \upsilon_0 \cos\theta$$
$$y_\infty(t) = (\upsilon_0 \sin\theta + \upsilon_{term})\tau - \upsilon_{term} t$$
Οριζοντίως η θέση τείνει στο όριο x_∞ το οποίο το σώμα δεν μπορεί να ξεπεράσει ενώ κατακόρυφα έχουμε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση προς τα κάτω.

Όπου θεωρήσαμε πλάγια βολή στην επιφάνεια της Γης με :
$$\vec{g} = -g\hat{y}$$
$$\vec{\upsilon}_0 = \upsilon_{0x}\hat{x} + \upsilon_{0y}\hat{y} = \upsilon_0 \cos\theta \hat{x} + \upsilon_0 \sin\theta \hat{y}$$
$$0^\circ < \theta \leq 90^\circ$$
$$\tan\theta = \upsilon_{0y} / \upsilon_{0x}$$

Η τροχιά θα έχει περίπου το παρακάτω σχήμα



Σχήμα 1.
Ποιοτικό σκαρίφημα της τροχιάς με γραμμική οπισθέλκουσα

Επειδή το x δεν μπορεί να ξεπεράσει την τιμή x_∞.
Επειδή το σώμα αρχικά κινείται προς τα πάνω ενώ τελικά καταλήγει να κινείται προς τα κάτω κάπου στο ενδιάμεσο θα φτάσει σε κάποιο μέγιστο ύψος y_{max} .
Επειδή η οριζόντια ταχύτητα έχει μειωθεί από την αντίσταση του αέρα η κάθοδος θα είναι πιο απότομη από την άνοδο. Στην κάθοδο το βάρος επιταχύνει το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω ενώ στην άνοδο το φρενάρει.

Συνιστώσες
Γράφουμε τις (5), (2) και (3) σε συνιστώσες

$$x(t) = \upsilon_0 \tau \cos\theta \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad (6)$$
$$y(t) = \upsilon_{term} \left[\left(1 + \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{\upsilon_{term}}\right) \tau (1 - e^{-t/\tau}) - t \right] \qquad (7)$$

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_0 \cos\theta e^{-t/\tau} \qquad (8)$$
$$\upsilon_y(t) = \upsilon_{term}\left[\left(1+\frac{\upsilon_0 \sin\theta}{\upsilon_{term}}\right)e^{-t/\tau} - 1\right] \qquad (9)$$

$$a_x(t) = -\frac{\upsilon_0 \cos\theta}{\tau}e^{-t/\tau} \qquad (10)$$
$$a_y(t) = -g\left(1+\frac{\upsilon_0 \sin\theta}{\upsilon_{term}}\right)e^{-t/\tau} \qquad (11)$$

Για ευκολία παρακάτω, ορίζουμε τις εξής αδιάστατες σταθερές

$$c = \frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}} = \frac{b\upsilon_0}{mg} \xrightarrow{b\to 0} 0 \ ,$$
$$\zeta = 1+\frac{\upsilon_0 \sin\theta}{\upsilon_{term}} = 1 + c\sin\theta \xrightarrow{b,c\to 0} 1$$

Η σταθερά c είναι ο λόγος της αρχικής αντίστασης του αέρα προς το βάρος του σώματος.
Η εξάρτηση από τη γωνία εκτόξευσης θ εισέρχεται μόνο μέσω της σταθεράς ζ, η οποία για $0^{o} < \theta < 180^{o}$ είναι προφανώς μεγαλύτερη της μονάδας

$$\zeta > 1$$

Οπότε τα κατακόρυφα μεγέθη γράφονται πιο οικονομικά,

$$y(t) = \upsilon_{term}\tau\left[\zeta(1-e^{-t/\tau}) - \frac{t}{\tau}\right] \qquad (12)$$
$$\upsilon_y(t) = \upsilon_{term}\left[\zeta e^{-t/\tau} - 1\right] \qquad (13)$$
$$a_y(t) = -g\zeta e^{-t/\tau} \qquad (14)$$

Οι εκφράσεις στις αγκύλες είναι αδιάστατες (αριθμοί χωρίς μονάδες)
Κάθε έκφραση φαίνεται εύκολα ότι είναι η παράγωγος της προηγούμενης.

