Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ
THE MOMENTUM PRINCIPLE

Ορμή υλικού σημείου

Η ποσότητα κίνησης που περιέχει το υλικό σημείο (σωματίδιο).

(Einstein 1905)	$\vec{p} = \gamma m \vec{\upsilon}$

Το διάνυσμα $\vec{\upsilon}$ είναι η ταχύτητα (velocity) του σωματιδίου. Δηλώνει πόσο γρήγορα κινείται και προς τα πού. Το μέτρο της ταχύτητας, που δηλώνει μόνο τη γρηγοράδα αλλά όχι την κατεύθυνση, έχει ειδικό όνομα στα Αγγλικά και ονομάζεται speed. Δυστυχώς δεν υπάρχει αντίστοιχος όρος στα Ελληνικά.

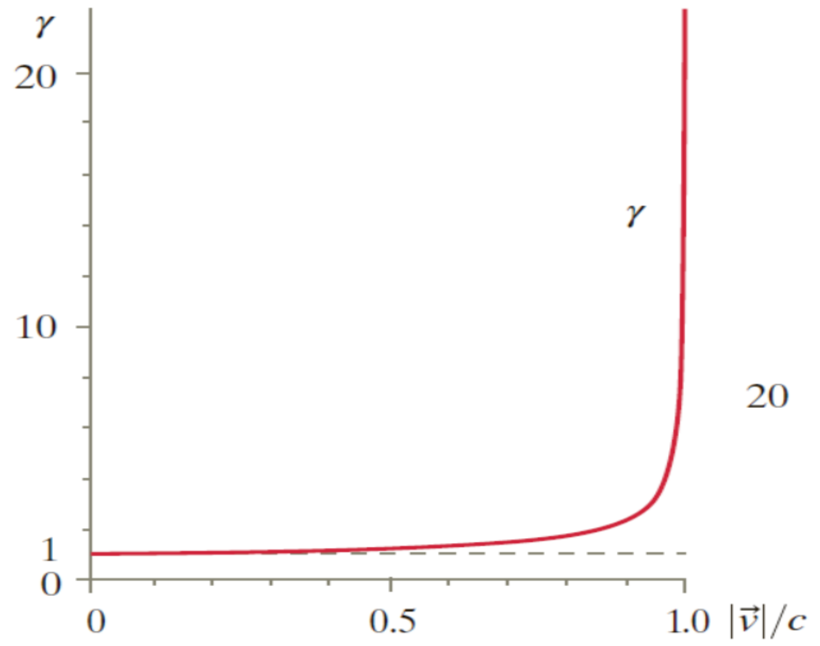
Η αδρανειακή μάζα m είναι το μέτρο της αδράνειάς του, δηλαδή του πόσο δύσκολα αλλάζει κινητική κατάσταση. Είναι πιο εύκολο να ξεκουνήσουμε ένα άδειο καρότσι από ένα γεμάτο. Ένα φορτωμένο φορτηγό έχει μεγαλύτερη ορμή από ένα αυτοκίνητο που κινείται με την ίδια ταχύτητα.

Παράγοντας Lorentz: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \geq 1$, δεν έχει μονάδες,

όπου $\upsilon = |\vec{\upsilon}|$ (speed) και $c = 299\,792\,458$ m/s ακριβώς $\simeq 3{,}00 \times 10^8$ m/s το μέτρο της ταχύτητας του φωτός.

Μονάδες: $[p] = [m][\upsilon] = \mathrm{kg}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, δεν έχουν όνομα

Για ταχύτητες πολύ μικρού μέτρου, συγκριτικά με του φωτός, $|\vec{\upsilon}| << c \Rightarrow \gamma \simeq 1$:



Οπότε, η ορμή για τις σχετικά μικρές ταχύτητες της καθημερινότητας είναι:

$$\vec{p} \simeq m\vec{\upsilon}$$

Ταχύτητα από την ορμή

Τα δύο διανύσματα είναι παράλληλα άρα:

$$\vec{p} = \gamma m\vec{\upsilon} \parallel \vec{\upsilon} \Rightarrow \hat{p} = \hat{\upsilon} \text{ όπου } \hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \Rightarrow \vec{p} = |\vec{p}|\,\hat{p} \quad \text{και } \hat{\upsilon} = \frac{\vec{\upsilon}}{|\vec{\upsilon}|} \Rightarrow \vec{\upsilon} = |\vec{\upsilon}|\,\hat{\upsilon}$$

Για οικονομία και απλότητα στις παρακάτω πράξεις συμβολίζουμε : $\upsilon = |\vec{\upsilon}|$ και $p = |\vec{p}|$

$$\vec{p} = \gamma m\vec{\upsilon} \Rightarrow p = \gamma m\upsilon \Rightarrow p = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \Rightarrow p^2 = \frac{m^2\upsilon^2}{1-\upsilon^2/c^2} \Rightarrow \frac{p^2}{m^2}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = \upsilon^2 \Rightarrow$$

$$\frac{p^2}{m^2} - \left(\frac{p}{mc}\right)^2 \upsilon^2 = \upsilon^2 \Rightarrow \upsilon^2\left(1+(p/mc)^2\right) = \frac{p^2}{m^2} \Rightarrow \upsilon = \frac{p/m}{\sqrt{1+(p/mc)^2}} \Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{\upsilon} = \frac{p/m}{\sqrt{1+(p/mc)^2}}\hat{\upsilon} = \frac{p/m}{\sqrt{1+(p/mc)^2}}\hat{p} \Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{\vec{p}/m}{\sqrt{1+(p/mc)^2}}$$

Επειδή

$$\sqrt{1+\left(p/mc\right)^2} = \sqrt{1+\left(\gamma m\upsilon/mc\right)^2} = \sqrt{1+\gamma^2\upsilon^2/c^2} = \sqrt{1+\frac{\upsilon^2/c^2}{1-\upsilon^2/c^2}} = \sqrt{\frac{1-\upsilon^2/c^2+\upsilon^2/c^2}{1-\upsilon^2/c^2}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{1+\left(p/mc\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{1-\upsilon^2/c^2}} = \gamma$$

μπορούμε να γράψουμε και

$$\vec{\upsilon} = \frac{\vec{p}}{\gamma m}$$

όπου το γ θα υπολογίζεται από την ορμή από τον παραπάνω τύπο.