Τροχιά

Λύνουμε ως προς το χρόνο την (6) και αντικαθιστούμε το χρόνο που βρήκαμε στην (12)

$x = \upsilon_0 \cos(\theta)\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow \left(1-e^{-t/\tau}\right) = \dfrac{x}{\upsilon_0\tau\cos\theta}$ αυτήν θα την χρησιμοποιήσουμε στον πρώτο όρο της (12).

Συνεχίζουμε για να βρούμε και το t που θα το αντικαταστήσουμε στον δεύτερο όρο της (12)

$$e^{-t/\tau} = 1 - \frac{x}{\upsilon_0\tau\cos\theta} \Rightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln\left(1-\frac{x}{\upsilon_0\tau\cos\theta}\right)$$

Αντικαθιστούμε στην (12)

$$y = \upsilon_{term}\tau\zeta\frac{x}{\upsilon_0\tau\cos\theta} + \upsilon_{term}\tau\ln\left(1-\frac{x}{\upsilon_0\tau\cos\theta}\right) = \left(\frac{\upsilon_{term}}{\upsilon_0\cos\theta}\right)\left(1+\frac{\upsilon_0\sin\theta}{\upsilon_{term}}\right)x + \upsilon_{term}\tau\ln\left(1-\frac{x}{\upsilon_0\tau\cos\theta}\right)$$

Άρα η τροχιά είναι

$$y = \left(\tan\theta + \frac{\upsilon_{term}}{\upsilon_0\cos\theta}\right)x + \upsilon_{term}\tau\ln\left(1-\frac{x}{\upsilon_0\tau\cos\theta}\right) \qquad (15)$$

Αν εμφανίσουμε τις αρχικές παραμέτρους, g, m, b η τροχιά δίνεται ισοδύναμα από τον παρακάτω τύπο

$$y=\left(\tan\theta+\frac{gm}{b\upsilon_0\cos\theta}\right)x+\frac{gm^2}{b^2}\ln\left(1-\frac{b}{m\upsilon_0\cos\theta}x\right)\qquad(16)$$

Επειδή για μικρά x, δηλ. $|x|<1$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\dots$$

Για μικρή αντίσταση αέρα, δηλ. $b\to 0$, η εξίσωση της τροχιάς θα είναι

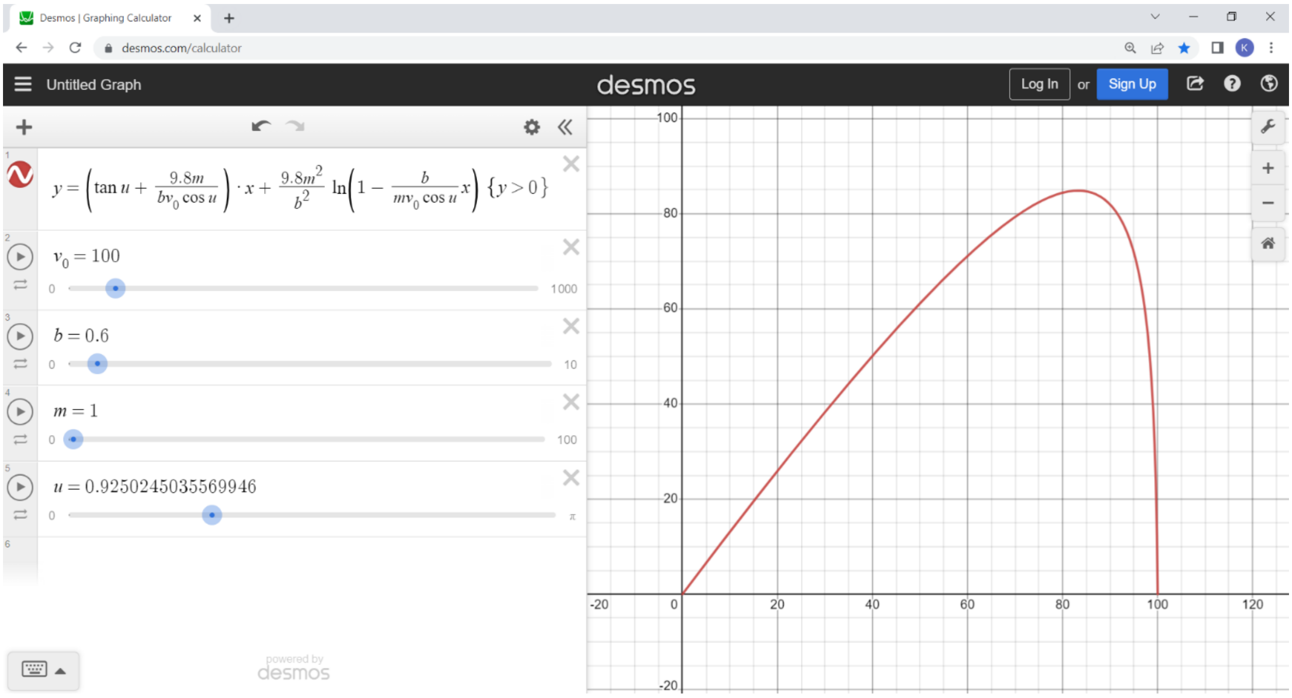
$$y=\left(\tan\theta+\frac{gm}{b\upsilon_0\cos\theta}\right)x+\frac{gm^2}{b^2}\ln\left(1-\frac{b}{m\upsilon_0\cos\theta}x\right)=$$

$$=x\tan\theta+\frac{gm}{b\upsilon_0\cos\theta}x-\frac{gm^{\cancel{2}}}{b^{\cancel{2}}}\left(\frac{\cancel{b}}{\cancel{m}\upsilon_0\cos\theta}x\right)-\frac{g\,\cancel{m^2}}{\cancel{b^2}}\frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{b}}{\cancel{m}\upsilon_0\cos\theta}x\right)^2+O(b)$$

$$=x\tan\theta+\cancel{\frac{gm}{b\upsilon_0\cos\theta}}x-\cancel{\frac{gm}{b\upsilon_0\cos\theta}}x-\frac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\theta}x^2+O(b)$$

και άρα για b = 0 θα γίνει η γνωστή μας παραβολή $y=x\tan\theta-\dfrac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\theta}x^2$

Άσκηση: Πηγαίνετε στην ιστοσελίδα desmos.com/calculator και κάντε την γραφική παράσταση της (16) για να δείτε ότι πράγματι έχει τη μορφή του Σχήματος 1.
Π.χ. εγώ πήρα το παρακάτω σχήμα (u = 0,925 rad ×(180^o/π) =53^o)



Χρόνος ανόδου : t_a

Η ολοκλήρωση της ανόδου συμβαίνει όταν $\upsilon_y(t_a)=0$

$$\upsilon_y(t_a)=0\Rightarrow 1=\zeta e^{-t_a/\tau}\Rightarrow e^{t_a/\tau}=\zeta\Rightarrow$$

$$t_a=\tau\ln\zeta\qquad(17)$$

Ή με τις αρχικές παραμέτρους

$$t_a = \frac{m}{b}\ln\left(1 + b\frac{\upsilon_0 \sin\theta}{mg}\right) \qquad (18)$$

1[ος] έλεγχος: Η έκφραση για το χρόνο ανόδου έχει μονάδες χρόνου $[t_a] = \mathrm{s}$

2[ος] έλεγχος: Όταν η αντίσταση του αέρα τείνει στο μηδέν δηλαδή $b \to 0$, ο χρόνος t_a θα πρέπει να τείνει στο χρόνο ανόδου για βολή χωρίς οπισθέλκουσα που είναι $\frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g}$. Αντικαθιστώντας απλώς b=0 αυτό δεν είναι προφανές. Π.χ. στην (18) παίρνουμε $\frac{0}{0}$ ή $\infty\cdot 0$

Για να το δείξουμε αυτό από την εξίσωση (17) πρέπει αρχικά να γράψουμε το τ συναρτήσει του ζ