Για συνήθεις ταχύτητες $|\vec{\upsilon}| << c \Rightarrow |\vec{p}| << mc$

$$\boxed{\vec{\upsilon} \simeq \frac{\vec{p}}{m}}$$

Εύρεση θέσης από την ταχύτητα

Αναλυτικά **:** Βρίσκουμε μια συνάρτηση της θέσης ως προς το χρόνο.
Εφόσον γνωρίζουμε την ταχύτητα και την αρχική θέση:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{\upsilon}(t) \Rightarrow d\vec{r}(t) = \vec{\upsilon}(t)dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{\upsilon}(t)dt \Rightarrow$$

Η θέση βρίσκεται με μια ολοκλήρωση από την ταχύτητα

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{\upsilon}(t)dt}$$

Αριθμητικά **:** Βρίσκουμε την αμέσως επόμενη θέση μια – μία κάθε Δt.

Από τον ορισμό της μέσης ταχύτητας : $\vec{\upsilon}_{avg} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{\Delta t}$

έχουμε : $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \Delta\vec{r} \Rightarrow \vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{\upsilon}_{avg}\Delta t$

Για μικρά χρονικά διαστήματα Δt <<1 θεωρούμε την προσέγγιση :

$$\vec{\upsilon}_{avg} \simeq \vec{\upsilon}_f$$

οπότε ισχύει προσεγγιστικά :

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \Delta\vec{r} \Rightarrow \vec{r}_f \simeq \vec{r}_i + \vec{\upsilon}_f \Delta t$$

που ονομάζεται εξίσωση επικαιροποίησης ή ενημέρωσης της θέσης

Αντικαθιστώντας τη σχέση ταχύτητας-ορμής έχουμε:

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \left(\vec{p}_f / \gamma m\right)\Delta t$$

Για τις σχετικά μικρές ταχύτητες της καθημερινότητας θα χρησιμοποιούμε :

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + (\vec{p}_f / m)\Delta t$$

Για να προβλέψουμε την κίνηση λοιπόν, χρειαζόμαστε έναν νόμο που να μας λέει πως αλλάζει η ορμή του σώματος από τις αλληλεπιδράσεις του με το περιβάλλον κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος Δt. Από αυτόν το νόμο θα βρίσκουμε την νέα ορμή του σώματος $\vec{p}_f$ και από την παραπάνω σχέση θα βρίσκουμε τη νέα του $\vec{r}_f$ θέση βήμα-βήμα για κάθε Δt

Αρχή της Ορμής

(ή θεμελιώδης νόμος της μηχανικής ή 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα ή θεώρημα ώθησης - ορμής).

Η **μεταβολή της ορμής** ενός υλικού είναι ίση με την **ώθηση** της συνισταμένης δύναμης που δέχεται. Ώθηση είναι το γινόμενο της δύναμης επί το χρονικό διάστημα που αυτή δρα.

Αρχή της ορμής (μορφή διαφορών)

$$\textit{μεταβολή της ορμής} = (\textit{συνισταμένη δύναμη}) \cdot (\textit{χρονικό διάστημα}) \Rightarrow$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_{net}\Delta t$$

Το Δt στην παραπάνω σχέση πρέπει να λαμβάνεται επαρκώς μικρο ώστε η δύναμη $\vec{F}_{net}$ να μπορεί να θεωρηθεί σταθερή στο χρονικό διάστημα Δt. Η παραπάνω σχέση στο όριο $\Delta t \to 0$ γίνεται μια διαφορική εξίσωση

Αρχή της ορμής (διαφορική μορφή)

$$d\vec{p} = \vec{F}_{net}dt \Rightarrow \vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Για ένα σωματίδιο στις ταχύτητες της καθημερινότητας παίρνει τη μορφή

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{net} = m\vec{a}$$

Η συνισταμένη δύναμη είναι μια συνάρτηση των ιδιοτήτων του σώματος και του περιβάλλοντός του. Ιδιότητες του σώματος είναι π.χ. η θέση του ($\vec{r}$), η ταχύτητά του ($\vec{\upsilon}$), η αδράνειά του (m), το ηλεκτρικό του φορτίο (q), το βαρυτικό του φορτίο (m_g), ο όγκος του (V), το σχήμα του κλπ. Ιδιότητες του περιβάλλοντος του σώματος είναι π.χ. η ένταση του πεδίου βαρύτητας ($\vec{g}$), η ένταση του ηλεκτρικού ($\vec{E}$) ή μαγνητικού πεδίου ($\vec{B}$), η πυκνότητα του ρευστού μέσα στο οποίο κινείται (ρ), ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του δαπέδου πάνω στο οποίο κινείται (μ_k), η σκληρότητα του ελατηρίου με το οποίο είναι συνδεδεμένο (k), κλπ. Οι διάφορες δυνάμεις από το περιβάλλον προέρχονται πάντα από κάποιο άλλο σώμα το οποίο πρέπει να μπορούμε να αναγνωρίσουμε π.χ. Γη, ηλεκτρικό φορτίο, ρευματοφόρος αγωγός, δάπεδο, αέρας, ελατήριο, νήμα, κλπ.

Εφόσον λοιπόν μπορούμε να ανακαλύψουμε και να γράψουμε τύπους για τις διάφορες δυνάμεις από το περιβάλλον, η αρχή της ορμής μας επιτρέπει να προβλέψουμε την κίνηση που θα εκτελέσει το σώμα.

Προέλευση, πεδίο και όρια εφαρμογής της Αρχής της Ορμής

Η αρχή της ορμής είναι μια από τις θεμελιώδης αρχές της μηχανικής. Δηλαδή είναι πρώτη αρχή και άρα δεν αποδεικνύεται μαθηματικά. Δημιουργήθηκε/ανακαλύφθηκε από τη φαντασία του ανθρώπου μετά από πολύχρονες παρατηρήσεις και στη συνέχεια επιβεβαιώθηκε πειραματικά. Στην παραπάνω μορφή (με λόγια στα λατινικά) δημοσιεύτηκε από τον Νεύτωνα το 1687 στις Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας (Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica).

Η αρχή της ορμής

- ισχύει για κάθε σύστημα ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλο ή μικρό είναι και ανεξάρτητα από το πόσο απλό ή σύνθετο είναι (από σμήνη γαλαξιών έως υποατομικά σωματίδια)
- ισχύει τόσο για συστήματα σταθερής μάζας όσο και για συστήματα μεταβλητής μάζας
- ισχύει για κάθε είδους αλληλεπίδραση (βαρυτική, ηλεκτρική, μαγνητική, πυρηνική κλπ.)
- ισχύει τόσο για μικρές όσο και για μεγάλες ταχύτητες (σχετικιστικές)
- συνδέει ένα αποτέλεσμα (μεταβολή της ορμής) με μια αιτία (αλληλεπίδραση)