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{\upsilon_0}{g}\frac{mg}{b\upsilon_0} = \frac{\upsilon_0}{g}\frac{1}{c} = \frac{\upsilon_0}{g}\frac{\sin\theta}{\zeta - 1} \qquad \text{αφού } \zeta = 1 + c\sin\theta \text{ και } c = \frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}} = \frac{b\upsilon_0}{mg}$$

Άρα $t_a = \tau\ln\zeta = \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g}\left[\frac{\ln\zeta}{\zeta - 1}\right]$

Όταν $b \to 0$ τότε $c \to 0$ και $\zeta \to 1$ (δες τους ορισμούς τους μετά την εξ. (11)), οπότε ο όρος στην αγκύλη που τείνει στο $\frac{\ln 1}{1-1} = \frac{0}{0}$, με τον κανόνα του L' Hospital (ή L' Hôpital) τείνει στο 1 :

$\lim_{\zeta\to 1}\left(\frac{\ln\zeta}{\zeta - 1}\right) = \lim_{\zeta\to 1}\left[\frac{1/\zeta}{1}\right] = 1$ και άρα πράγματι

$$t_a \xrightarrow{b\to 0} \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g}$$

Εναλλακτικά μπορούμε να αναπτύξουμε σε σειρά το λογάριθμο στην (18) αφού για μικρά x, $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

Οπότε

$$t_a = \frac{m}{b}\ln\left(1 + b\frac{\upsilon_0 \sin\theta}{mg}\right) = \frac{m}{b}\left(b\frac{\upsilon_0 \sin\theta}{mg} - \frac{1}{2}\left(b\frac{\upsilon_0 \sin\theta}{mg}\right)^2 + O(b^3)\right) =$$

$$= \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g} + O(b)$$

$O(b^3)$ σημαίνει τάξης (order) ίσης ή μεγαλύτερης της 3[ης], δηλαδή όροι που έχουν το b από την 3η δύναμη και πάνω, π.χ. $2b^3 + 0,6b^4 - 4b^5 + \ldots$. Αντίστοιχα για $O(b)$. Όταν πάρω $b \to 0$ όλοι αυτοί οι όροι εξαφανίζονται.

3[ος] έλεγχος. Αφού $\upsilon_y(t_a) = 0$ δεν θα υπάρχει κατακόρυφη συνιστώσα της οπισθέλκουσας. Άρα η επιτάχυνση a_y θα πρέπει να είναι ίση με $-g$:

Πράγματι $a_y(t_a) = -g\zeta e^{-t_a/\tau} = -g\zeta e^{-\tau\ln\zeta/\tau} = -g\frac{\zeta}{e^{\ln\zeta}} = -g$

Μέγιστο ύψος

Το μέγιστο ύψος είναι η κατακόρυφη απομάκρυνση για $t = t_a$.

Αντικαθιστούμε την (17) στην (12) και υπολογίζουμε

$$H = y(t_a) \Rightarrow \ H = \upsilon_{term}\tau\left\lfloor \zeta(1-e^{-t_a/\tau}) - \frac{t_a}{\tau} \right\rfloor = g\tau^2\left\lfloor \zeta(1-e^{-\tau\ln\zeta/\tau}) - \frac{\tau\ln\zeta}{\tau} \right\rfloor =$$

$$= g\left(\frac{\upsilon_0}{g}\frac{\sin\theta}{\zeta-1}\right)^2\left[\zeta(1-e^{-\ln\zeta}) - \ln\zeta\right] = \frac{\upsilon_0^2\sin^2\theta}{g}\frac{1}{(\zeta-1)^2}\left[\zeta\left(1-\frac{1}{\zeta}\right) - \ln\zeta\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{H = \frac{\upsilon_0^2\sin^2\theta}{g}\left\lfloor \frac{\zeta-1-\ln\zeta}{(\zeta-1)^2} \right\rfloor \quad (19)}$$

Με τις αρχικές παραμέτρους είναι

$$\boxed{H = \frac{m\upsilon_0\sin\theta}{b} - \frac{gm^2}{b^2}\ln\left(1+\frac{\upsilon_0\sin\theta}{mg}b\right) \quad (20)}$$

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους που εφαρμόσαμε για το χρόνο ανόδου δείξτε ότι, το μέγιστο ύψος για μικρή αντίσταση αέρα τείνει στο $\dfrac{\upsilon_0^2\sin^2\theta}{2g}$ που είναι το μέγιστο ύψος για βολή χωρίς οπισθέλκουσα. Είτε παίρνοντας το όριο $\zeta\rightarrow 1$ στην (19) είτε αναπτύσσοντας το λογάριθμο στην (20) σε σειρά και παίρνοντας το όριο $b\rightarrow 0$

Άσκηση Υπολογίστε το μέγιστο ύψος για δύο σφαίρες με μάζες $m_1 = 1,00$ kg και $m_2 = 10,00$ kg αντίστοιχα. Και οι δύο σφαίρες εκτοξεύονται ταυτόχρονα προς τα πάνω σε γωνία 53,13° από την οριζόντιο με ταχύτητα 100 m/s ενώ έχουν επίσης τον ίδιο συντελεστή απόσβεσης b = 0,400 kg/s. Συγκρίνεται το ύψος που θα φτάσουν με αυτό στο οποίο θα ανέρχονταν αν δεν υπήρχε αντίσταση αέρα. Ποια σφαίρα θα φτάσει σε μεγαλύτερο ύψος; Θα φτάσουν στο μέγιστο ύψος τους ταυτόχρονα;

Για κατακόρυφη βολή $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\sin\theta = 1$ παίρνουμε

$$\boxed{H = \frac{\upsilon_0^2}{g}\left[\frac{c-\ln(1+c)}{c^2}\right] \quad \text{ή} \quad H = \frac{m\upsilon_0}{b} - \frac{gm^2}{b^2}\ln\left(1+\frac{b\upsilon_0}{mg}\right)}$$

Οριζόντια απομάκρυνση στο μέγιστο ύψος

$$x_a = x(t_a) = \upsilon_0\tau\cos\theta\left(1-e^{-t_a/\tau}\right) = \upsilon_0\frac{\upsilon_0}{g}\frac{\sin\theta}{\zeta-1}\cos\theta\left(1-e^{-\tau\ln\zeta/\tau}\right) =$$

$$= \frac{\upsilon_0^2\sin 2\theta}{2g}\frac{1}{\zeta-1}\left(1-\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\upsilon_0^2\sin 2\theta}{2g}\frac{1}{\zeta-1}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)$$

$$\boxed{x_a = \frac{\upsilon_0^2\sin 2\theta}{2g}\frac{1}{\zeta}}$$

Εδώ το όριο είναι πολύ απλό

$$x_a = \frac{\upsilon_0^2\sin 2\theta}{2g}\frac{1}{\zeta} \xrightarrow{\zeta\rightarrow 1} \frac{\upsilon_0^2\sin 2\theta}{2g}$$

Με τις αρχικές παραμέτρους

$$x_a = \frac{\upsilon_0^2\sin 2\theta}{2g}\frac{1}{\left(1+\dfrac{b\upsilon_0}{mg}\sin\theta\right)}$$

Άσκηση
Υπολογίστε τις οριζόντιες απομακρύνσεις στο μέγιστο ύψος για τις σφαίρες της προηγούμενης άσκησης. $m_1 = 1,00$ kg, $m_2 = 10,00$ kg, θ= 53,13°, υ_0=100 m/s, b = 0,400 kg/s. Ποια σφαίρα έχει προχωρήσει οριζόντια περισσότερο.

Άσκηση
Υπολογίστε τις ταχύτητες των παραπάνω σφαιρών στους άξονες x και y μετά από 6 σταθερές χρόνου (t=6τ).