Τα όρια εφαρμογής της Αρχής της Ορμής, εκτείνονται έως το σημείο όπου αρχίζουμε να μελετούμε κινήσεις που πραγματοποιούνται σε έναν πάρα πολύ μικρό χώρο, της τάξης του 10^{-10} m. Π.χ. ένα ηλεκτρόνιο γύρω από ένα πρωτόνιο στο άτομο του Υδρογόνου, λόγω της ηλεκτροστατικής δύναμης Coulomb ($\vec{F}_C(\vec{r}) = -ke^2 / r^2\, \hat{r}$). Εκεί ανακαλύφθηκε ότι η έννοια της τροχιάς καταρρέει. Δεν μπορούμε να ξέρουμε με βεβαιότητα τη θέση του ηλεκτρονίου κάθε χρονική στιγμή αλλά μπορούμε μόνο να υπολογίσουμε την πιθανότητα να βρίσκεται σε συγκεκριμένη θέση. Δεν υπάρχει τροχιά αλλά ένα «σύννεφο» πυκνότητας πιθανότητας το οποίο είναι πιο πυκνό εκεί που το ηλεκτρόνιο βρίσκεται πιο συχνά και πιο αραιό εκεί που το ηλεκτρόνιο θα βρεθεί σπάνια. Η μηχανική γίνεται κβαντομηχανική. Ακόμα όμως και σε αυτή την επικράτεια, τον μικρόκοσμο, η Αρχή της Ορμής επιβιώνει σε κάποια συγγενική της μορφή. Η θέση μπορεί να μην έχει συγκεκριμένη χρονική τιμή $\vec{r}(t)$ όμως έχει κάποια μέση τιμή $\langle \vec{r} \rangle$ στο χώρο, κάθε χρονική στιγμή. Οι μέσες τιμές των μεγεθών συνδέονται με τις σχέσεις :

$$\boxed{m\frac{d\langle \vec{r}\rangle}{dt} = \langle \vec{p}\rangle \qquad \text{και} \qquad \frac{d\langle \vec{p}\rangle}{dt} = \langle \vec{F}(\vec{r})\rangle \qquad \text{(Ehrenfest)}}$$

Εύρεση της εξίσωσης κίνησης υλικού σημείου από την Αρχή της ορμής

Με δεδομένα :

- τις αλληλεπιδράσεις $\vec{F}_{net}$ του σωματιδίου με το περιβάλλον του και
- την αρχική του θέση $\vec{r}_i$ και ταχύτητα $\vec{\upsilon}_i$ τη χρονική στιγμή t_i

αναζητούμε να προβλέψουμε την κίνησή του στο μέλλον, δηλαδή τη θέση του κάθε επόμενη χρονική στιγμή $t > t_i$: $\vec{r}(t)$.

Η έκφραση $\vec{r}(t)$ που είναι η χρονική εξάρτηση της θέσης, ονομάζεται **εξίσωση κίνησης** και μπορεί να βρεθεί σε διάφορες μορφές ως:

- Μαθηματική συνάρτηση του χρόνου $\vec{r}(t)$ (σπανίως, εκτός απλών θεμελιωδών περιπτώσεων)
- Πίνακα τιμών ($t_n, \vec{r}_n$) ή γραφική παράσταση ($\vec{r}$ vs t) θέσης-χρόνου (συνήθως)

Η πρώτη περίπτωση ονομάζεται **αναλυτική λύση** και μπορεί να βρεθεί μόνο όταν έχουμε τη δυνατότητα να λύσουμε μαθηματικά τη διαφορική μορφή είτε με απευθείας ολοκλήρωση είτε με εύρεση μιας συνάρτησης $\vec{p}(t)$ που να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση. Αυτό συμβαίνει σπάνια για συνήθεις ταχύτητες ($\vec{p} \simeq m\vec{\upsilon}$) εκτός κάποιων βασικών περιπτώσεων όπως πλάγια βολή, απλή αρμονική ταλάντωση, κίνηση πλανητών, κλπ., και ακόμα πιο σπάνια για σχετικιστικές ταχύτητες ($\vec{p} = \gamma m\vec{\upsilon}$).

$$d\vec{p} = \vec{F}_{net}dt \Rightarrow \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}(t)} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t} \vec{F}_{net}dt$$

Η αριστερή πλευρά ολοκληρώνεται αμέσως και παίρνουμε :

$$\vec{p}(t) - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t} \vec{F}_{net}dt \Rightarrow \quad \vec{p}(t) = \vec{p}_i + \int_{t_i}^{t} \vec{F}_{net}dt$$

Αν μπορούμε να κάνουμε το ολοκλήρωμα της δεξιάς πλευράς έχουμε λύσει το πρόβλημα αναλυτικά.

$$d\vec{p} = \vec{F}_{net}dt \Rightarrow \vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}(t)}{dt}$$

Αυτό είναι μια διαφορική εξίσωση που περιέχει ή όχι την συνάρτηση $\vec{p}(t)$ (μέσα στην $\vec{F}_{net}$) και την παράγωγο της στο δεξί μέλος. Αν μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $\vec{p}(t)$ που να την ικανοποιεί έχουμε λύσει το πρόβλημα αναλυτικά.
Έχοντας βρει την ορμή βρίσκουμε την ταχύτητα και στη συνέχεια την εξίσωση κίνησης με άλλη μία ολοκλήρωση

$$\vec{\upsilon}(t) \simeq \frac{\vec{p}(t)}{m}$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{\upsilon}(t)dt}$$

Η δεύτερη περίπτωση ονομάζεται **αριθμητική λύση με επαναληπτική διαδικασία** (iteration). Είναι αυτό που συμβαίνει συνήθως για προβλήματα της πραγματικής ζωής καθώς οι διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν είναι αδύνατον να λυθούν αναλυτικά. Η επαναληπτική διαδικασία παρακολουθεί την κίνηση του υλικού σημείο βήμα-βήμα για διαδοχικά μικρά χρονικα διαστήματα Δ*t* και αποτελείται από την εξής ακολουθία βημάτων:

1) Καθορισμός χρονικού βήματος:

$$\Delta t = \ldots,$$

όσο μικρότερο τόσο ακριβέστερη η λύση άλλα τόσο πιο χρονοβόρο το σύνολο των υπολογισμών

2) Ενημέρωση δύναμης τη χρονική στιγμή t_i :

$$\vec{F}_{net,i} = \ldots, \qquad \text{τύπος ανάλογα με την περίπτωση}$$

3) Ενημέρωση ορμής λόγω επίδρασης της δύναμης :

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{F}_{net,i}\Delta t$$

4) Ενημέρωση θέσης λόγω της νέας ορμής την οποία απέκτησε το σώμα:

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + (\vec{p}_f / m)\Delta t \quad \text{για συνήθεις ταχύτητες ή}$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + (\vec{p}_f / \gamma m)\Delta t$$

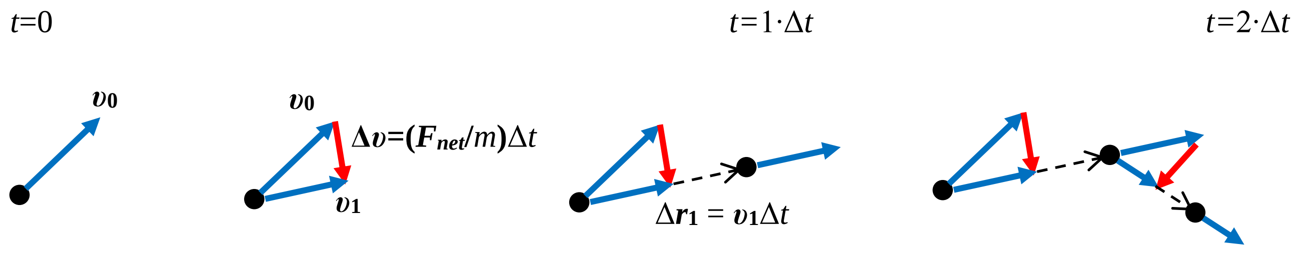
5) Μετάβαση στην επόμενη χρονική στιγμή :

$$t_f = t_i + \Delta t$$

6) Επανάληψη όλων τον υπολογισμών μέχρι μια τελική χρονική στιγμή που προσδιορίζουμε. Χρησιμοποιούμε τις τιμές ορμής και θέσης που έχουμε βρει κάποια χρονική στιγμή ως αρχικές τιμές για να υπολογίσουμε τη δύναμη, την ορμή και τη θέση την επόμενη χρονική στιγμή.

Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζουμε μια-μια όλες τις θέσεις από τις οποίες περνάει το σώμα και κατασκευάζουμε την τροχιά του.

Οι παραπάνω υπολογισμοί θεωρητικά μπορούν να γίνουν με το χέρι αλλά πρακτικά γίνονται από ηλεκτρονικό υπολογιστή. Η διαδικασία απεικονίζεται στα παρακάτω σχήματα.



Το σώμα εμφανίζεται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$ στη θέση $\boldsymbol{r}_0$.

Η επίδραση της δύναμης που θα δεχτεί για Δt αλλάζει την ταχύτητά του «στιγμιαία»

Θεωρούμε ότι το Δt είναι τόσο «μικρό» ώστε η δύναμη να παραμένει σταθερή για Δt

Το σώμα με τη νέα του ταχύτητα πάει στην επόμενη θέση

Στη νέα θέση το σώμα δέχεται νέα δύναμη και η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

Η τροχιά κατασκευάζεται σημείο - σημείο.

Περί μάζας

Αδρανειακή μάζα

Η επιτάχυνση είναι ένα κινηματικό μέγεθος το οποίο μπορεί να μετρηθεί (σε m/s^2). Επίσης και η δύναμη μπορεί να μετρηθεί (σε N). Έτσι, μετρώντας την επιτάχυνση που προκαλεί μια δεδομένη δύναμη προσδιορίζουμε αρχικά την αδράνεια ή αδρανειακή μάζα m ενός σώματος

$$m = \frac{F}{a}$$

Βαρυτική μάζα

Η δύναμη της βαρύτητας εκφράζεται ως :

$$\vec{F}_G = m_g \vec{g}(\vec{r})$$

όπου

m_g : βαρυτικό φορτίο ή βαρυτική μάζα , $[m_g]$ = kg

$\vec{g}(\vec{r})$: ένταση του πεδίου βαρύτητας στον συγκεκριμένο τόπο, $[g] = \dfrac{\text{N}}{\text{μονάδα φορτίου}} = \dfrac{\text{N}}{\text{kg}}$

Οπότε η επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται μόνο υπό την επίδραση της βαρύτητας και καμίας άλλης δύναμης θα είναι :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_G}{m} = \left(\frac{m_g}{m}\right)\vec{g}$$

Αρχή της Ισοδυναμίας

Η παρατήρηση ότι οποιαδήποτε δύο διαφορετικά σώματα, δεχόμενα μόνο τη δύναμη της βαρύτητας, σε δεδομένο τόπο, κινούνται με την ίδια επιτάχυνση, οδηγεί στη διαπίστωση ότι η αδρανειακή μάζα που εμφανίζεται στην Αρχή της Ορμής ισούται με τη βαρυτικό φορτίο που εμφανίζεται στον τύπο της βαρυτικής δύναμης

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 \Rightarrow \left(\frac{m_{g1}}{m_1}\right)\vec{g} = \left(\frac{m_{g2}}{m_2}\right)\vec{g} \Rightarrow \frac{m_{g1}}{m_1} = \frac{m_{g2}}{m_2} = \sigma\tau\alpha\theta$$

και μπορούμε να θέσουμε την αυθαίρετη σταθερά ίση με 1 χωρίς απώλεια γενικότητας.

Αρχή της ισοδυναμίας	$m = m_g$

Από την παρατήρηση αυτή ξεκινάει η Γενική θεωρία της Σχετικότητας του Einstein.

Παράδειγμα σταθερής δύναμης $\vec{F}_{net} = \vec{F} = \sigma\tau\alpha\theta.$

Είναι δυνατή η αναλυτική λύση

Παραδείγματα σταθερής δύναμης είναι π.χ.
το βάρος των σωμάτων στην επιφάνεια της Γης,

$$\vec{F}_G = m\vec{g}$$

η ηλεκτρική δύναμη σε ηλεκτρόνιο στο ομογενές πεδίο επίπεδου πυκνωτή ή στο σύρμα κυκλώματος,

$$\vec{F}_E = q\vec{E}$$

η άνωση σε πλήρως βυθισμένο σώμα όγκου V από υγρό πυκνότητας ρ,

$$\vec{F}_B = -\rho V\vec{g}$$

η τριβή ολίσθησης

$$\vec{F}_{fk} = -\mu_k N\hat{\upsilon}$$

<u>Αναλυτική λύση</u>

Για ταχύτητες της καθημερινότητας $|\vec{\upsilon}| << c$. Από τη διαφορική μορφή παίρνουμε

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{net} = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{net} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \Rightarrow d\vec{\upsilon} = \vec{a}dt$$

Όπου ορίσαμε $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}_{net}}{m} = \sigma\tau\alpha\theta.$

Η παραπάνω σχέση ολοκληρώνεται εύκολα

$$d\vec{\upsilon} = \vec{a}dt \Rightarrow \int_{\vec{\upsilon}_i}^{\vec{\upsilon}} d\vec{\upsilon} = \vec{a}\int_{t_i}^{t} dt \Rightarrow \Delta\vec{\upsilon} = \vec{a}\Delta t \Rightarrow \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_i = \vec{a}(t-t_i) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_i + \vec{a}(t-t_i)}$$

Όμως $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, η οποία μπορεί τώρα και αυτή να ολοκληρωθεί εύκολα για να βρούμε την εξίσωση κίνησης

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}_i + \vec{a}(t-t_i) \Rightarrow \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}} d\vec{r} = \vec{\upsilon}_i\int_{t_i}^{t} dt + \vec{a}\int_{t_i}^{t}(t-t_i)dt \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_i = \vec{\upsilon}_i(t-t_i) + \frac{1}{2}\vec{a}\int_0^{t-t_i} udu \Rightarrow$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $u = t - t_i, \ \ du = dt$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_i + \vec{\upsilon}_i(t-t_i) + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_i)^2}$$

Όταν ξεκινάμε την παρατήρηση της κίνησης συνήθως ξεκινάμε ένα δικό μας χρονόμετρο και θέτουμε $t_i = 0$, οπότε τις αρχικές συνθήκες τις συμβολίζουμε $\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_0$ και $\vec{r}_i = \vec{r}_0$.

Έτσι οι δύο παραπάνω σχέσεις γράφονται:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t \qquad (1)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad (2)$$

Μπορούμε να δείξουμε εύκολα από τις παραπάνω δύο εξισώσεις ότι ισχύουν και οι παρακάτω σχέσεις οι οποίες επίσης είναι πολύ χρήσιμες.

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \equiv \vec{\upsilon}_{avg} = \frac{\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_0}{2} \qquad (3)$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2\vec{a} \cdot \Delta\vec{r} \qquad (4)$$

Η σχέση (3) ονομάζεται θεώρημα της μέσης ταχύτητας. Μας δείχνει ότι η μέση ταχύτητα $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ είναι ίση με τον αριθμητικό μέσο όρο των ταχυτήτων στην αρχή και στο τέλος του διαστήματος Δt. Αποδεικνύεται απευθείας απαλείφοντας την επιτάχυνση μεταξύ της (1) και (2)

$$\vec{a} = \frac{\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0}{t}, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0}{t}\right)t^2 \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}(\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0)t \Rightarrow \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t} = \frac{\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_0}{2}$$

Για να αποδείξουμε τη σχέση (4) παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ της (1) και της (3)

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 = \vec{a}t & (1) \\ \vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_0 = \dfrac{2\Delta\vec{r}}{t} & (2) \end{array}\right\} \Rightarrow (\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0) \cdot (\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_0) = 2t\,\vec{a} \cdot \frac{\Delta\vec{r}}{t} \Rightarrow \upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2\,\vec{a} \cdot \Delta\vec{r}$$

Η σχέση (4) μας δίνει την ταχύτητα σαν συνάρτηση της μετατόπισης χωρίς αναφορά στο χρόνο. Είναι το γνωστό μας θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για σταθερή δύναμη που γνωρίζουμε από το Λύκειο.

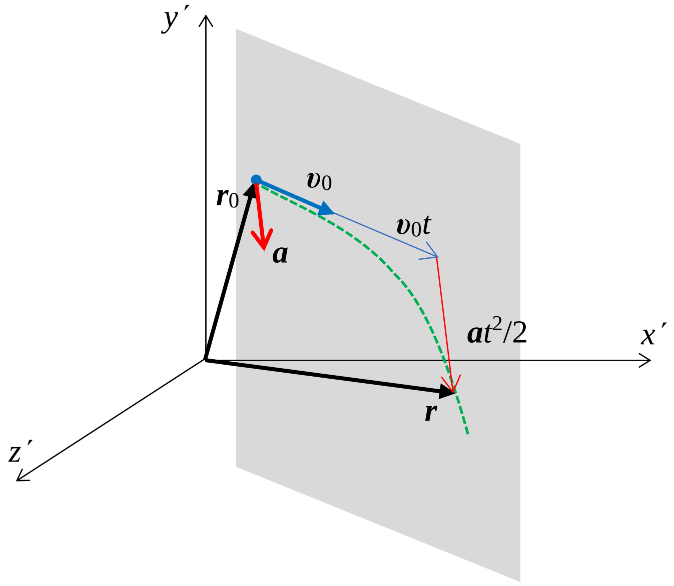
Όλες οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν για οποιεσδήποτε χρονικές στιγμές $t_1<t_2$. Απλώς θέτουμε ως αρχική στιγμή την πρώτη στιγμή t_1 : $t_0 \to t_1,\ \vec{r}_0 \to r_1,\ \vec{\upsilon}_0 \to \vec{\upsilon}_1$ και ως τελική τιμή την t_2 : $t \to t_2,\ \vec{r} \to \vec{r}_2,\ \vec{\upsilon} \to \vec{\upsilon}_2$

Η εξίσωση κίνησης

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

μας λέει ότι στη γενικότερη περίπτωση όπου η αρχική ταχύτητα δεν είναι συγγραμική με την δύναμη και άρα την επιτάχυνση ($\vec{\upsilon}_0 \nparallel \vec{a}$) η τροχιά θα είναι παραβολή που ξεκινάει από το σημείο $\vec{r}_0$ και κείται στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{\upsilon}_0, \vec{a}$.

Όταν η αρχική ταχύτητα είναι συγγραμική με την επιτάχυνση ($\vec{\upsilon}_0 \parallel \vec{a}$) η κίνηση θα είναι ευθύγραμμη πάνω στην ευθεία που ανήκουν. Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη αν τα διανύσματα έχουν την ίδια φορά $\vec{\upsilon}_0 \nearrow\nearrow \vec{a}$ ή αν τα διανύσματα έχουν αντίθετη φορά $\vec{\upsilon}_0 \nearrow\swarrow \vec{a}$ ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη αρχικά κατά τη φορά της αρχικής ταχύτητας, μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα και στη συνέχεια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κατά τη φορά της επιτάχυνσης.



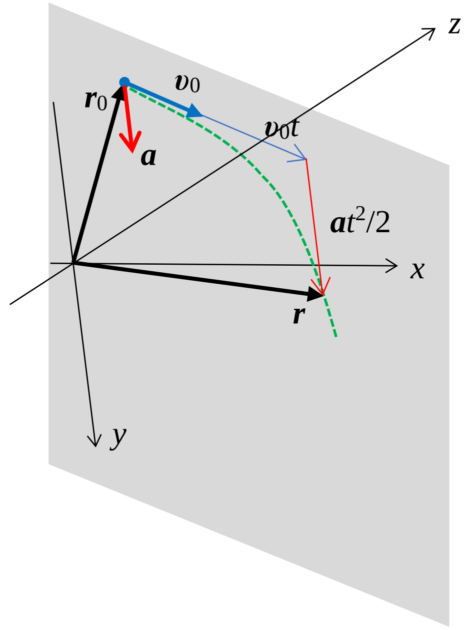
Για να κάνουμε τη ζωή μας εύκολη επιλέγουμε

1) άξονες ώστε το επίπεδο *x*-*y* να είναι το επίπεδο της τροχιάς και
2) παίρνουμε ως άξονα *y* την διεύθυνση της επιτάχυνσης

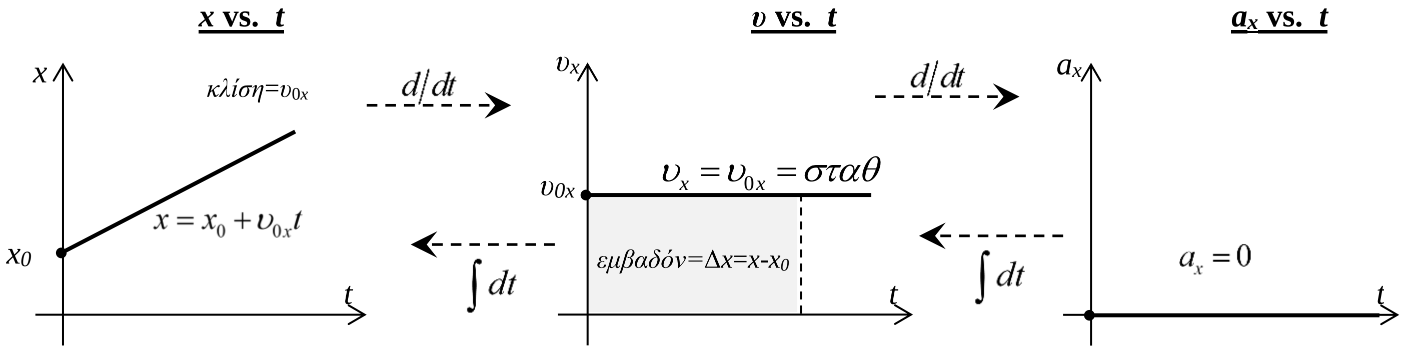
Δηλαδή
$$\vec{\upsilon}_0 = \upsilon_{0x}\hat{x} + \upsilon_{0y}\hat{y} = \upsilon_0 \cos\theta \hat{x} + \upsilon_0 \sin\theta \hat{y}$$
$$\vec{a} = a\hat{y}$$

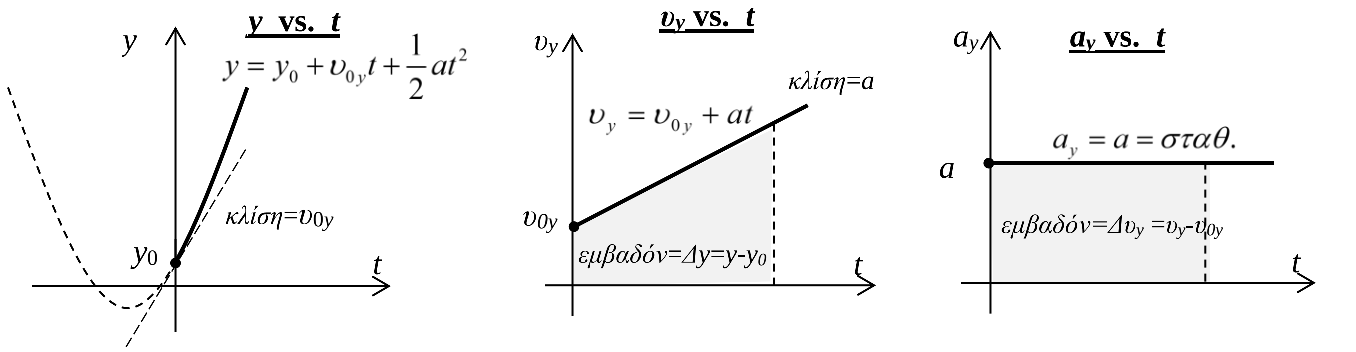
Όπου θ, η γωνία που σχηματίζει η αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ με τον άξονα x : $\tan\theta = \dfrac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_{0x}}$

(Μπορούμε επίσης να βάλουμε την αρχή των αξόνων στην αρχική θέση του σώματος $\vec{r}_0 = 0$, ανάλογα με την περίσταση)

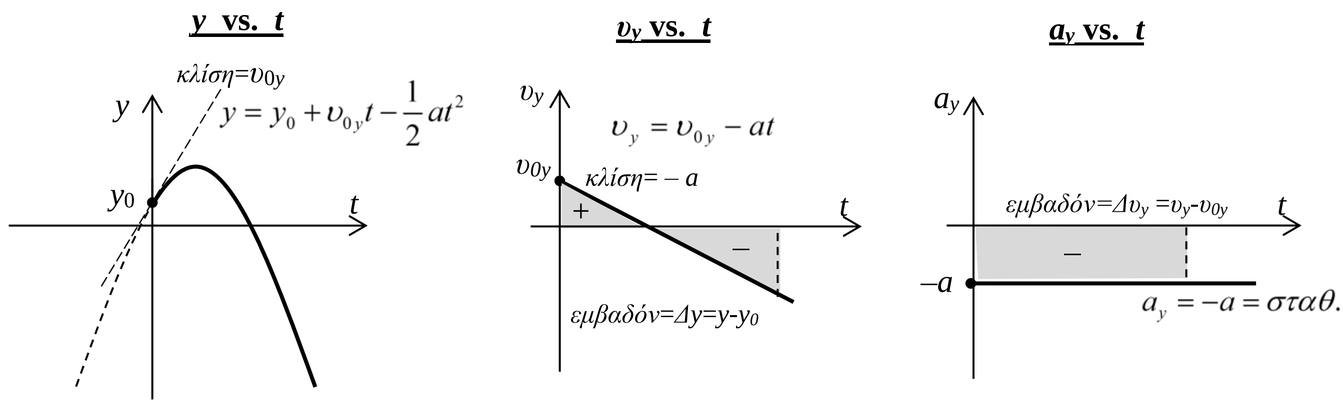


Τότε οι χρονικές εξαρτήσεις και οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις κάθε συνιστώσας *x* ή *y* θα είναι (για $x_{0i} > 0,\quad \upsilon_{0i} > 0,\quad a > 0$)





Αν $a < 0$



Τα κοίλα είναι προς τα κάτω

Το εμβαδόν πάνω από τον άξονα του *t* είναι θετικό (+) ενώ το από κάτω εμβαδόν είναι αρνητικό (–)

Λύνοντας την εξίσωση του *x* ως προς το χρόνο και αντικαθιστώντας στην εξίσωση του *y* παίρνουμε την εξίσωση της τροχιάς

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t \Rightarrow t = \frac{x - x_0}{\upsilon_{0x}}, \qquad y = y_0 + \upsilon_{0y}\left(\frac{x - x_0}{\upsilon_{0x}}\right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{x - x_0}{\upsilon_{0x}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{y - y_0 = \tan\theta\left(x - x_0\right) + \frac{a}{2\upsilon_0^2 \cos\theta}\left(x - x_0\right)^2}$$

που είναι παραβολή.

<u>Εναλλακτικός τρόπος αναλυτικής λύσης χωρίς ολοκληρώματα</u>

Για την περίπτωση της σταθερής δύναμης που μελετάμε η εξίσωση κίνησης βρίσκεται πιο εύκολα από την αρχής της ορμής στη μορφή διαφορών

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{F}_{net} t$$

Επειδή $\vec{\upsilon} \simeq \dfrac{\vec{p}}{m}$

$$\vec{\upsilon}_f = \vec{\upsilon}_i + \frac{\vec{F}_{net}}{m} t \quad (1)$$

Επειδή η $\vec{F}_{net}$ είναι μια σταθερά, η ταχύτητα μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο.

Χρειαζόμαστε το εξής μαθηματικό αποτέλεσμα:

Όταν ένα μέγεθος μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο τότε η μέση χρονική τιμή του είναι ο αριθμητικός μέσος των τιμών του στα άκρα του χρονικού διαστήματος. Οπότε:

$$\vec{\upsilon}_{avg} = \frac{\vec{\upsilon}_i + \vec{\upsilon}_f}{2}$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{\upsilon}_{avg} t = \vec{r}_i + \frac{\vec{\upsilon}_i + \vec{\upsilon}_f}{2} t = \vec{r}_i + \frac{\vec{\upsilon}_i + \vec{\upsilon}_i + \dfrac{\vec{F}_{net}}{m} t}{2} t \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{\upsilon}_i t + \frac{\vec{F}_{net}}{2m} t^2}$$

<u>Αριθμητική λύση με επαναληπτική διαδικασία</u>

Χρησιμοποιούμε VPython στην glowscript.org για τους υπολογισμούς και την αναπαράσταση (animation) της κίνησης.
Μεταβείτε στην ιστοσελίδα. Εγγραφείτε με τα στοιχεία του λογαριασμού σας στην Google (gmail).
Γράψτε και τρέξτε επιτόπου το παρακάτω πρόγραμμα και θα δείτε την τρισδιάστατη τροχιά.

```
GlowScript 3.1 VPython
pointparticle1 = sphere(pos = vector(5,20,-3), radius = 2, color = color.green, make_trail = True, v=vector(-2,40,-15), m=1)
Fnet = vector(2,-10,4)
t=0
dt=0.02
while t<8:
   rate(250)
   pointparticle1.v = pointparticle1.v +(Fnet/pointparticle1.m)*dt
   pointparticle1.pos = pointparticle1.pos + pointparticle1.v*dt
   t=t+dt
```

Οι παραπάνω 9 γραμμές κώδικα είναι ό,τι χρειάζεστε (το GlowScript 3.1 VPython βγαίνει αυτόματα)

Για να καταλάβετε τι κάνουμε και να αντιληφθείτε την κίνηση στο χώρο περιλαμβάνω στο πρόγραμμα, σχόλια (με #) και τρεις άξονες αναφοράς:

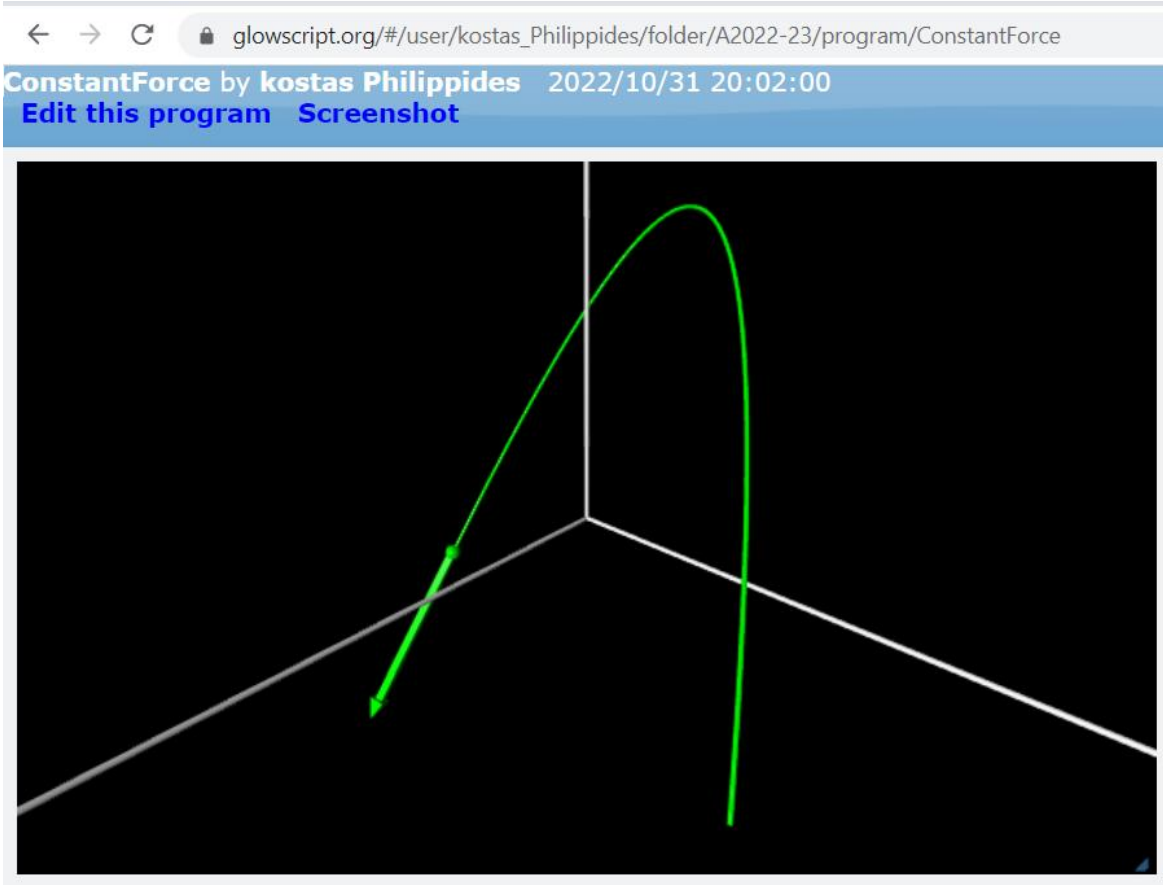
```
GlowScript 3.1 VPython

# (Προαιρετικά) Βάζω άξονες αναφοράς για να καταλάβω καλύτερα την κίνηση στο χώρο
L = 100
xaxis = cylinder(pos = vector(0,0,0), axis = vector(1,0,0), radius = 0.5, length = 2*L, color = color.white )
xlbl=label(pos=vector(2*L+4,0,0), text="x", color=color.red, opacity=0, height=10, box=0)
yaxis = cylinder(pos = vector(0,0,0), axis = vector(0,1,0), radius = 0.5, length = 2*L, color = color.white )
ylbl=label(pos=vector(0,2*L+6,0), text="y", color=color.red, opacity=0, height=10, box=0)
```

```
zaxis = cylinder(pos = vector(0,0,0), axis = vector(0,0,1), radius = 0.5, length = 2*L, color = color.white )
zlbl=label(pos=vector(0,0,2*L+4), text="z", color=color.red, opacity=0, height=10, box=0)

# Ορίζω τις ιδιότητες και τις αρχικές συνθήκες του σωματιδίου
pointparticle1 = sphere(pos = vector(5,20,-3), v=vector(-2,40,-15), m=1, radius = 2, color = color.green, make_trail = True)
attach_arrow(pointparticle1, 'v', shaftwidth=2)

# Βάζω μια σταθερή δύναμη
Fnet = vector(2,-10,4)

# Μηδενίζω το χρονόμετρο και ορίζω το χρονικό βήμα Δt
t=0
dt=0.02

# Εφαρμόζω την Αρχή της Ορμής μέχρι την τελική χρονική στιγμή που επιλέγω
while t<8:   # Μέχρι να φτάσω στην τελική στιγμή υπολόγιζε αυτά που είναι στην εσοχή παρακάτω
   rate(250)   #Χρειάζεται για τη VPython. Προσδιορίζει πόσους υπολογισμούς να κάνει το πρόγραμμα κάθε δευτερόλεπτο
   pointparticle1.v = pointparticle1.v +(Fnet/pointparticle1.m)*dt    #Ενημέρωση ταχύτητας
   pointparticle1.pos = pointparticle1.pos + pointparticle1.v*dt       #Ενημέρωση θέσης
   t=t+dt                                                              # Μετάβαση στην επόμενη χρονική στιγμή
```

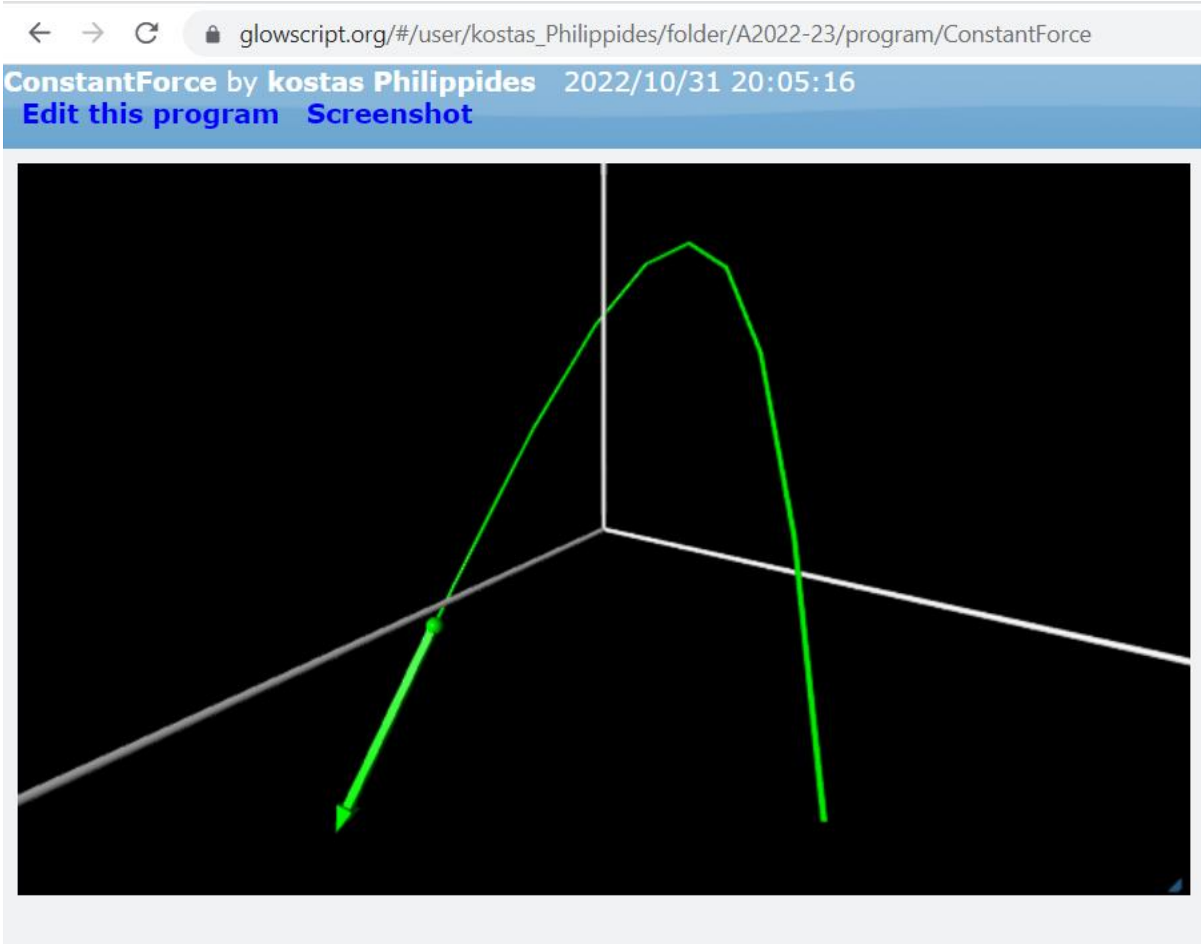
Αλλάξτε αυθαίρετα τις τιμές της αρχικής ταχύτητας, της αρχικής θέσης και της μάζας του σωματιδίου (μέσα στο pointparticle) καθώς επίσης και της δύναμης για να δείτε πως αλλάζει η τροχιά.

Αλλάξτε το χρονικό βήμα dt, μειώνοντας το ή αυξάνοντάς το για να δείτε πόσο διαρκούν οι υπολογισμοί στην πρώτη περίπτωση και πόσο χοντροκομμένη βγαίνει η τροχιά στη δεύτερη.

dt = 0.02



dt=0.2


glowscript.org/#/user/kostas_Philippides/folder/A2022-23/program/ConstantForce
ConstantForce by kostas Philippides 2022/10/31 20:05:16
Edit this program Screenshot