Οριζόντια ταχύτητα στο μέγιστο ύψος

$\upsilon_a = \upsilon_x(t_a) = \upsilon_0 \cos\theta e^{-t_a/\tau} = \upsilon_0 \cos\theta e^{-\tau \ln\zeta/\tau} = \upsilon_0 \cos\theta / e^{\ln\zeta}$

$$\boxed{\upsilon_a = \frac{\upsilon_0 \cos\theta}{\zeta}}$$

$$\upsilon_a = \frac{\upsilon_0 \cos\theta}{\left(1 + \frac{b\upsilon_0}{mg}\sin\theta\right)}$$

Άσκηση
Τι ποσοστό της αρχικής του ενέργειας έχει χάσει ένα βλήμα όταν φτάσει στο μέγιστο ύψος σε κατακόρυφη βολή με τις εξής παραμέτρους :

$b = 1,00 \times 10^{-2}$ kg/s, $m = 1,00$ kg, $\upsilon_0 = 980$ m/s, $g = 9,80$ N/kg

[στο μέγιστο ύψος έχει και δυναμική ενέργεια που πρέπει να υπολογίσετε]

Άσκηση
Τι ποσοστό της αρχικής του ενέργειας έχει χάσει ένα βλήμα όταν φτάσει στο μέγιστο ύψος σε βολή με τις εξής παραμέτρους :

$\theta = 45^{\circ}$, $b = 1,00 \times 10^{-2}$ kg/s, $m = 1,00$ kg, $\upsilon_0 = 980$ m/s, $g = 9,80$ N/kg

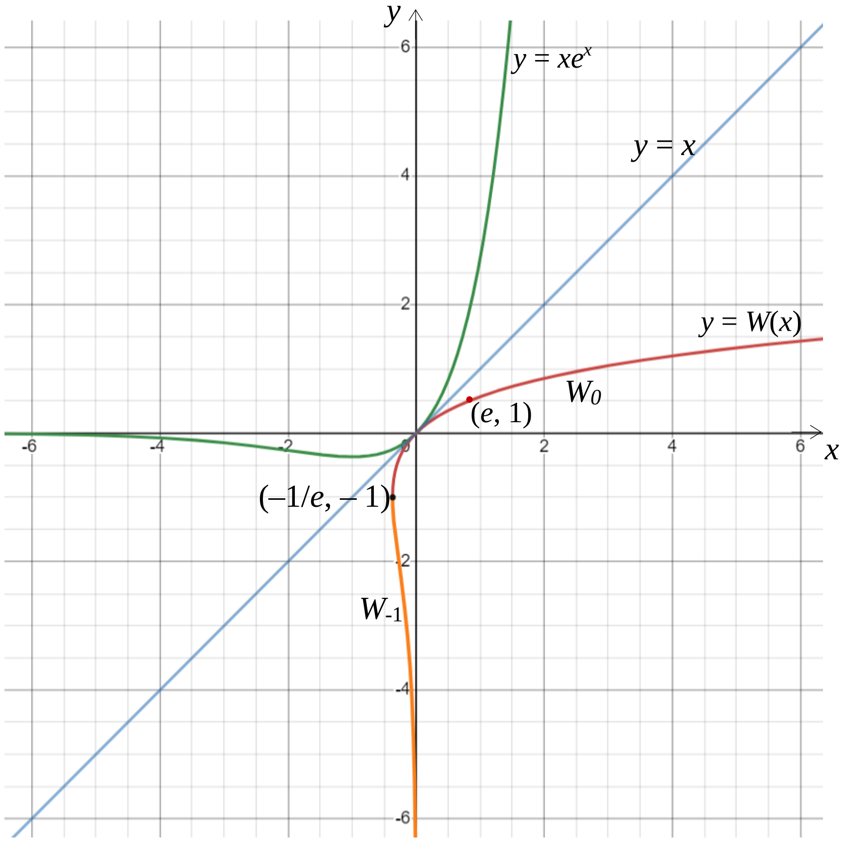
ΓΙΑ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΤΟ ΧΡΟΝΟ ΠΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΟ ΒΕΛΗΝΕΚΕΣ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΝΑ ΜΑΘΕΤΕ ΜΙΑ ΝΕΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΥ ΛΕΓΕΤΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ W ΤΟΥ LAMBERT

Η συνάρτηση W του Lambert : $y = W(x)$ είναι η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = xe^x$.

Δηλαδή $\quad ye^y = x \Rightarrow y = W(x)$

Η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω.

Είναι η συμμετρική καμπύλη της xe^x ως προς τη διχοτόμο ευθεία $y = x$



ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ ….