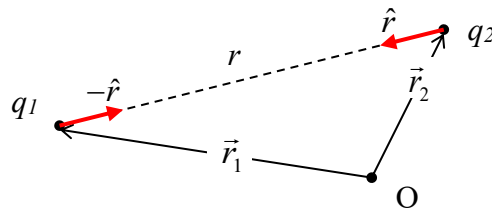


Νόμος Coulomb (Ηλεκτροστατική δύναμη)

Υπάρχουν δύο είδη ηλεκτρικού φορτίου, το θετικό και το αρνητικό. Το ηλεκτρικό φορτίο μετριέται σε C, κουλόμ και είναι πάντα ακέραιο πολλαπλάσιο του $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C. Ακίνητα σώματα που φέρουν ηλεκτρικό φορτίο ασκούν μεταξύ τους ηλεκτροστατικές δυνάμεις

Με μια σειρά εντυπωσιακών πειραμάτων ο Coulomb προσδιόρισε τα χαρακτηριστικά της ηλεκτροστατικής δύναμης μεταξύ σημειακών φορτίων :

- Είναι κεντρική $\vec{F}_E = f(r)\hat{r}$
- Είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης που χωρίζει τα δύο σώματα $f(r) \propto \frac{1}{r^2}$
- Είναι ανάλογη των φορτίων των σωμάτων $f(r) \propto q_1 \cdot q_2$
- Η συνολική δύναμη που δέχεται ένα σημειακό φορτίο q_0 από έναν αριθμό n άλλων σημειακών φορτίων q_1, q_2, \dots, q_n είναι το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους δυνάμεων που αυτά ασκούν ξεχωριστά το καθένα πάνω στο εν λόγω φορτίο q_0 (**αρχή της επαλληλίας ή υπέρθεσης, superposition**) $\vec{F}_0 = \vec{F}_{0/1} + \vec{F}_{0/2} + \dots + \vec{F}_{0/n}$



Έτσι η ηλεκτροστατική δύναμη μεταξύ δύο φορτίων q_1 και q_2 δίνεται από το Νόμο του Coulomb.

Νόμος Coulomb :
$$\vec{F}_{1/2} \equiv \vec{F}_E = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \hat{r} = -\vec{F}_{2/1} \tag{1}$$

όπου \hat{r} το μοναδιαίο διάνυσμα στην ευθεία που ενώνει τα δύο σωματίδια και με κατεύθυνση τέτοια ώστε τα ομόσημα φορτία να απωθούνται (αντίθετα από τη βαρύτητα) και τα ετερόσημα να έλκονται.

- \vec{F}_{12} η ηλεκτροστατική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο 1 από το σωματίδιο 2, θεωρώντας και τα δύο υλικά σημεία,
- $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = r\hat{r}$ η σχετική τους θέση, του 1 ως προς το 2,
- \hat{r} το μοναδιαίο διάνυσμα σε αυτή την κατεύθυνση(από το 2 προς το 1),
- r η απόσταση μεταξύ τους,
- q_1, q_2 , τα ηλεκτρικά τους φορτία και
- k σταθερά αναλογίας : $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,988 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2 \approx 9,0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$

άρα $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$. (2)

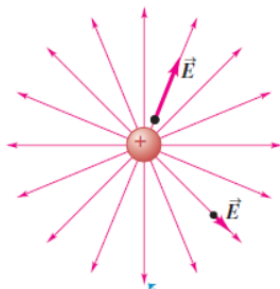
ενώ αξίζει να θυμόμαστε ότι $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{C}^2$ ακριβώς

ώστε $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = (299.792.458 \text{ m/s})^2 \approx (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2$ (2')

όπου c η ταχύτητα του φωτός είναι ίση με $c = 299.792.458 \text{ m/s}$ ακριβώς. Το ϵ_0 ονομάζεται ηλεκτρική σταθερά και οι μονάδες του δίνονται ισοδύναμα και ως $[\epsilon_0] = \text{F}/\text{m}$ όπου φαράντ F, η μονάδα της χωρητικότητας (capacitance) $\text{F} = \text{C}/\text{V} = \text{C}^2/\text{J} = \text{C}^2/\text{Nm}$

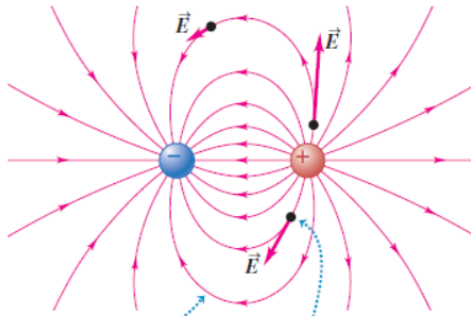
Ηλεκτρικό πεδίο

(a) A single positive charge



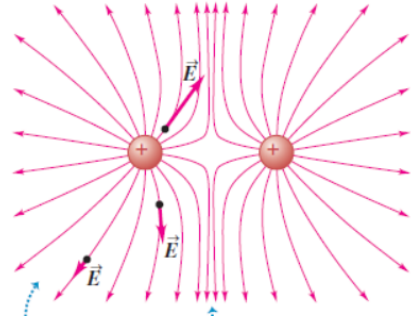
Field lines always point away from (+) charges and toward (-) charges.

(b) Two equal and opposite charges (a dipole)



At each point in space, the electric field vector is tangent to the field line passing through that point.

(c) Two equal positive charges



Field lines are close together where the field is strong, farther apart where it is weaker.

Η (1) γράφεται και

$$\vec{F}_E = q_1 \cdot \vec{E} \tag{3}$$

όπου

$$\vec{E} = k \frac{q_2}{r^2} \hat{r} \tag{4}$$

ή ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί το σωματίδιο 2 (\vec{r}_2) στη θέση \vec{r}_1 που βρίσκεται το σωματίδιο 1. Το $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ έχει κατεύθυνση από το 2 στο 1, δηλ. προς τα έξω από το φορτίο πηγή. Το φορτίο q_2 αποτελεί την πηγή του ηλεκτροστατικού πεδίου ενώ το φορτίο q_1 το δοκιμαστικό φορτίο που εισέρχεται στο πεδίο και δέχεται τη δύναμη.

Άρα το ηλεκτρικό πεδίο μετρείται σε $N/C = V/m = kg \cdot m/C \cdot s^2$. (Το V βολτ θα οριστεί παρακάτω)

Το ηλεκτρικό πεδίο οπτικοποιείται με τις δυναμικές γραμμές. Αυτές ορίζονται μέσω της δύναμης σε ένα δοκιμαστικό θετικό φορτίο (q_1). Εξ' ορισμού, (3) και (4), οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου ενός σημειακού φορτίου κατευθύνονται πάντα μακριά (προς τα έξω) από το θετικό φορτίο που το δημιουργεί ενώ κατευθύνονται προς το φορτίο (προς τα μέσα) αν το φορτίο που το δημιουργεί είναι αρνητικό. Η κατεύθυνσή του πεδίου είναι εφαπτόμενη στη δυναμικές γραμμές ενώ το μέτρο του είναι ανάλογο με την πυκνότητα των δυναμικών γραμμών στο συγκεκριμένο σημείο.

Η **επαλληλία** των ηλεκτροστατικών δυνάμεων οδηγεί στην επαλληλία και των ηλεκτρικών πεδίων. Το συνολικό πεδίο δύο σημειακών φορτίων σε ένα σημείο \vec{r}_0 είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων που δημιουργεί το καθένα από τα δύο φορτία στο συγκεκριμένο σημείο.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \tag{5}$$

Ανάλογα, για το πεδίο πολλών φορτίων ($i=1,2,3, \dots, n$) θα έχουμε :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i} \tag{5'}$$

Όπου $\vec{r}_{0i} = \vec{r}_0 - \vec{r}_i$ το διάνυσμα από τη θέση \vec{r}_i , που βρίσκεται το κάθε φορτίο πηγή (q_i), προς το σημείο \vec{r}_0 όπου θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο.

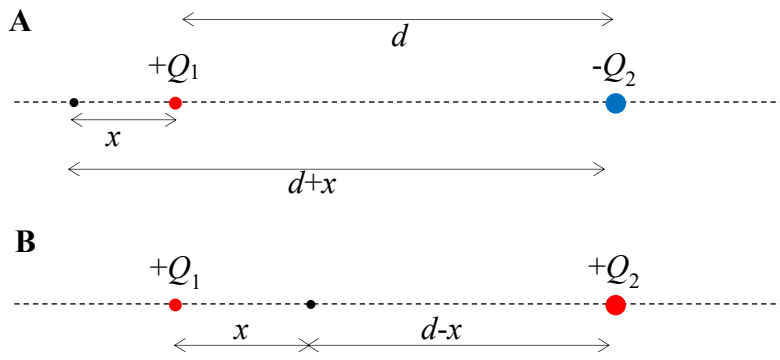
Αν το πεδίο δημιουργείται από μια συνεχή κατανομή φορτίου $\rho(\vec{r}')$ που βρίσκεται σε όγκο V' τότε το άθροισμα στα φορτία και τις αποστάσεις μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ($q_i \rightarrow dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}')dV'$) πάνω στον όγκο V' που περικλείει τα φορτία πηγές. Έτσι το πεδίο στη θέση \vec{r} υπολογίζεται με το ολοκλήρωμα

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{r}_q}{r_q^2} dq \quad \text{ή αναλυτικότερα} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \tag{5''}$$

Όπου $\vec{r}_q = \vec{r} - \vec{r}'$ και άρα $\hat{r}_q = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Παραδείγματα

1) Φορτία $Q_2 > Q_1$ σε απόσταση d μεταξύ τους
 Σε ποιο σημείο είναι το πεδίο (ή η δύναμη) μηδέν ?

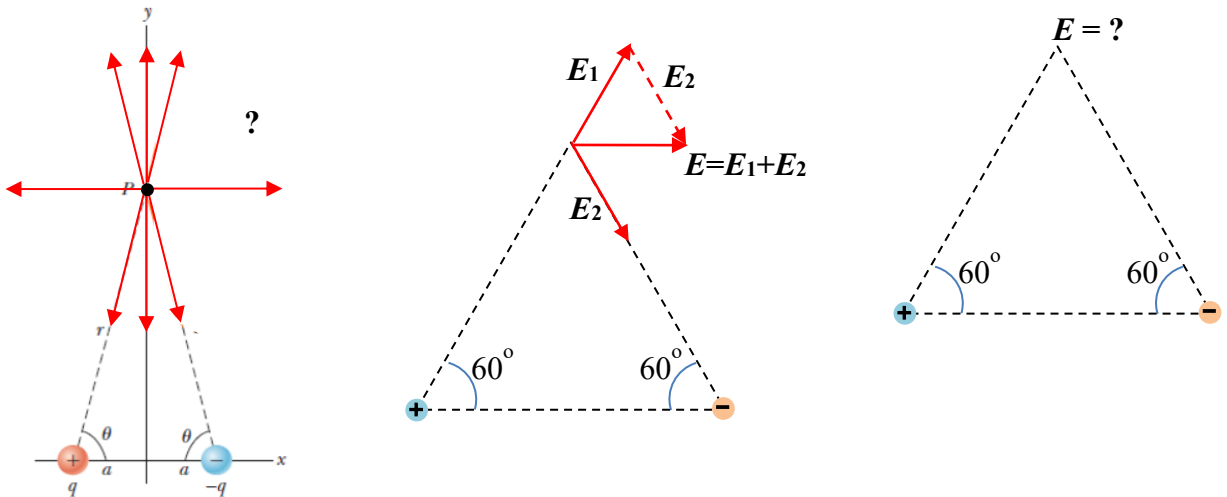


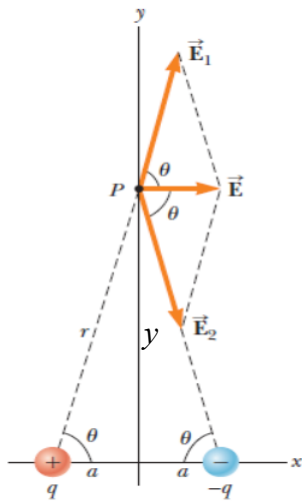
A) $\frac{Q_1}{x^2} = \frac{Q_2}{(d+x)^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{Q_1}}{x} = \frac{\sqrt{Q_2}}{d+x} \Rightarrow (d+x)\sqrt{Q_1} = x\sqrt{Q_2} \Rightarrow x = d \frac{\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_2} - \sqrt{Q_1}}$

B) $\frac{Q_1}{x^2} = \frac{Q_2}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{Q_1}}{x} = \frac{\sqrt{Q_2}}{d-x} \Rightarrow (d-x)\sqrt{Q_1} = x\sqrt{Q_2} \Rightarrow x = \frac{d\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_2} + \sqrt{Q_1}}$

2) Δυσδιάστατο

Στην κορυφή ισοσκελές τριγώνου ποια είναι η κατεύθυνση του ολικού ηλεκτρικού πεδίου από δύο αντίθετα φορτία στις βάσεις του τριγώνου?
 Πόσο είναι το μέτρο του ολικού πεδίου?





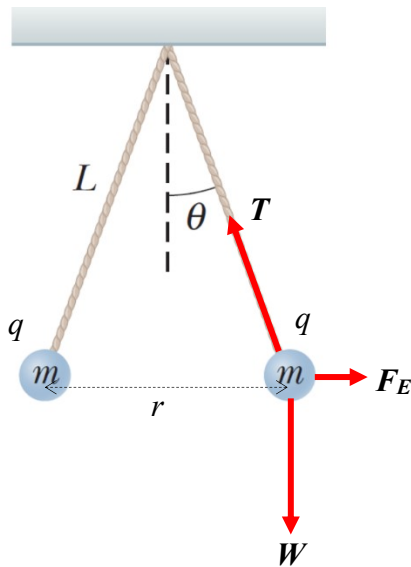
$$E_1 = E_2 = \frac{E/2}{\cos \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Αν ήταν ισόπλευρο και τα τρία πεδία θα ήταν ίσα, $\cos 60^\circ = 1/2$

$$r^2 = a^2 + y^2$$

$$\cos \theta = \frac{a}{r}$$

3) Ίσα φορτία που αιωρούνται από νήμα

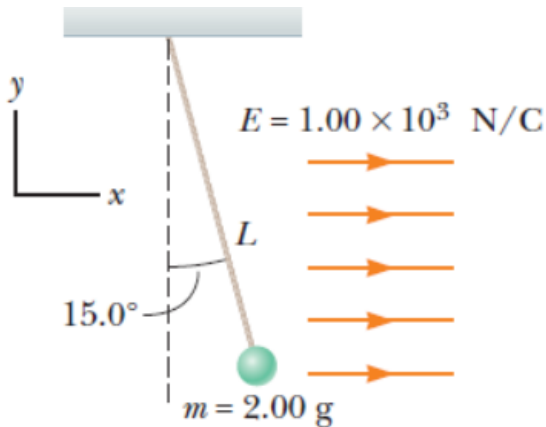


$$mg = T \cos \theta$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = T \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{r/2}{L}$$

4) Φορτίο που αιωρείται σε ομογενές πεδίο

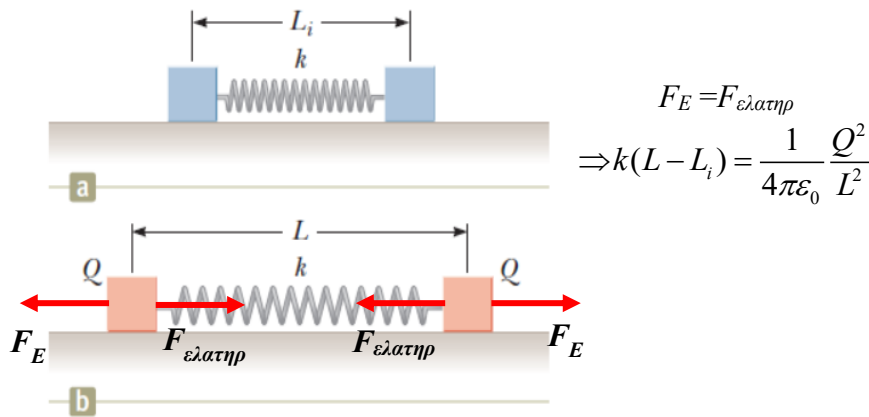


$$mg = T \cos \theta$$

$$qE = T \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{x}{L}$$

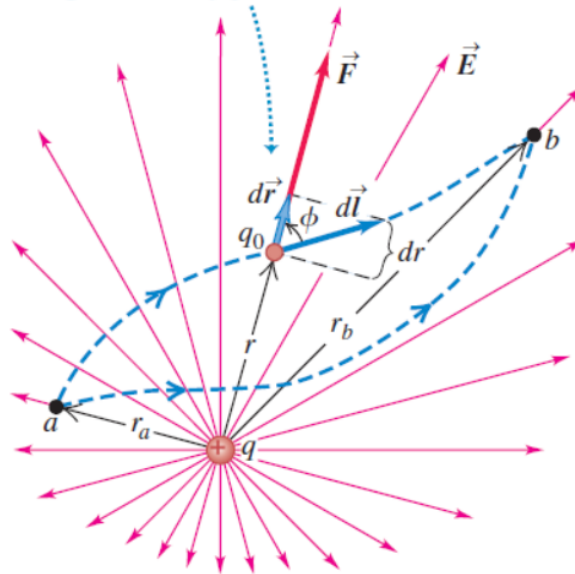
5) Ίσα φορτία σε ελατήριο



Ηλεκτροστατικό δυναμικό

Η ηλεκτροστατική δύναμη είναι κεντρική άρα θα είναι και διατηρητική. Δηλαδή το έργο της από ένα σημείο a σε ένα σημείο b θα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και άρα ίσο με τη διαφορά τιμών κάποιας συνάρτησης, που ονομάζουμε δυναμική ενέργεια, μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσης $U_a - U_b$.

Test charge q_0 moves from a to b along an arbitrary path.



Έτσι ορίζεται η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = U_a - U_b \tag{33}$$

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = U_a - U_b = -\int_a^b dU \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U \tag{34}$$

Η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου ονομάζεται δυναμικό

$$V = \frac{U}{q} \tag{35}$$

Άρα το δυναμικό μετριέται σε J/C που ονομάζεται βολτ: $V = J/C$.

$$\text{Έτσι } V_a - V_b = \frac{1}{q} (U_a - U_b) = \int_a^b \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (36)$$

Από την (36) φαίνεται ότι το ηλεκτρικό πεδίο μετριέται ισοδύναμα με το N/C και σε V/m.

$$\text{Επίσης από } V = \frac{U}{q} \Rightarrow \vec{\nabla} V = \frac{\vec{\nabla} U}{q} = -\frac{\vec{F}}{q} = -\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (37)$$

$$\text{Απ' όπου προκύπτει ότι } \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (38)$$

(από τη διανυσματική ταυτότητα $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$)

Η παραπάνω εξίσωση ισχύει σε ηλεκτροστατικές καταστάσεις όπου το ηλεκτρικό πεδίο δεν μεταβάλλεται με το χρόνο και τροποποιείται όπως θα δούμε παρακάτω σύμφωνα με τον νόμο του Faraday ο οποίος ισοδυναμεί με την 2^η εξίσωση Maxwell.

Ηλεκτροστατικό πεδίο :	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$
-------------------------------	-----------------------------------

Ηλεκτροστατικό δυναμικό σημειακού φορτίου

Για να βρούμε τη δυναμική ενέργεια υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα από το σημείο *a* στο σημείο *b* του έργου πάνω στο δοκιμαστικό φορτίο *q* από το πεδίο που δημιουργεί το φορτίο *Q*. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται σε τυχαία καμπύλη αλλά ανεξάρτητα της καμπύλης μόνο το ακτινικό κομμάτι της διαδρομής θα συνεισφέρει στο εσωτερικό γινόμενο $\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ και άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα θα γίνει μονοδιάστατο :

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{\hat{r} \cdot d\vec{\ell}}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r^{-2+1}}{-2+1} \right)_a^b \Rightarrow \quad (39)$$

$$W_{a \rightarrow b} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

Οπότε η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια δύο σημειακών φορτίων (το έργο για να τα φέρουμε από το άπειρο σε απόσταση *r*) είναι :

$$U(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{και είναι } U(r = \infty) = 0 \quad (40)$$

$$\text{[Για πολλά σωματίδια (σημειακά φορτία): } U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (41)]$$

Αντίστοιχα το δυναμικό του πεδίου που δημιουργεί το σημειακό φορτίο *Q* είναι

$$V(r) = \frac{1}{q} (U(r) - U(\infty)) = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (42)$$

Το δυναμικό και η δυναμική ενέργεια λαμβάνονται μηδέν στο άπειρο $r \rightarrow \infty$ μόνο αν δεν υπάρχουν φορτία στο άπειρο (π.χ. άπειρο φορτισμένο φύλλο ή γραμμή)

Δυναμικό ενός αριθμού φορτίων (επαλληλία)

Για **επαλληλία** σημειακών φορτίων ή συνεχή κατανομή φορτίων έχουμε αντίστοιχα

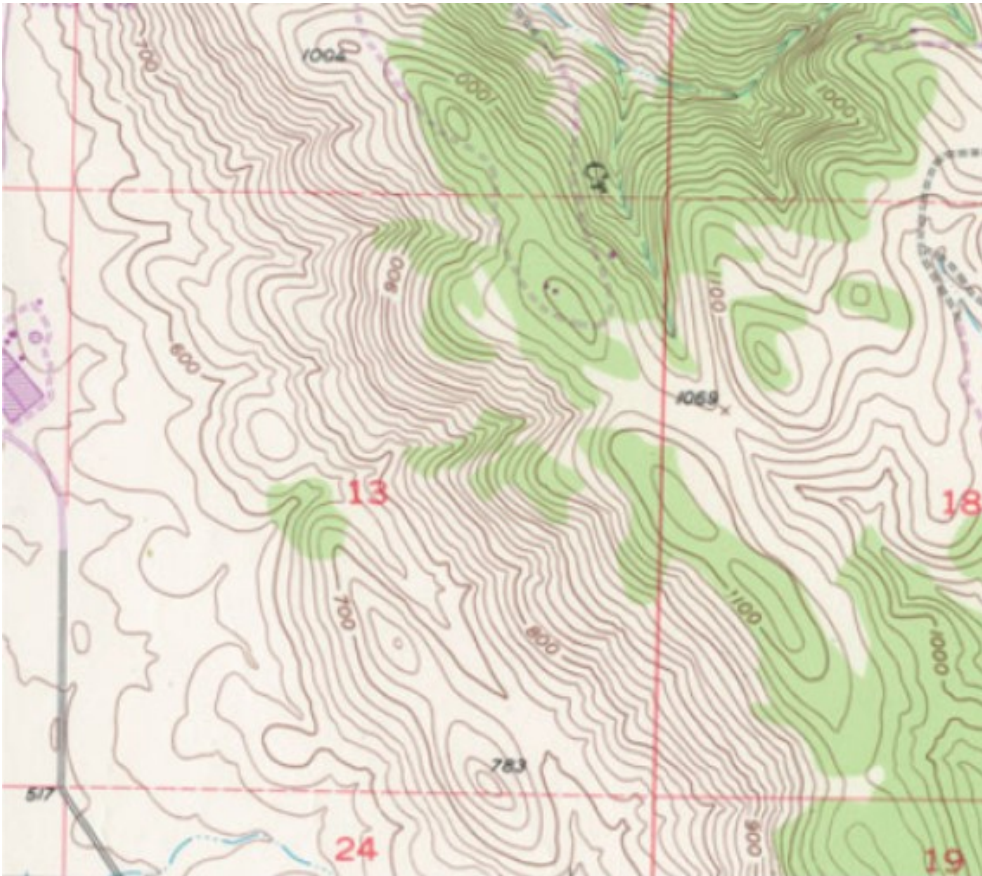
$$V = \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_{0i}} \quad \text{και} \quad (43)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r_q} \quad \text{ή αναλυτικότερα} \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (44)$$

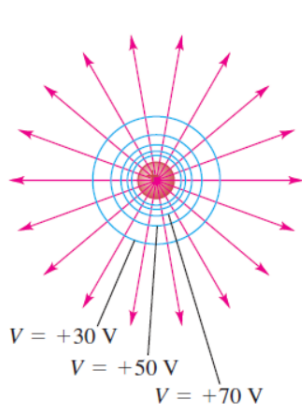
όπου $\vec{r}_q = \vec{r} - \vec{r}'$ και άρα $|\vec{r}_q| \equiv r_q = |\vec{r} - \vec{r}'|$ αντίστοιχα με τις (5') και (5'').

Το δυναμικό θα υπολογίζεται : είτε από τον ορισμό του τύπου (36) [ή ισοδύναμα τον 37] είτε ως επαλληλία στοιχειωδών δυναμικών από τους (43) και (44)

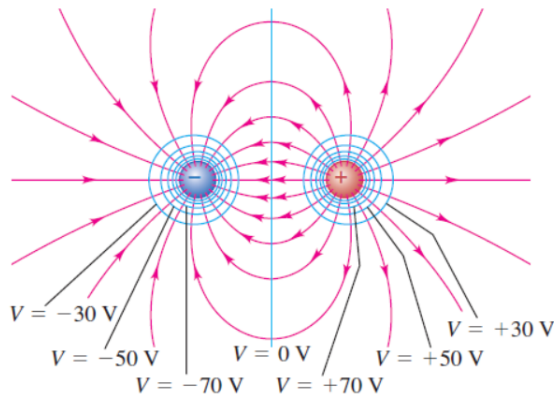
Ισοδυναμικές επιφάνειες (αντίστοιχο ισοϋψών καμπυλών σε χάρτη)



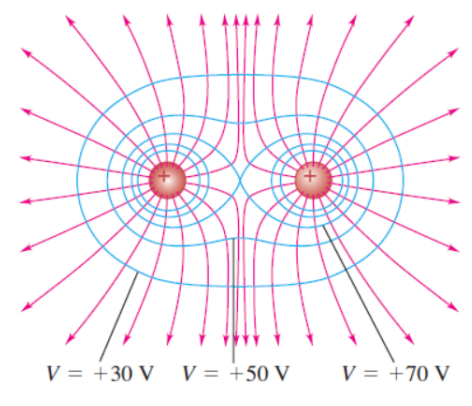
(a) A single positive charge



(b) An electric dipole



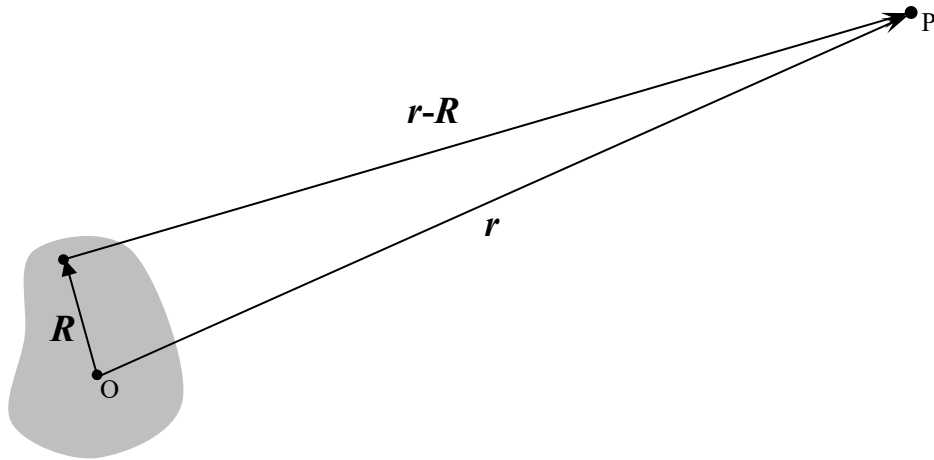
(c) Two equal positive charges



→ Electric field lines — Cross sections of equipotential surfaces

Γενική μορφή ηλεκτροστατικού δυναμικού συνεχούς κατανομής φορτίου

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{R})dV}{|\vec{r} - \vec{R}|}$$



$$|\vec{r} - \vec{R}| = (r^2 + R^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R})^{1/2} = r \left(1 + \frac{R^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R}}{r^2} \right)^{1/2}, \quad \alpha = \frac{R}{r} \ll 1$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} = (r^2 + R^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R})^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R}}{r^2} \right)^{-1/2}$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} &= (r^2 + R^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R})^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R}}{r^2} \right)^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{R^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R}}{2r^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{R^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R}}{r^2} \right)^2 - \dots \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{R^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R}}{2r^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{R^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R}}{r^2} \right)^2 - \dots \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{r^2} - \frac{R^2}{2r^2} + \frac{3}{8r^4} (R^4 - 4R^2\vec{r} \cdot \vec{R} + 4(\vec{r} \cdot \vec{R})^2) - \dots \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{r^2} + \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{R})^2 - r^2R^2}{2r^4} + O(\alpha^3) \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{r^2} + \frac{1}{2r^4} r_i (3R_i R_j - R^2 \delta_{ij}) r_j + O(\alpha^3) \right] \end{aligned}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{R})dV}{|\vec{r} - \vec{R}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left[\int_V \rho dV + \frac{1}{r^2} \vec{r} \cdot \int_V \vec{R} \rho dV + \frac{1}{2r^4} r_i \left[\int_V (3R_i R_j - R^2 \delta_{ij}) \rho dV \right] r_j + O(\alpha^3) \right] =$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_i Q_{ij} r_j}{2r^5} + \dots$$

Ολικό φορτίο κατανομής: $Q = \sum_{n=1}^N q_n = \int_V \rho dV$

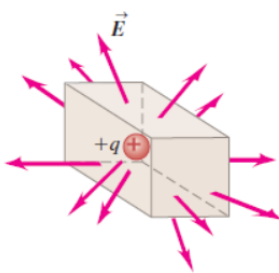
Διάνυσμα Διπολικής ροπής κατανομής: $\vec{p} = \sum_{n=1}^N q_n \vec{R}_n = \int_V \vec{R} \rho dV$

Τανυστής (πίνακας) Τετραπολικής ροπής κατανομής:

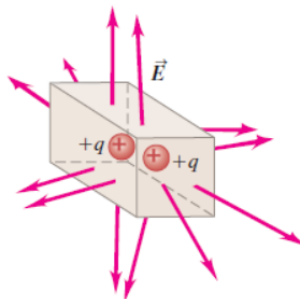
$$Q_{ij} = \sum_{n=1}^N (3R_{ni} R_{nj} - R_n^2 \delta_{ij}) = \int_V (3R_i R_j - R^2 \delta_{ij}) \rho dV$$

Ηλεκτρική ροή και Νόμος του Gauss

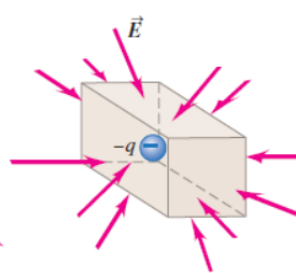
(a) Positive charge inside box, outward flux



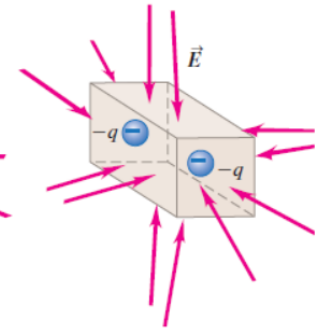
(b) Positive charges inside box, outward flux



(c) Negative charge inside box, inward flux

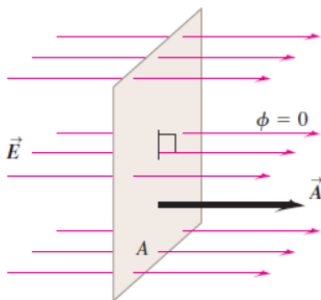


(d) Negative charges inside box, inward flux



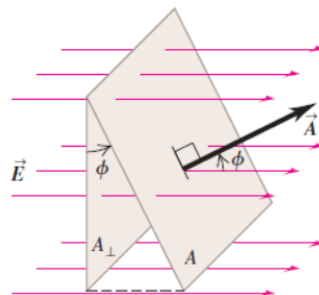
(a) Surface is face-on to electric field:

- \vec{E} and \vec{A} are parallel (the angle between \vec{E} and \vec{A} is $\phi = 0$).
- The flux $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$.



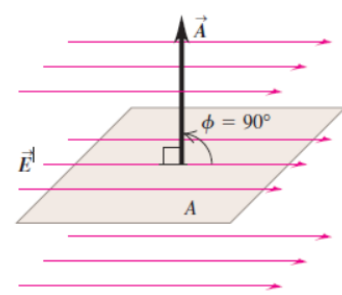
(b) Surface is tilted from a face-on orientation by an angle ϕ :

- The angle between \vec{E} and \vec{A} is ϕ .
- The flux $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi$.



(c) Surface is edge-on to electric field:

- \vec{E} and \vec{A} are perpendicular (the angle between \vec{E} and \vec{A} is $\phi = 90^\circ$).
- The flux $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 90^\circ = 0$.



Όπως είπαμε το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να θεωρηθεί και ως η επιφανειακή πυκνότητα των δυναμικών γραμμών. Δηλαδή ως ο αριθμός των δυναμικών γραμμών ανά μονάδα επιφάνειας την οποία διαπερνούν. Από την άλλη οι δυναμικές γραμμές πηγάζουν από τα ηλεκτρικά φορτία. Όσο περισσότερο φορτίο τόσο πιο ισχυρό είναι το ηλεκτρικό πεδίο και άρα τόσο περισσότερες οι δυναμικές γραμμές. Έτσι άμα ολοκληρώσουμε το ηλεκτρικό πεδίο πάνω σε μια κλειστή επιφάνεια θα πάρουμε τον αριθμό των δυναμικών γραμμών που τη διαπερνούν. Αυτό το μέγεθος λέγεται και ηλεκτρική ροή. Αν μέσα στην επιφάνεια δεν υπάρχουν φορτία τότε κάθε γραμμή που θα μπαίνει στην επιφάνεια θα βγαίνει κιόλας, γιατί οι δυναμικές γραμμές αρχίζουν και τελειώνουν μόνο σε φορτία. Έτσι δεν θα συνεισφέρει στο άθροισμα. Από την άλλη, αν υπάρχουν φορτία μέσα στην επιφάνεια τότε ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που διαπερνούν την επιφάνεια θα είναι ανάλογος των φορτίων που περικλείονται.

Αυτός είναι ο Νόμος του Gauss και η διαφορική του μορφή αποτελεί την 1^η εξίσωση Maxwell.

Ηλεκτρική ροή : $\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_A E \cos\phi dA$ (51)

Το στοιχειώδες διάνυσμα επιφάνειας είναι κάθετο στην στοιχειώδη επιφάνεια και έχει μέτρο όσο το εμβαδόν αυτής.

Νόμος Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο : $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{περικλ.}}}{\epsilon_0}$ (52)

1^η Εξίσωση Maxwell : $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (53)

Ο νόμος του Gauss αποδεικνύεται ξεκινώντας από τον τύπο του ηλεκτρικού πεδίου για σημειακό φορτίο και άρα αποτελεί άμεση συνέπεια του Νόμου του Coulomb. Ουσιαστικά αποτελεί ισοδύναμη διατύπωση του Νόμου του Coulomb καθώς για να αποδειχθεί πρέπει να ισχύουν και τα τρία : 1) κεντρική δύναμη, 2) μέτρο πεδίου αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης, 3) αρχή επαλληλίας. Μάλιστα ο νόμος του αντιστρόφου τετραγώνου αποδεικνύεται πειραματικά πιο εύκολα μέσω του Νόμου του Gauss παρά με απευθείας μέτρηση δυνάμεων χρησιμοποιώντας το νόμο του Coulomb. Για να ισχύει ο νόμος του αντιστρόφου τετραγώνου απλά επιβεβαιώνουμε ότι στην εσωτερική επιφάνεια κοιλότητας αγωγού δεν υπάρχουν φορτία.

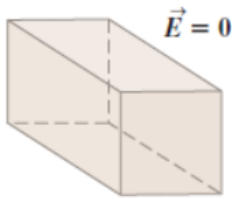
Αφού $\vec{E} = -\nabla V$, όπου V το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου ο νόμος γράφεται και ως

Εξίσωση Poisson : $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

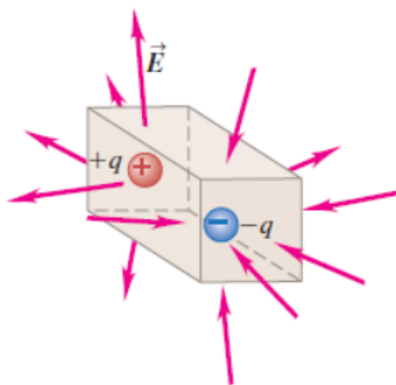
ή σε χώρο ελεύθερο ηλεκτρικών φορτίων ως

Εξίσωση Laplace : $\nabla^2 V = 0$

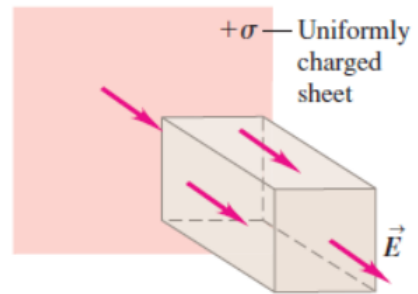
(a) No charge inside box, zero flux



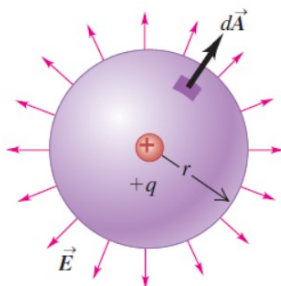
(b) Zero net charge inside box, inward flux cancels outward flux.



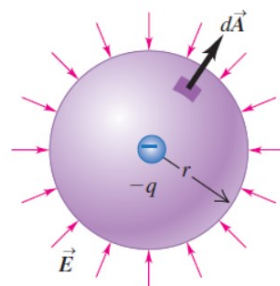
(c) No charge inside box, inward flux cancels outward flux.



(a) Gaussian surface around positive charge: positive (outward) flux

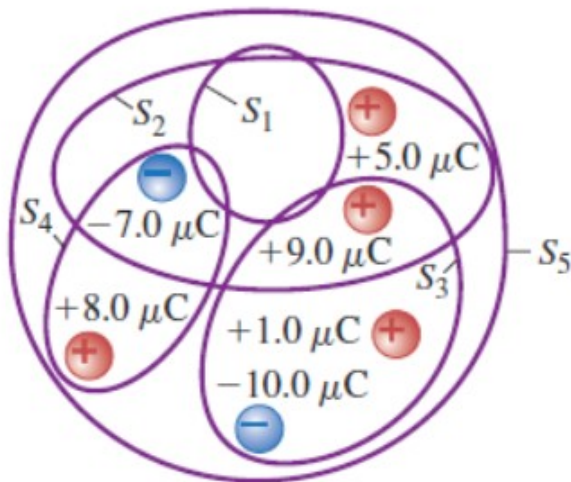
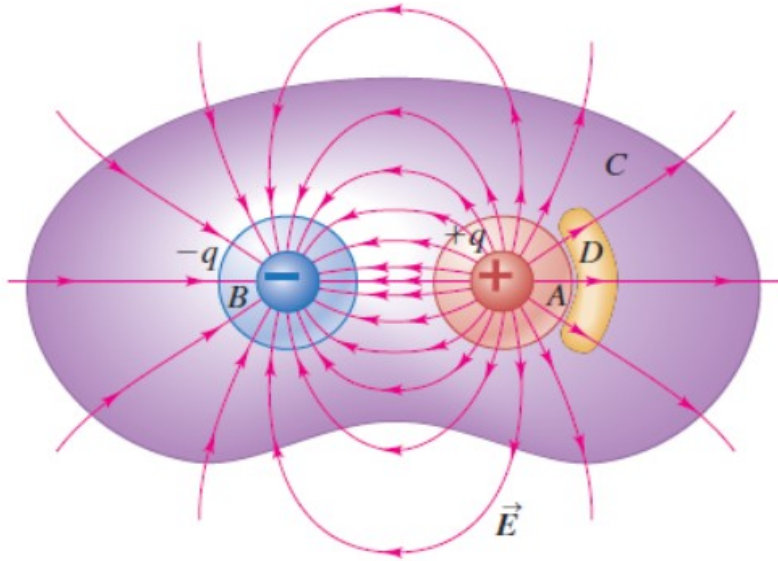


(b) Gaussian surface around negative charge: negative (inward) flux



Παραδείγματα

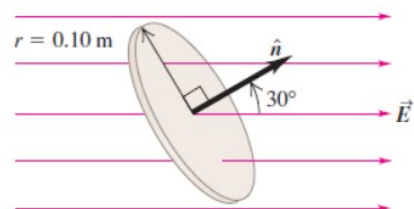
Πόση είναι η ηλεκτρική ροή μέσα από τις κλειστές επιφάνειες των παρακάτω σχημάτων?



Example 22.1 Electric flux through a disk

A disk of radius 0.10 m is oriented with its normal unit vector \hat{n} at 30° to a uniform electric field \vec{E} of magnitude $2.0 \times 10^3 \text{ N/C}$ (Fig. 22.7). (Since this isn't a closed surface, it has no "inside" or "outside." That's why we have to specify the direction of \hat{n} in the figure.) (a) What is the electric flux through the disk? (b) What is the flux through the disk if it is turned so that \hat{n} is perpendicular to \vec{E} ? (c) What is the flux through the disk if \hat{n} is parallel to \vec{E} ?

22.7 The electric flux Φ_E through a disk depends on the angle between its normal \hat{n} and the electric field \vec{E} .



SOLUTION

IDENTIFY and SET UP: This problem is about a flat surface in a uniform electric field, so we can apply the ideas of this section. We calculate the electric flux using Eq. (22.1).

EXECUTE: (a) The area is $A = \pi(0.10 \text{ m})^2 = 0.0314 \text{ m}^2$ and the angle between \vec{E} and $\vec{A} = A\hat{n}$ is $\phi = 30^\circ$, so from Eq. (22.1),

$$\begin{aligned} \Phi_E &= EA \cos \phi = (2.0 \times 10^3 \text{ N/C})(0.0314 \text{ m}^2)(\cos 30^\circ) \\ &= 54 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C} \end{aligned}$$

(b) The normal to the disk is now perpendicular to \vec{E} , so $\phi = 90^\circ$, $\cos \phi = 0$, and $\Phi_E = 0$.

(c) The normal to the disk is parallel to \vec{E} , so $\phi = 0$ and $\cos \phi = 1$:

$$\begin{aligned} \Phi_E &= EA \cos \phi = (2.0 \times 10^3 \text{ N/C})(0.0314 \text{ m}^2)(1) \\ &= 63 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C} \end{aligned}$$

EVALUATE: As a check on our results, note that our answer to part (b) is smaller than that to part (a), which is in turn smaller than that to part (c). Is all this as it should be?

Example 22.2 Electric flux through a cube

An imaginary cubical surface of side L is in a region of uniform electric field \vec{E} . Find the electric flux through each face of the cube and the total flux through the cube when (a) it is oriented with two of its faces perpendicular to \vec{E} (Fig. 22.8a) and (b) the cube is turned by an angle θ about a vertical axis (Fig. 22.8b).

SOLUTION

IDENTIFY and SET UP: Since \vec{E} is uniform and each of the six faces of the cube is flat, we find the flux Φ_{Ei} through each face using Eqs. (22.3) and (22.4). The total flux through the cube is the sum of the six individual fluxes.

EXECUTE: (a) Figure 22.8a shows the unit vectors \hat{n}_1 through \hat{n}_6 for each face; each unit vector points *outward* from the cube's closed surface. The angle between \vec{E} and \hat{n}_1 is 180° , the angle between \vec{E}

and \hat{n}_2 is 0° , and the angle between \vec{E} and each of the other four unit vectors is 90° . Each face of the cube has area L^2 , so the fluxes through the faces are

$$\begin{aligned} \Phi_{E1} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_1 A = EL^2 \cos 180^\circ = -EL^2 \\ \Phi_{E2} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_2 A = EL^2 \cos 0^\circ = +EL^2 \\ \Phi_{E3} &= \Phi_{E4} = \Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2 \cos 90^\circ = 0 \end{aligned}$$

The flux is negative on face 1, where \vec{E} is directed into the cube, and positive on face 2, where \vec{E} is directed out of the cube. The total flux through the cube is

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6} \\ &= -EL^2 + EL^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

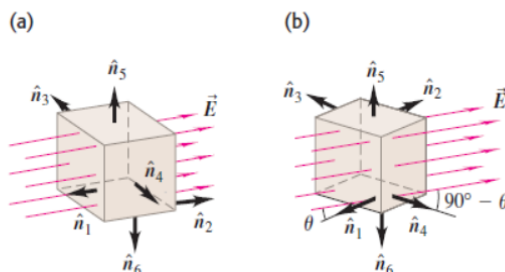
(b) The field \vec{E} is directed into faces 1 and 3, so the fluxes through them are negative; \vec{E} is directed out of faces 2 and 4, so the fluxes through them are positive. We find

$$\begin{aligned} \Phi_{E1} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_1 A = EL^2 \cos(180^\circ - \theta) = -EL^2 \cos \theta \\ \Phi_{E2} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_2 A = +EL^2 \cos \theta \\ \Phi_{E3} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_3 A = EL^2 \cos(90^\circ + \theta) = -EL^2 \sin \theta \\ \Phi_{E4} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_4 A = EL^2 \cos(90^\circ - \theta) = +EL^2 \sin \theta \\ \Phi_{E5} &= \Phi_{E6} = EL^2 \cos 90^\circ = 0 \end{aligned}$$

The total flux $\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$ through the surface of the cube is again zero.

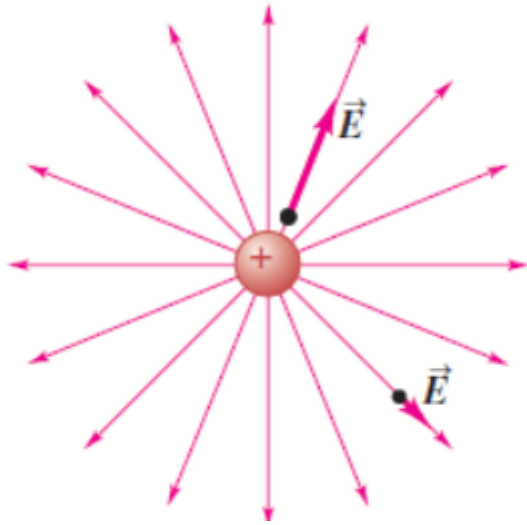
EVALUATE: We came to the same conclusion in our discussion of Fig. 22.3c: There is zero net flux of a uniform electric field through a closed surface that contains no electric charge.

22.8 Electric flux of a uniform field \vec{E} through a cubical box of side L in two orientations.



Υπολογισμοί ηλεκτροστατικών πεδίων / ηλεκτροστατικών δυναμικών

Σημειακό φορτίο



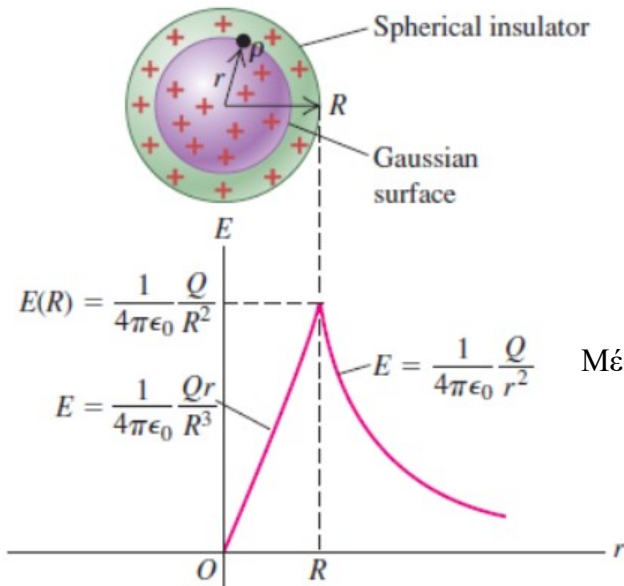
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Ξεκινάμε αναφέροντας τα ήδη γνωστά αποτελέσματα

Σφαιρικές κατανομές φορτίου

Συμπαγής μονωτική σφαίρα ομοιόμορφα φορτισμένη



$$\text{Εξω } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad r \geq R$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad r \geq R$$

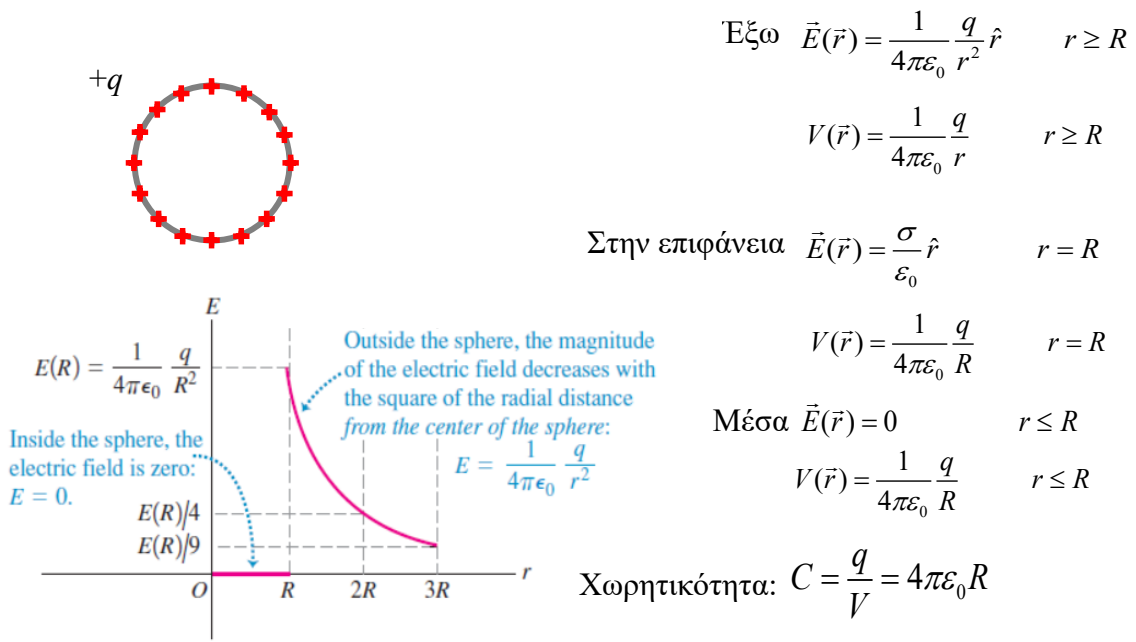
$$\text{Μέσα } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{περικλ}}}{r^2} \hat{r} \quad r \leq R$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r^2 \quad r \leq R$$

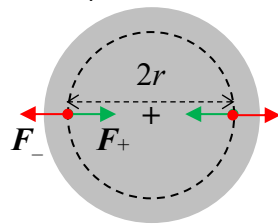
$$\omega = \sqrt{\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}}$$

Λεπτός σφαιρικός φλοιός ομοιόμορφα φορτισμένος (μονωτικός ή αγώγιμος)

Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = \frac{q}{A} = \frac{q}{4\pi R^2}$



Παράδειγμα. Μοντέλο του J.J. Thompson για το άτομο του He. Πόσο απέχουν τα ηλεκτρόνια από το κέντρο του ατόμου αν η ακτίνα του ατόμου είναι R

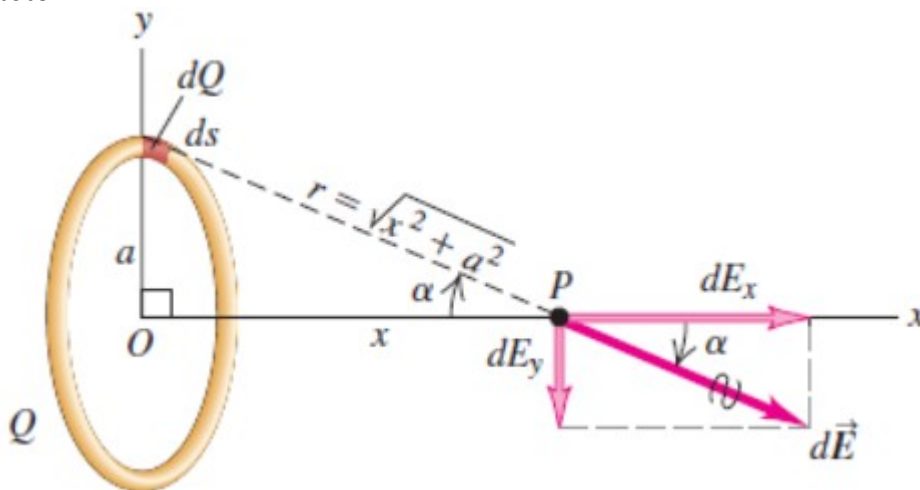


$$F_{ολ} = 0 \Rightarrow F_- = F_+ \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(2r)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{eQ_{περικλ}}{r^2} \Rightarrow Q_{περικλ} = \frac{e}{4}$$

$$\frac{e}{4} = \rho V(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2e}{\frac{4}{3} \pi R^3} \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} R^3 \Rightarrow r = \frac{R}{2}$$

Κατά σειρά ευκολίας ξεκινάμε τους υπολογισμούς από ένα λεπτό δακτυλίδιο ομοιόμορφα φορτισμένο.

Δακτυλίδιο



Θεωρούμε κυκλικό λεπτό δακτυλίδι ακτίνας a ομοιόμορφα φορτισμένο με συνολικό φορτίο Q . Θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο που απέχει απόσταση x από το κέντρο του δακτυλιδιού και βρίσκεται πάνω στον άξονά του.

$$\text{Γραμμική πυκνότητα φορτίου: } \lambda = \frac{Q}{2\pi a}$$

Η κάθετη συνιστώσα του πεδίου είναι μηδέν πάνω στον άξονα, $E_y = 0$, καθώς το πεδίο από κάθε στοιχείο του δακτυλίου εξουδετερώνεται από το αντίθετο πεδίο που δημιουργεί το διαμετρικά απέναντι στοιχείο του δακτυλίου.

Κάθε στοιχείο dq της κυκλικής κατανομής απέχει την ίδια απόσταση $\sqrt{x^2 + a^2}$ από το σημείο x

$$E_x = \int dE_x = \int dE \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{x^2 + a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \int dq \quad (6)$$

$$\text{Άρα: } E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (7)$$

Στο κέντρο του δακτυλίου ($x=0$) το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν

$$E_0 = 0 \quad (8)$$

Για μικρές αποστάσεις $x \ll a$ το πεδίο είναι ανάλογο του x άρα η δύναμη που θα ασκήσει ο δακτύλιος σε ένα αντίθετο φορτίο $-q$ μάζας m θα είναι δύναμη επαναφοράς και το φορτίο θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} x, \quad F_x = -qE_x = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^3} x = -Dx, \quad \omega = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^3 m}} = \sqrt{\frac{\lambda q}{2\epsilon_0 a^2 m}}$$

Σε μεγάλες αποστάσεις $x \gg a$ το ηλεκτρικό πεδίο γίνεται ίσο με το πεδίο σημειακού φορτίου Q

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \quad (9)$$

Για να βρούμε το δυναμικό στον άξονα του δακτυλιδιού χρησιμοποιούμε πάλι την αρχή της επαλληλίας. Κάθε στοιχείο dq της κυκλικής κατανομής απέχει την ίδια απόσταση $\sqrt{x^2 + a^2}$ από το σημείο x όμως τώρα δεν έχουμε να προσθέσουμε διανύσματα και τα πράγματα είναι ακόμα πιο απλά.

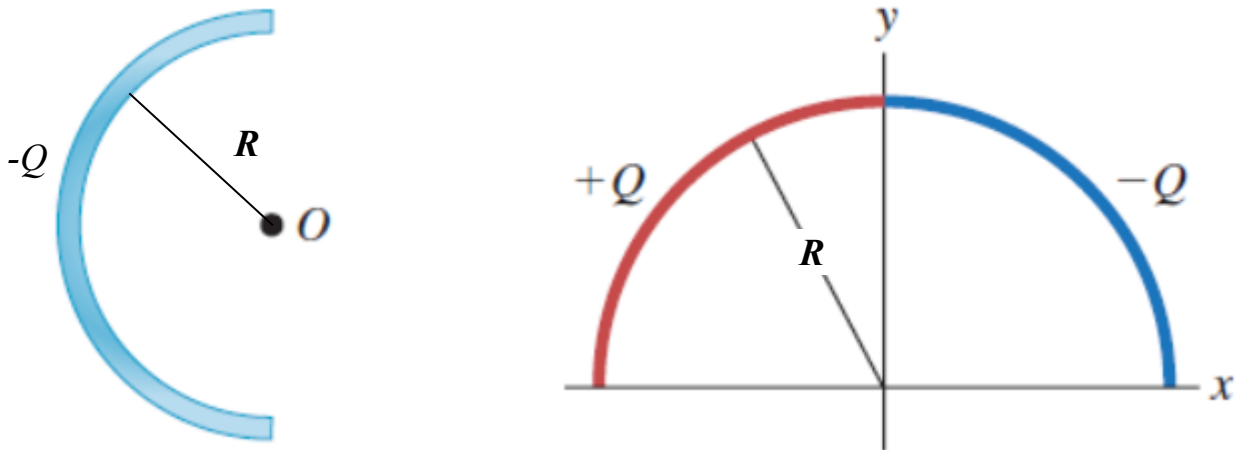
$$V(x) = \int_0^Q dV_q = \int_0^Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int_0^Q dq \Rightarrow V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (50)$$

$$\text{Επιβεβαιώστε ότι } E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

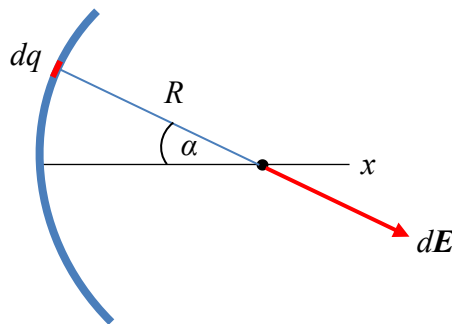
Παραδείγματα

A. Ποιο είναι το πεδίο στο κέντρο ημικυκλίου φορτισμένου ομοιόμορφα με $-Q$? (τόρα δεν θα είναι μηδέν επειδή λείπει ο υπόλοιπος μισός κύκλος)

B. Ποιο είναι το πεδίο στο κέντρο ημικυκλίου, το οποίο το μισό είναι φορτισμένο θετικά με $+Q$ και το άλλο μισό αρνητικά με $-Q$?



Βρίσκουμε το A) για τυχαίο τόξο. Κάθε τόξο κύκλου ακτίνας R που εκτείνεται γωνία θ έχει μήκος $s=\theta R$ και άρα γραμμική πυκνότητα $\lambda = \frac{Q}{s} = \frac{Q}{\theta R}$. Το πεδίο που δημιουργεί στο κέντρο του κύκλου θα είναι κάθετο στη χορδή του, δηλαδή στη διεύθυνση x του σχήματος, όπως είδαμε και πριν. Το κάθε στοιχειώδες τμήμα του τόξου που εκτείνεται σε γωνία $d\alpha$ έχει φορτίο $dq = \lambda ds = \lambda R d\alpha$ και απέχει απόσταση R από το κέντρο. Έτσι δημιουργεί στο κέντρο πεδίο έντασης $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2}$.



Αθροίζουμε τις x συνιστώσες για να πάρουμε το συνολικό πεδίο

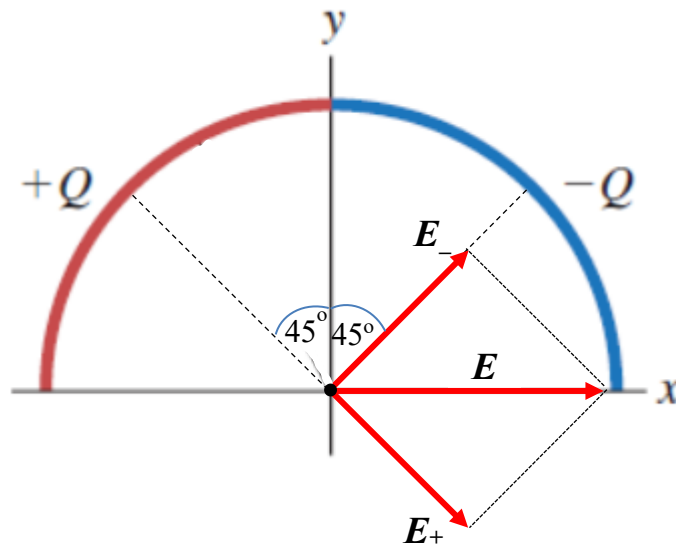
$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{R^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda R d\alpha}{R^2} \cos \alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\sin(\theta/2) - \sin(-\theta/2)) \Rightarrow$$

$$E_x = \frac{\lambda \sin(\theta/2)}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \frac{\sin(\theta/2)}{\theta}$$

Για ημικόκλιο $-Q$, $\theta=\pi$: $E_x = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2\pi^2 \epsilon_0} \frac{-Q}{R^2}$ κάθετα στη διάμετρό του

Για τεταρτοκύκλιο Q , $\theta=\pi/2$: $E_x = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \frac{\sqrt{2}/2}{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$ κάθετα στη χορδή του

Τα πεδία των δύο αντίθετα φορτισμένων τεταρτοκυκλίων θα αθροιστούν διανυσματικά και το πεδίο θα είναι στη διεύθυνση παράλληλα με τη διάμετρο

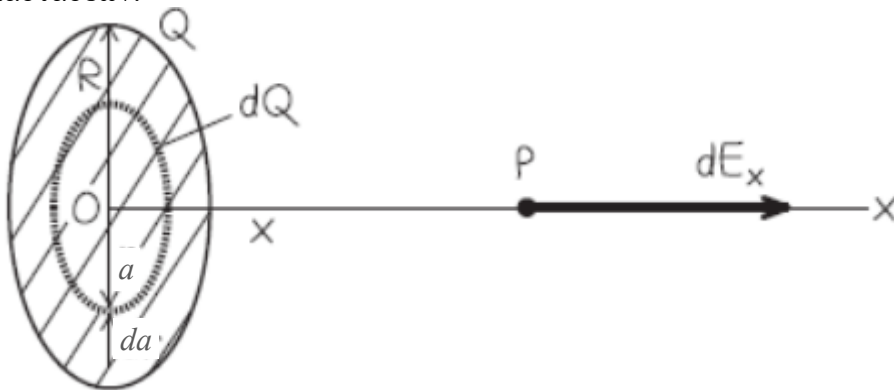


Δύο αντίθετα τεταρτοκύκλια το καθένα με φορτίο Q :

$$E = \sqrt{E_+^2 + E_-^2} = \sqrt{2}E_+ = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = \frac{1}{\pi^2\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

Δίσκος

Αφού βρήκαμε το πεδίο ενός δακτυλίου μπορούμε στη συνέχεια να βρούμε το πεδίο ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R , προσθέτοντας τις συνεισφορές των κυκλικών δακτυλίων που φτιάχνουν το δίσκο και στη συνέχεια να πάρουμε το όριο $R \rightarrow \infty$ και να βρούμε το πεδίο ενός επίπεδου λεπτού φύλλου απείρων διαστάσεων.



Επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου δίσκου : $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2}$ (17)

Φορτίο στοιχειώδους δακτυλίου : $dq = \sigma dA = \sigma \cdot 2\pi a da$ (18)

$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\sigma a da}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \cdot \frac{ada}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$
 (19)

$u = x^2 + a^2, \quad du = 2ada$

$$E_x = \int_0^R dE_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{ada}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_{x^2}^{x^2+R^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \left[\frac{u^{-1/2}}{-1/2} \right]_{x^2}^{x^2+R^2} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right] \quad (20)$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right] \quad (21)$$

Σε μεγάλες αποστάσεις $x \gg R$ αυτό γίνεται ίσο με το πεδίο σημειακού φορτίου Q

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \quad (22)$$

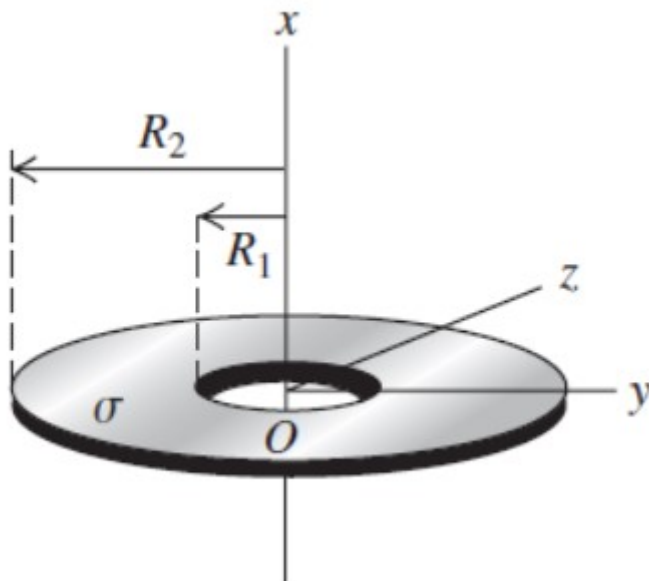
Καθώς $\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \left(1 + \frac{R^2}{x^2} \right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} + \dots$ και $Q = \sigma \cdot 4\pi R^2$ (23)

Αν η επιφανειακή κατανομή φορτίου εκτείνεται στο άπειρο $R \rightarrow \infty$ με $\sigma = \text{σταθ.}$ ή ισοδύναμα $x \rightarrow 0$ είμαστε πολύ κοντά στο κέντρο του δίσκου τότε $x=r$ από συμμετρία, όπου r η κάθετη απόσταση από το φύλλο (δίσκο), και από την (21) έχουμε

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (24)$$

Το πεδίο είναι σταθερό σε όλο το χώρο ανεξάρτητα από την απόστασή του r , από το επιφανειακά φορτισμένο φύλλο και με αντίθετες κατευθύνσεις στις δύο πλευρές του φύλλου.

Δακτύλιος



Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$

Το μόνο που αλλάζει είναι τα όρια της ολοκλήρωσης

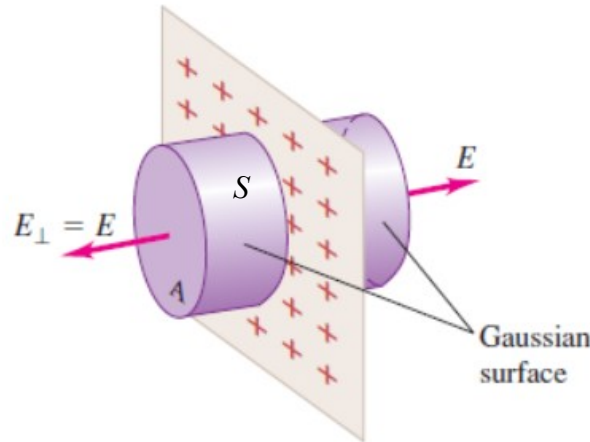
$$E_x = \int_{R_1}^{R_2} dE_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{ada}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_{x^2+R_1^2}^{x^2+R_2^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \left[\frac{u^{-1/2}}{-1/2} \right]_{x^2+R_1^2}^{x^2+R_2^2} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_2^2}} \right]$$

Για μικρά $x \ll R_1, R_2$ θα έχουμε πάλι ταλάντωση

$$E_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] = \frac{\sigma(R_2 - R_1)}{2\epsilon_0 R_1 R_2} x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(R_2 + R_1)R_1 R_2} x$$

Απείρου μεγέθους λεπτό επίπεδο φύλλο

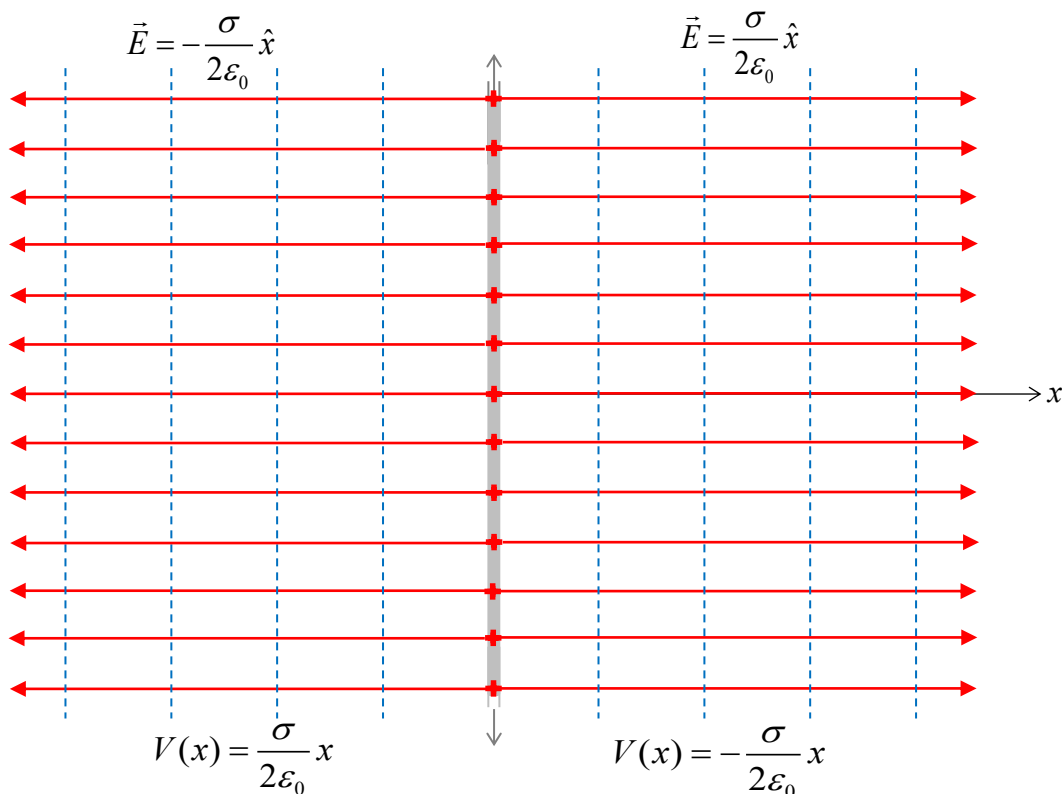
Έχουμε ήδη τον τύπο από το όριο του δίσκου για $R \rightarrow \infty$. Πιο εύκολα όμως υπολογίζεται με Gauss



Από συμμετρία το πεδίο θα είναι κάθετο στο επίπεδο της κατανομής φορτίου και σταθερό σε ίσες αποστάσεις από αυτό. Γκαουσιανή επιφάνεια = ορθός κύλινδρος με πλευρικό εμβαδόν S και εμβαδόν βάσεων A . Μόνο οι βάσεις του κυλίνδρου συνεισφέρουν στη ροή.

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \int_{\text{Gauss surfac}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2 \int_A E dA = 2E \int_A dA = 2EA \\ \frac{Q_{\text{περικλ}}}{\epsilon_0} &= \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

Όμως $E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow V(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} x$



Για την ακρίβεια και διανυσματικά : $\vec{E} = \text{sgn}(x) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x}$, $V(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |x|$

όπου $\text{sgn}(x)$ η συνάρτηση προσήμου (sign) με τιμές +1 και -1, για θετικούς και αρνητικούς αριθμούς αντίστοιχα, για την οποία ισχύει $\frac{d|x|}{dx} = \text{sgn}(x)$ αφού $|x| = \begin{cases} x & \text{για } x > 0 \\ -x & \text{για } x < 0 \end{cases}$.

Το δυναμικό πάνω στην πλάκα είναι μηδέν και παντού αλλού αρνητικό. Επειδή υπάρχει φορτίο στο άπειρο δεν μπορεί να είναι $V(r \rightarrow \infty) = 0$. Θα πρέπει αυθαίρετα να ορίσουμε το δυναμικό ίσο με το μηδέν σε κάποιο σημείο και διαλέξαμε την φορτισμένη πλάκα.

Διασχίζοντας το φύλλο από τα αρνητικά στα θετικά x παρατηρούμε ασυνέχεια στο ηλεκτρικό πεδίο ίση με

$$\Delta E = E(+0) - E(-0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

όση και στον σφαιρικό φλοιό πηγαίνοντας από το εσωτερικό στο εξωτερικό του.

Δυο αντίθετα φορτισμένα επίπεδα φύλλα

Ανάμεσα στα φύλλα τα πεδία θα προστίθενται και άρα το συνολικό πεδίο θα διπλασιάζεται. Έξω από τα φύλλα τα πεδία εξουδετερώνονται και το συνολικό πεδίο μηδενίζεται.

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x} \quad 0 \leq x \leq d$$

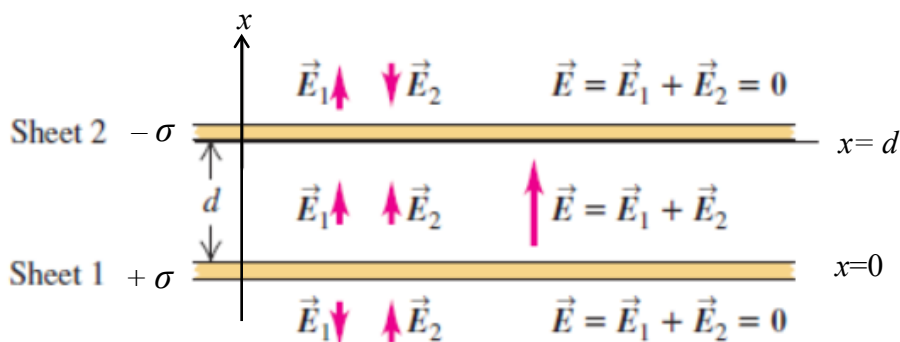
$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x} \Rightarrow \vec{E} = 0 \quad x < 0, x > d$$

Η πτώση τάσης μεταξύ δύο σημείων a και b ($x_b > x_a$) υπολογίζεται από τον τύπο

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b E dx = E \int_a^b dx = E(x_b - x_a) \Rightarrow V_a - V_b = E(x_b - x_a) \quad (45)$$

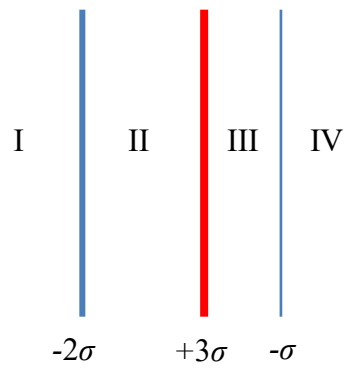
Η πτώση τάσης μεταξύ των πλακών είναι

$$V \equiv V_+ - V_- = E(d - 0) \Rightarrow V = Ed$$



Παράδειγμα

Λαμβάνοντας ως θετική την προς τα δεξιά κατεύθυνση, το πεδίο στις περιοχές I, II, III και IV έχει τιμή :



A) $+\frac{\sigma}{2\epsilon_0}, -\frac{\sigma}{\epsilon_0}, +\frac{3\sigma}{2\epsilon_0}, -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

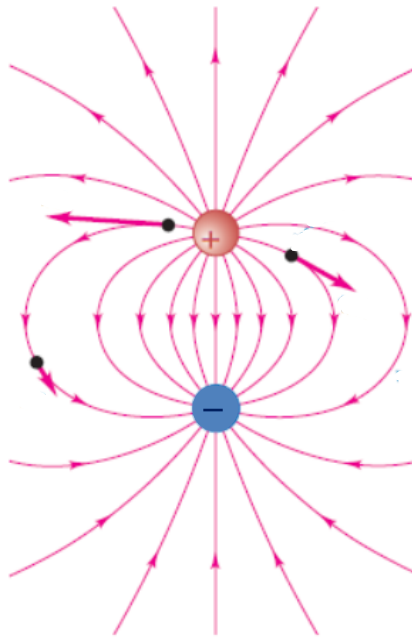
B) $0, -\frac{2\sigma}{\epsilon_0}, +\frac{\sigma}{\epsilon_0}, 0$

Γ) $0, +\frac{2\sigma}{\epsilon_0}, 0, -\frac{3\sigma}{\epsilon_0}$

Δ) $+\frac{\sigma}{\epsilon_0}, -\frac{2\sigma}{\epsilon_0}, +\frac{3\sigma}{\epsilon_0}, -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Δύο αντίθετα φορτία

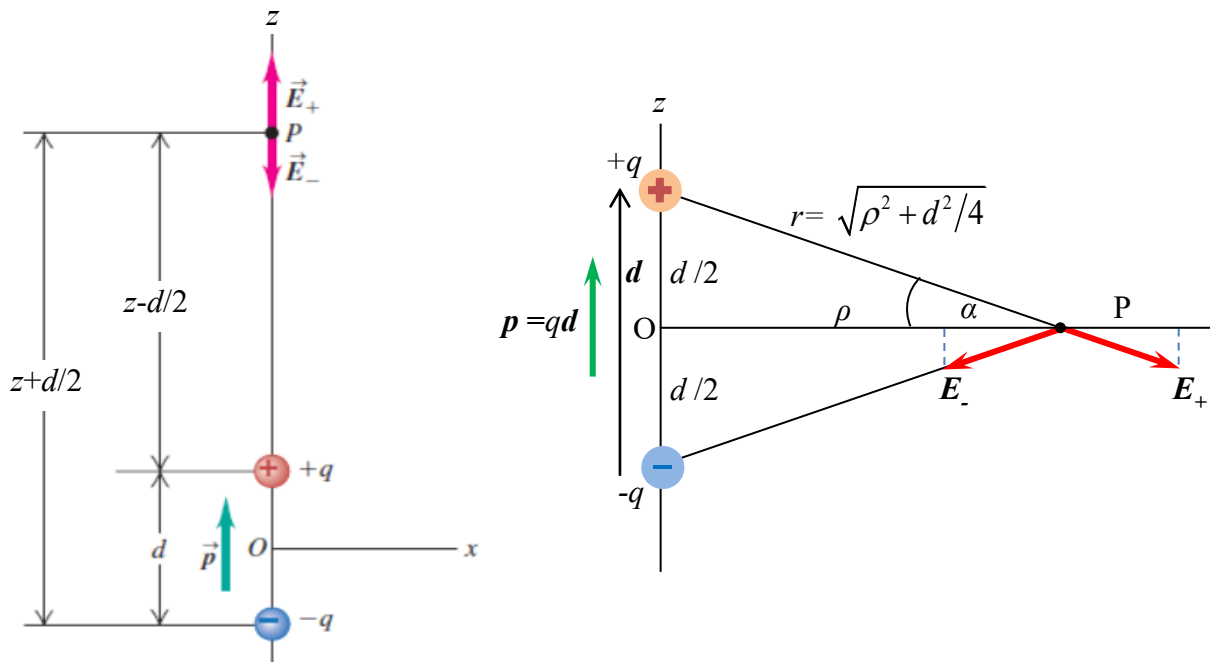
Διάταξη με δύο αντίθετα φορτία $-q$ και $+q$ σε απόσταση d μεταξύ τους (το ένα στο $y = -d/2$ και το άλλο στο $y = d/2$) ονομάζεται ηλεκτρικό δίπολο. Ορίζουμε τη διπολική ροπή $\vec{p} = q\vec{d}$ με φορά από το $-$ στο $+$ φορτίο, πάνω στον θετικό άξονα y .



Πάνω στον άξονα του διπόλου ($\hat{z} \uparrow \uparrow \vec{p}$) και σε απόσταση z , το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο z συνιστώσα με τιμή :

$$E_z(z, 0, 0) = E_{+z} + E_{-z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{+q}{(z - d/2)^2} + \frac{-q}{(z + d/2)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^2} \left[\frac{1}{(1 - d/2z)^2} - \frac{1}{(1 + d/2z)^2} \right]$$

(25)



Από ένα σημείο σε οποιαδήποτε μεσοκάθετο του διπόλου ($\hat{x}, \hat{y} \perp \vec{d}$) τα δύο φορτία απέχουν το ίδιο, οπότε $E_+ = E_- = E$. Οι «οριζόντιες» συνιστώσες από τα δύο αντίθετα φορτία εξουδετερώνονται και το πεδίο είναι πάλι στον z άξονα με τιμή

$$E_z(x, y, 0) = E_{z+} + E_{z-} = -2E \cos \alpha = -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\rho^2 + (d/2)^2} \frac{d/2}{\sqrt{\rho^2 + (d/2)^2}} \Rightarrow E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{\rho^3 \left(1 + (d/2)^2\right)^{3/2}}$$

(26)

Από τους παραπάνω τύπους για μεγάλες αποστάσεις $z, \rho \gg d$ και άρα $z \approx r, \rho \approx r$ παίρνουμε χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του διώνυμου

$$\frac{1}{(1 - d/2z)^2} - \frac{1}{(1 + d/2z)^2} = \left(1 + 2\frac{d}{2z} + O(d^2/z^2)\right) - \left(1 - 2\frac{d}{2z} + O(d^2/z^2)\right) = \frac{2d}{z} + O(d^2/z^2)$$

Πάνω στον άξονα του διπόλου: $E_z(z, 0, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^2} \left[\frac{2d}{z} + O(d^2/z^2) \right] \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}$

Πάνω στη μεσοκάθετο του διπόλου: $E_z(x, y, 0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{\rho^3 \left(1 + (d/2)^2\right)^{3/2}} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}$

Βλέπουμε ότι σε μεγάλες αποστάσεις η ένταση του πεδίου του διπόλου πέφτει ανάλογα με τον κύβο της απόστασης $E_{dipole} \propto \frac{1}{r^3}$, δηλαδή εξασθενεί πιο γρήγορα από του σημειακού φορτίου $E_{point} \propto \frac{1}{r^2}$

Σημειακό Δίπολο

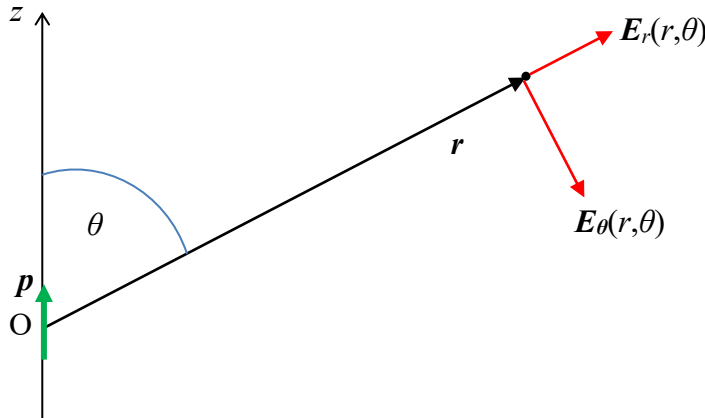
Μεγάλες αποστάσεις σημαίνει ότι το δίπολο γίνεται σημειακό. Το σημειακό δίπολο μας ενδιαφέρει επειδή τα περισσότερα μόρια είναι δίπολα. Κάνοντας το λεπτομερή υπολογισμό του δυναμικού σε τυχαίο σημείο και παίρνοντας το όριο $d \rightarrow 0, q \rightarrow \infty$ ώστε $\vec{p} = q\vec{d} = \text{σταθ}$ μπορούμε να καταλήξουμε στον γενικό τύπο για το δυναμικό

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{r^3}$$

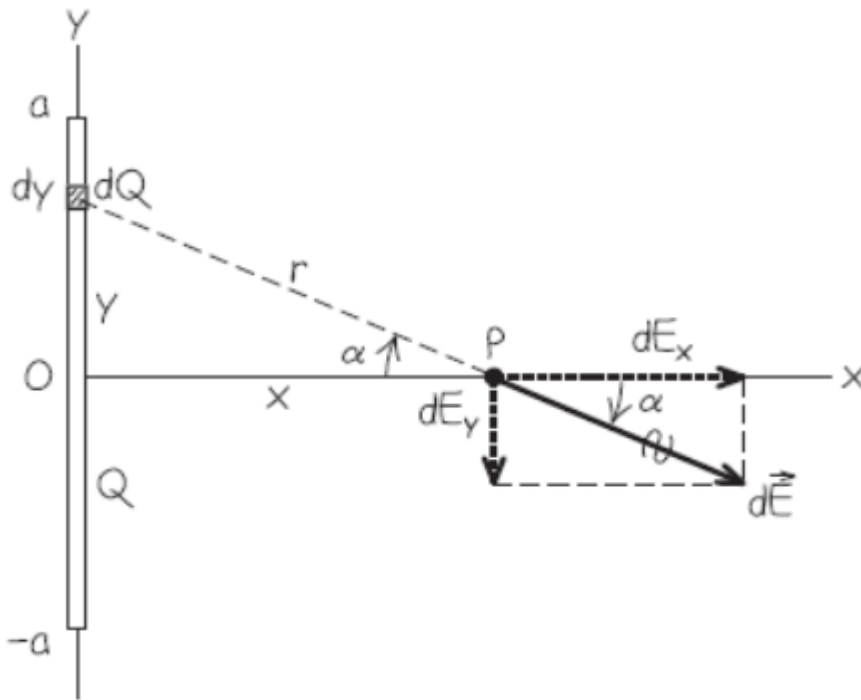
και από το δυναμικό να βρούμε την ένταση του πεδίου

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{r^3}$$

Επιβεβαιώστε ότι ο παραπάνω τύπος συμφωνεί με τους τύπους του πεπερασμένου δίπολου με $\vec{p} = p\hat{z}$ σε μεγάλες αποστάσεις που βρήκαμε πριν .



Ευθύγραμμο τμήμα



Θεωρούμε γραμμή από $-a$ ως $+a$ ομοιόμορφα φορτισμένη.

Συνολικό φορτίο = Q , Γραμμική πυκνότητα φορτίου = $\lambda = \frac{Q}{2a}$

Θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο της μεσοκαθέτου ($y = 0$) σε απόσταση x .

Η κάθετη συνιστώσα του πεδίου είναι μηδέν, $E_y = 0$, καθώς το πεδίο από κάθε στοιχείο της γραμμής πάνω από το μηδέν (π.χ. στο y) εξουδετερώνεται από το αντίθετο πεδίο που δημιουργεί το αντίστοιχο στοιχείο της γραμμής κάτω από το μηδέν (στο $-y$).

Μαθηματικά αυτό φαίνεται εύκολα επειδή ολοκληρώνουμε το γινόμενο μιας άρτιας με μια περιττή συνάρτηση σε ένα συμμετρικό πεδίο τιμών

$$E_y = \int_{-a}^{+a} dE_y = \int_{-a}^{+a} dE \cdot \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{dq}{x^2 + y^2} \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{\lambda dy}{x^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

«Προσθέτοντας» τις οριζόντιες συνιστώσες κάθε στοιχειώδους φορτίου της γραμμής έχουμε

$$E_x = \int_{-a}^{+a} dE_x = \int_{-a}^{+a} dE \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{dq}{x^2 + y^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{\lambda dy}{x^2 + y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (10)$$

Το ολοκλήρωμα δεν φαίνεται απλό και για να υπολογιστεί χρειάζεται η αλλαγή μεταβλητών

$$y = x \tan \theta, \quad dy = x \sec^2 \theta d\theta, \quad x^2 + y^2 = x^2 \sec^2 \theta, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (11)$$

ώστε να φανεί τελικά ότι είναι το ολοκλήρωμα του συνημιτόνου

$$\int \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \int \frac{x \sec^2 \theta d\theta}{(x^2 \sec^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{x^2} \int \frac{d\theta}{\sec \theta} = \frac{1}{x^2} \int \cos \theta d\theta = \frac{1}{x^2} \sin \theta + C = \frac{1}{x^2} \frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}} + C \quad (12)$$

Έτσι τελικά το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$E_x = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \left[\frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}} \right]_{-a}^{+a} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} (a - (-a)) = \frac{\lambda \cdot 2a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (13)$$

$$\text{ή } E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (14)$$

Σε μεγάλες αποστάσεις ($x \gg a$) ή ισοδύναμα για πολύ κοντή γραμμή, αυτό γίνεται ίσο με το πεδίο σημειακού φορτίου Q

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \quad (15)$$

Αν η γραμμική κατανομή είναι πολύ μακριά (εκτείνεται στο άπειρο $a \rightarrow \infty$) με $\lambda = \text{σταθ.}$ ή ισοδύναμα για σημείο πολύ κοντά στη γραμμή, τότε από συμμετρία $x=r$ (όπου r η κάθετη απόσταση από τη γραμμή) και από την (13) έχουμε

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (16)$$

Δυναμικό

Δεν έχουμε διανύσματα και συνιστώσες και η έκφραση του δυναμικού θα βρεθεί από το ολοκλήρωμα

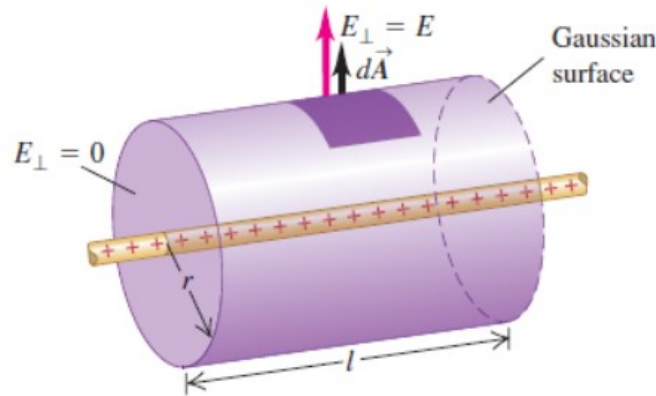
$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{\lambda dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} \int_{-a}^{+a} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Αυτό είναι ένα γνωστό ολοκλήρωμα και ενδιαφέρον για άσκηση στα μαθηματικά. Βρίσκουμε την τιμή του από ένα πίνακα με ολοκληρώματα.

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + a^2} + a}{\sqrt{x^2 + a^2} - a} \right)$$

Γραμμή μεγάλου (απείρου) μήκους

Επειδή η γραμμή έχει κυλινδρική συμμετρία μπορούμε να βρούμε το πεδίο της και από το νόμο του Gauss. Το πεδίο θα έχει μόνο ακτινική συνιστώσα κάθετη στη γραμμική κατανομή φορτίου και η τιμή του θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση r .



$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S E(r) dS = E(r) \int_S dS = E(r) \cdot 2\pi r l$$

$$\frac{Q_{\text{περικλ.}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Δυναμικό

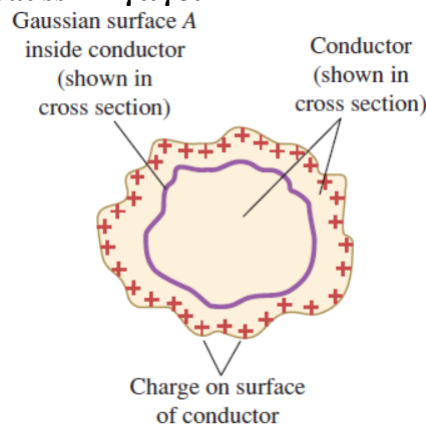
$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) \tag{48}$$

Όπως φαίνεται το δυναμικό δεν μπορεί να είναι μηδέν στο άπειρο γιατί αν βάλω $V_b=0$ και $r_b \rightarrow \infty$ τότε σε κάθε άλλο σημείο $V_a = \infty$ αφού $\ln(\infty) = \infty$. Αυτό συμβαίνει γιατί εκεί υπάρχουν φορτία της γραμμής. Οπότε διαλέγουμε ένα άλλο αυθαίρετο σημείο b σε απόσταση r_0 όπου θεωρούμε το δυναμικό μηδέν και έτσι έχουμε

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \tag{49}$$

με $V(r_0)=0$ αφού $\ln(1)=0$

8. Εφαρμογές του Νόμου του Gauss – Αγωγοί

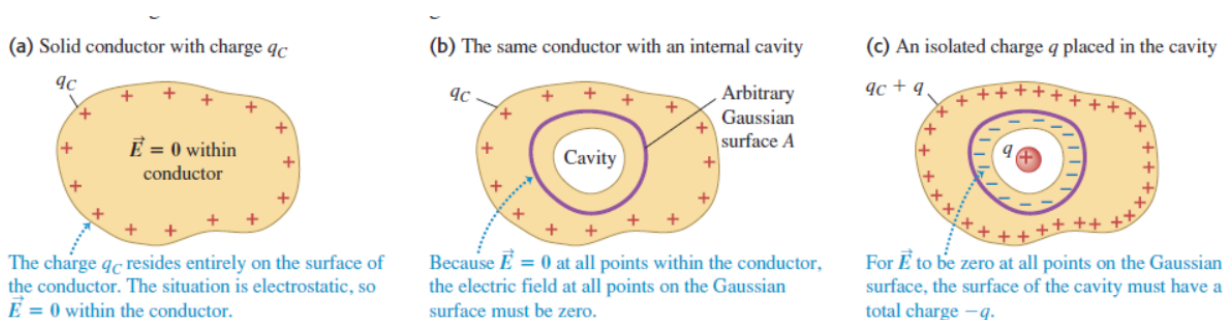


Αγωγός θεωρείται κάθε υλικό στο οποίο αν τοποθετηθεί πρόσθετο φορτίο Q αυτό μπορεί να κινηθεί ελεύθερα στο χώρο του αγωγού.

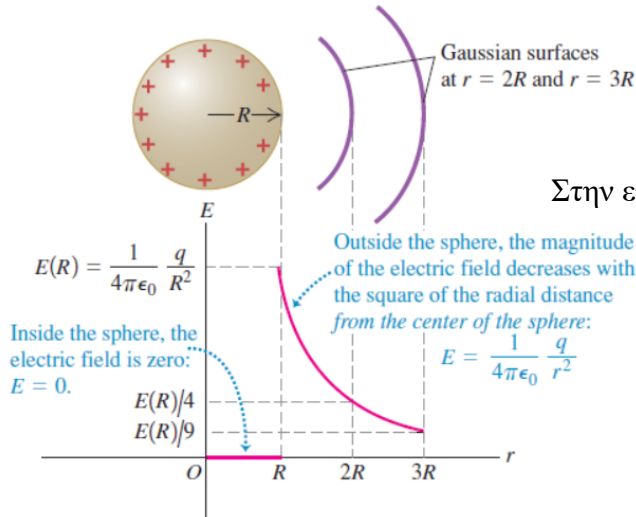
Για τους αγωγούς, σε ηλεκτροστατικές καταστάσεις (δηλ. όταν τα φορτία πάνε να κινούνται) εξάγονται τα παρακάτω ενδιαφέροντα συμπεράσματα:

1. το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό και προς το εσωτερικό ενός αγωγού είναι μηδέν (αλλιώς τα φορτία θα πήγαιναν προς τα εκεί)
2. όλα τα φορτία βρίσκονται στην επιφάνεια του αγωγού (αφού απωθούνται και πάνε όσο πιο μακριά μπορούν το ένα από το άλλο ή από 1. και νόμο Gauss) → οι αγωγοί έχουν μόνο επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

3. το δυναμικό μέσα σε έναν αγωγό είναι σταθερό (αφού η παράγωγός του που είναι το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν) → ένας αγωγός είναι χώρος σταθερού δυναμικού.
4. Η τιμή του δυναμικού V του αγωγού θα είναι ανάλογη με το φορτίο Q του αγωγού (από τον ορισμό του δυναμικού)
5. το δυναμικό πάνω στην επιφάνεια ενός αγωγού είναι επίσης σταθερό και ίσο με αυτό στο εσωτερικό του, από συνέχεια (αλλιώς τα φορτία θα κινούνταν είτε πάνω στην επιφάνεια είτε προς τα μέσα) → η επιφάνεια ενός αγωγού είναι ισοδυναμική επιφάνεια (χρησιμοποιείται στη μέθοδο των κατοπτρικών φορτιών)
6. το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια του αγωγού είναι κάθετο σε αυτόν (αφού η επιφάνειά του είναι ισοδυναμική επιφάνεια) $E_{\parallel} = 0$
7. το μέτρο του κάθετου ηλεκτροστατικού πεδίου σε κάθε σημείο της επιφάνειας είναι ανάλογο της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου σε εκείνο το σημείο : $E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (από νόμο Gauss)
8. Το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια του αγωγού και κάθετα σε αυτή παρουσιάζει ασυνέχεια ίση με $E_{εξ} - E_{εσ} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ από το εσωτερικό προς το εξωτερικό του αγωγού
9. Το συνολικό φορτίο πάνω στην επιφάνεια μίας κενής κοιλότητας του αγωγού είναι μηδέν (από νόμο Gauss)
10. Το πεδίο στο εσωτερικό μίας κενής κοιλότητας του αγωγού είναι μηδέν (από νόμο Gauss αφού είναι κενή και μέσα σε αγωγό)
11. Το δυναμικό σε όλο το εσωτερικό και στην επιφάνεια μιας κενής κοιλότητας είναι σταθερό (αν δεν ήταν θα υπήρχε ηλεκτρ. πεδίο ίσο με την παράγωγο του δυναμικού)
12. Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην επιφάνεια μίας κενής κοιλότητας ενός αγωγού είναι επίσης μηδέν, δηλ. δεν υπάρχει πουθενά φορτίο πάνω στην επιφάνεια της κοιλότητας ακόμα και αν ήταν σε ίσες ποσότητες + και - (από νόμο Gauss αφού το πεδίο είναι μηδέν και η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι ανάλογη με το πεδίο) → επειδή αυτό είναι συνέπεια του νόμου του Gauss αποτελεί τον πιο εύκολο τρόπο για πειραματική επαλήθευση του νόμου του αντίστροφου τετραγώνου.
13. Μια κοιλότητα σε αγωγό που έχει φορτίο q (μονωμένο από τον αγωγό) επάγει φορτίο $-q$ στην εσωτερική επιφάνεια της κοιλότητας και φορτίο q στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού (από νόμο Gauss)



Παράδειγμα Πεδίο αγωγής φορτισμένης σφαίρας



Εξω $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad r \geq R$

$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad r \geq R$

Στην επιφάνεια $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{r} \quad r = R$

$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad r = R$

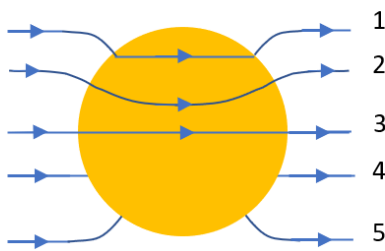
Μέσα $\vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad r \leq R$

$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad r \leq R$

Χωρητικότητα: $C = \frac{q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$

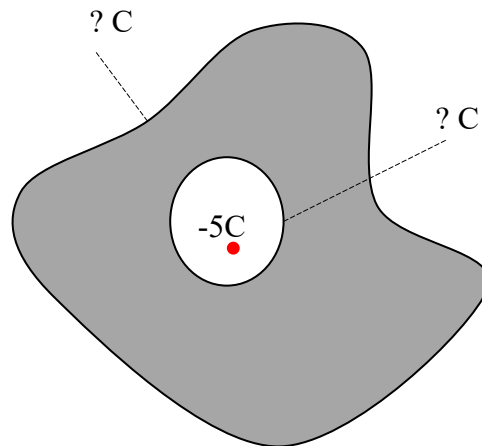
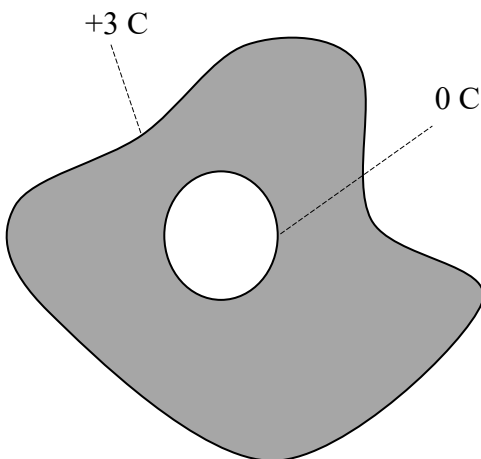
Το πεδίο είναι ίδιο με του φλοιού.

Παράδειγμα Αγωγίμη (αφόρτιστη) σφαίρα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο
Ποιες δυναμικές γραμμές έχουν σχεδιαστεί σωστά?



Η 5 μόνο Να μην συνεχίζεται η γραμμή μέσα στον αγωγό
 Να είναι κάθετη στην επιφάνεια του αγωγού

Παράδειγμα Φορτίο σε κοιλότητα φορτισμένου αγωγού



-2 C, +5 C

Χωρητικότητα (Capacitance) – Πυκνωτές (Capacitor)

Έστω ότι έχουμε μια διάταξη αγωγών στο χώρο με φορτία Q_1, Q_2, \dots και δυναμικά V_1, V_2, \dots . Από τον ορισμό του δυναμικού και από την αρχή της επαλληλίας το δυναμικό κάθε αγωγού θα εξαρτάται γραμμικά από τα φορτία όλων των αγωγών

$$V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + \dots$$

$$V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + \dots$$

κλπ.

ή αντίστροφα (αντιστρέφοντας τον πίνακα) το φορτίο κάθε αγωγού θα εξαρτάται γραμμικά από τα δυναμικά όλων των αγωγών :

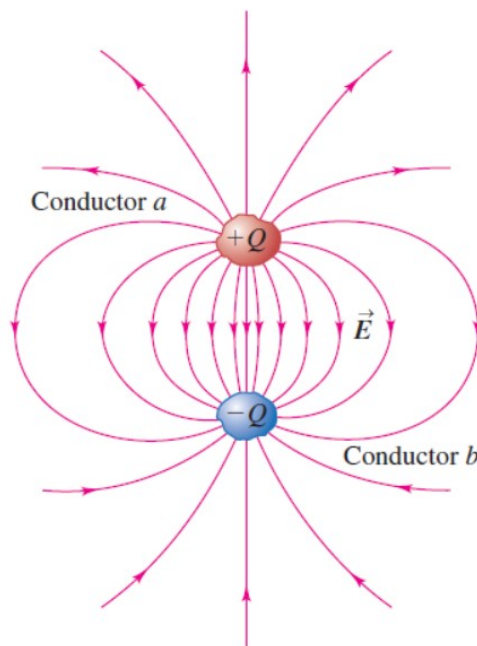
$$Q_1 = c_{11}V_1 + c_{12}V_2 + \dots$$

$$Q_2 = c_{21}V_1 + c_{22}V_2 + \dots$$

κλπ.

Αν όλα τα φορτία των αγωγών διπλασιαστούν τότε και τα δυναμικά τους θα διπλασιαστούν. Οι συντελεστές αναλογίας όμως μένουν σταθεροί. Οι συντελεστές p_{ij} όπως και οι c_{ij} αποδεικνύεται ότι είναι συμμετρικοί και εξαρτώνται από τη θέση και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των αγωγών. Οι p_{ij} ονομάζονται συντελεστές δυναμικού. Οι συντελεστές c_{ij} ονομάζονται χωρητικότητες και έχουν

μονάδες $[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{C}{V} \equiv F$ φάραντ. $(F = \frac{C}{V} = \frac{C}{J/C} = \frac{C^2}{N \cdot m})$



Στην πράξη (επειδή υλοποιείται εύκολα) χρησιμοποιούμε μια διάταξη δύο αγωγών με αντίθετα φορτία $Q_1 = Q = -Q_2$. Αυτή η διάταξη ονομάζεται πυκνωτής και χρησιμοποιείται για την αποθήκευση φορτίου και ηλεκτρικής ενέργειας. Τα αντίθετα φορτία έλκονται και συγκρατούνται πάνω στους αγωγούς στις απέναντι επιφάνειές τους. Από τις προηγούμενες γραμμικές σχέσεις προκύπτει ότι το φορτίο του πυκνωτή Q θα είναι ανάλογο με τη διαφορά δυναμικού των δύο αγωγών $V = V_1 - V_2$.

$$V = V_1 - V_2 = (p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2) - (p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2) = (p_{11} - p_{12})Q - (p_{21} - p_{22})Q = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})Q$$

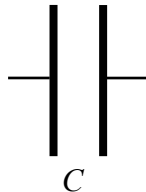
$$Q = \frac{V}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}}$$

Η σταθερά αναλογίας ονομάζεται χωρητικότητα του πυκνωτή

$$Q = CV$$

και εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ των αγωγών και από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των αγωγών. Ανεξάρτητα από τη γεωμετρία τους, καλούμε τους δύο αγωγούς του πυκνωτή, σπλισμούς ή πλάκες. Η χωρητικότητα είναι το μέτρο της δυνατότητας του πυκνωτή να αποθηκεύει ηλεκτρικό φορτίο. Μας λέει πόσα κουλόμ μπορούμε να του φορτώσουμε για κάθε βολτ διαφοράς δυναμικού μεταξύ των αγωγών.

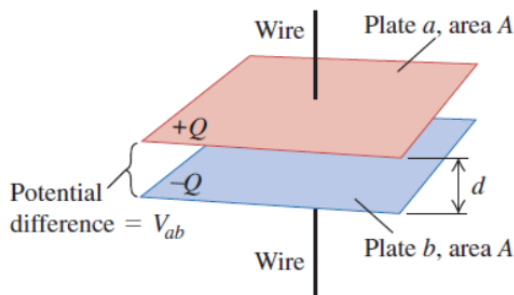
Οι πυκνωτές συμβολίζονται με το παρακάτω σχήμα



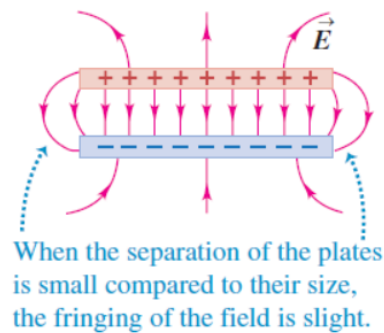
Πυκνωτής

Επίπεδος πυκνωτής

(a) Arrangement of the capacitor plates



(b) Side view of the electric field \vec{E}



Όταν οι διαστάσεις των σπλισμών είναι πολύ μεγαλύτερες από την μεταξύ τους απόσταση ($\sqrt{A} \gg d$) η διάταξη θεωρείται σε πολύ καλή προσέγγιση σαν δύο απείρου εμβαδού επίπεδων φύλλων με αντίθετα φορτία Q και $-Q$, ομογενώς κατανομημένα πάνω στις πλάκες με επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = Q/A$. Έτσι θεωρούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο εντοπίζεται σχεδόν αποκλειστικά μεταξύ των πλακών και είναι ομογενές. Το πεδίο στα άκρα των φύλλων είναι αμελητέο. Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί η κάθε πλάκα είδαμε ότι είναι $\sigma/2\epsilon_0$ και άρα το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των σπλισμών θα είναι

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

με φορά από τη θετική προς την αρνητική πλάκα. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σπλισμών υπολογίζεται από τον ορισμό του δυναμικού

$$V \equiv V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b E dx = E \int_a^b dx \Rightarrow V = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

$$E = \frac{V}{d}$$

Άρα η χωρητικότητα του επίπεδου πυκνωτή θα δίνεται από τον τύπο:

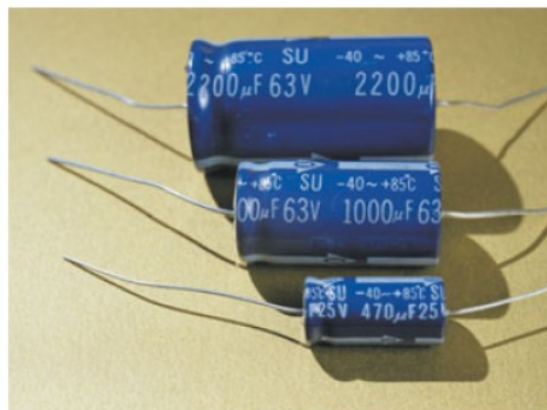
$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Από τον παραπάνω τύπο βλέπουμε ότι οι μονάδες της ηλεκτρικής σταθεράς ϵ_0 που από το νόμο του Coulomb είναι $C^2/(N \cdot m^2)$ γράφονται και

$$[\epsilon_0] = \frac{F}{m}$$

Η μονάδα χωρητικότητας φάραντ είναι πολύ μεγάλη. Οι συνήθεις πυκνωτές έχουν χωρητικότητες της τάξης των $\mu F=10^{-6}F$ ή $nF=10^{-9}F$ ή και $pF=10^{-12}F$.

Για να αυξήσουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή προσπαθούμε να μειώσουμε την απόσταση d μεταξύ των οπλισμών. Όταν όμως οι οπλισμοί έρθουν πολύ κοντά ή ακουμπήσουν θα έχουμε εκφόρτιση επειδή το ηλεκτρικό πεδίο γίνεται πολύ μεγάλο. Ο ξηρός αέρας αντέχει περίπου μέχρι 3×10^6 V/m. Το πρόβλημα λύνεται βάζοντας ανάμεσα στους οπλισμούς κάποιο μονωτικό υλικό που λέγεται διηλεκτρικό το οποίο έχει πολύ μεγαλύτερη ηλεκτρική αντοχή (περίπου $\times 10$). Αυτό αυξάνει επίσης την ηλεκτρική σταθερά κατά ένα παράγοντα κ (διηλεκτρική σταθερά του υλικού) σε $\epsilon = \kappa \epsilon_0$, οπότε έχουμε διπλό όφελος. Επίσης αυξάνουμε το εμβαδόν των πλακών. Για να μειώσουμε το μέγεθος του πυκνωτή από την αύξηση του εμβαδού του, τον διπλώνουμε σε σχήμα κυλίνδρου.



Παράδειγμα 1. Τι εμβαδόν πρέπει να έχει ένας επίπεδος πυκνωτής που οι οπλισμοί του απέχουν $d=1$ mm ώστε η χωρητικότητά του να είναι 1 F?

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1,0F) \cdot (1,0 \times 10^{-3} m)}{(8,85 \times 10^{-12} F/m)} = 1,1 \times 10^8 m^2 \approx 10km \times 10km$$

Μπορεί όμως χωρητικότητα 1 F να κατασκευαστεί, καθώς και πολύ μεγαλύτερες, αν μικρύνουμε την απόσταση d παρεμβάλλοντας ένα **διηλεκτρικό** που θα αποτρέπει την εκφόρτιση.

Παράδειγμα 2. Ένας επίπεδος πυκνωτής έχει $d=5,00$ mm $A= 2,00$ m². Εφαρμόζουμε διαφορά δυναμικού (τάση) $V= 10,0$ kV στους οπλισμούς του.

Πόση είναι η χωρητικότητά του?

Τι ηλεκτρικό φορτίο έχει κάθε πλάκα του?

Τι ένταση έχει το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του?

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8,85 \times 10^{-12} F/m) \frac{(2,00 m^2)}{(5,00 \times 10^{-3} m)} = 3,54 \times 10^{-9} F = 3,54 nF$$

$$Q = CV = (3,54 \times 10^{-9} C/V)(10,0 \times 10^3 V) = 3,54 \times 10^{-5} C = 35,4 \mu C$$

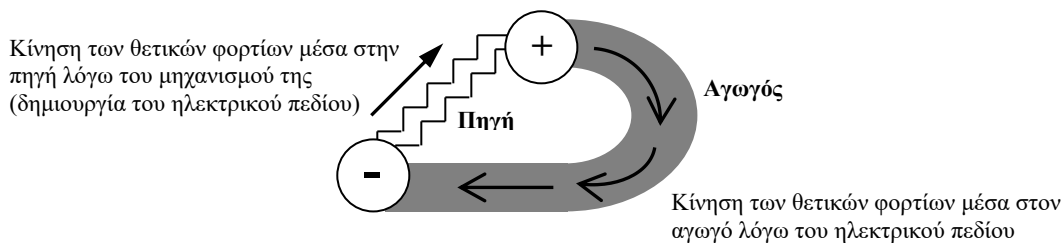
Η πλάκα που βρίσκεται στο υψηλότερο δυναμικό έχει θετικό φορτίο $+35,4 \mu C$ και η πλάκα που βρίσκεται στο χαμηλότερο δυναμικό έχει αρνητικό φορτίο $-35,4 \mu C$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{(3,54 \times 10^{-5} C)}{(8,85 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2)(2,00 m^2)} = 2,00 \times 10^6 N/C$$

$$E = \frac{V}{d} = \frac{10,0 \times 10^3 V}{5,00 \times 10^{-3} m} = 2,00 \times 10^6 V/m$$

Πηγές και κύκλωμα

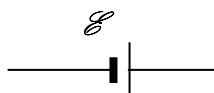
Τάσεις (διαφορές δυναμικού) εφαρμόζουμε με μια πηγή ηλεκτρικού πεδίου. Οι πηγές είναι συσκευές (ηλεκτρικά στοιχεία, ηλεκτροστατικές μηχανές, ηλεκτρογεννήτριες, θερμοζεύγη, φωτοβολταϊκές κυψέλες, κλπ.) που με διάφορους μηχανισμούς (χημικούς, μηχανικούς, επαγωγικούς, θερμικούς, φωτοχημικούς, κλπ.) **συγκεντρώνουν μαζί ομόσημα φορτία και έτσι δημιουργούν ηλεκτρικό πεδίο**. Ουσιαστικά μετατρέπουν κάποιου είδους ενέργεια (χημική, μηχανική, θερμική, ακτινοβολίας, κλπ.) σε ηλεκτρική ενέργεια. Το σημείο (πόλος) όπου οδηγούνται τα θετικά φορτία είναι σημείο υψηλού δυναμικού ενώ το σημείο όπου οδηγούνται τα αρνητικά είναι σημείο χαμηλού δυναμικού. Αν τα σημεία αυτά (πόλοι) συνδεθούν μεταξύ τους με έναν αγωγό τότε τα φορτία του αγωγού (π.χ. θετικά) θα κινηθούν λόγω του ηλεκτρικού πεδίου προς τον αντίστοιχο αντίθετο πόλο (αρνητικό). Όταν φτάσουν στον πόλο η πηγή τα παραλαμβάνει και τα μεταφέρει με το μηχανισμό της στον άλλο πόλο που έχει ίδιο πρόσημο με αυτά (θετικό). Τα μετακινεί δηλαδή αντίθετα προς το ηλεκτρικό πεδίο που έχει εγκατασταθεί. Από εκεί απωθούνται πάλι λόγω του πεδίου στον αγωγό και διαγράφουν ξανά τον ίδιο κύκλο. Η διάταξη αυτή πηγή-αγωγός ονομάζεται κύκλωμα. Η προσανατολισμένη κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων ονομάζεται ηλεκτρικό ρεύμα.



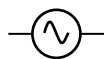
Εφόσον τα φορτία του αγωγού διαρκώς κινούνται μέσα στον αγωγό (αφαιρούνται από το ένα άκρο του ενώ αναπληρώνονται από το άλλο) ο αγωγός δεν είναι πια ισοδυναμικός χώρος.

Η ενέργεια που παρέχει η πηγή για να μεταφέρει τα ηλεκτρικά φορτία από τον ένα πόλο (χαμηλής δυναμικής ενέργειας) στον άλλο (υψηλής δυναμικής ενέργειας) ανά μονάδα ηλεκτρικού φορτίου ονομάζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής συμβολίζεται με \mathcal{E} και μετριέται σε βολτ (V)

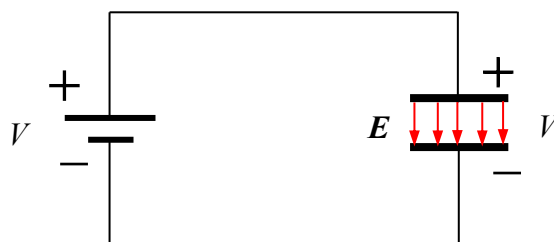
Οι πηγές σταθερής πολικότητας ονομάζονται συσσωρευτές και συμβολίζονται σχηματικά ως



όπου ο μακρύτερος πόλος αντιστοιχεί στο θετικό πόλο (υψηλό δυναμικό) και ο κοντός στον αρνητικό πόλο. Πηγές των οποίων η πολικότητα εναλλάσσεται ονομάζονται γεννήτριες εναλλασόμενου ρεύματος (ή εναλλακτήρες) και συμβολίζονται σχηματικά με



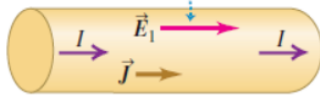
Πηγή συνδεδεμένη με πυκνωτή ώστε να του επιβάλλει διαφορά δυναμικού V



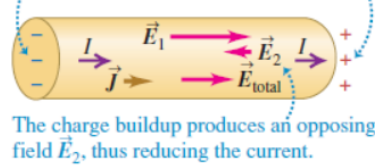
Για το μικρό χρονικό διάστημα που μεταφέρεται το ηλεκτρικό φορτίο από την πηγή, οι αγωγοί διαρρέονται από ρεύμα. Στη συνέχεια το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή στο κύκλωμα εξουδετερώνει

το ηλεκτρικό πεδίο της πηγής και το ρεύμα σταματά. Ο πυκνωτής και η πηγή έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού στα άκρα τους. Είναι συνδεδεμένοι παράλληλα, έχουν κοινά άκρα.

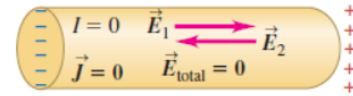
(a) An electric field \vec{E}_1 produced inside an isolated conductor causes a current.



(b) The current causes charge to build up at the ends.



(c) After a very short time \vec{E}_2 has the same magnitude as \vec{E}_1 ; then the total field is $\vec{E}_{total} = 0$ and the current stops completely.

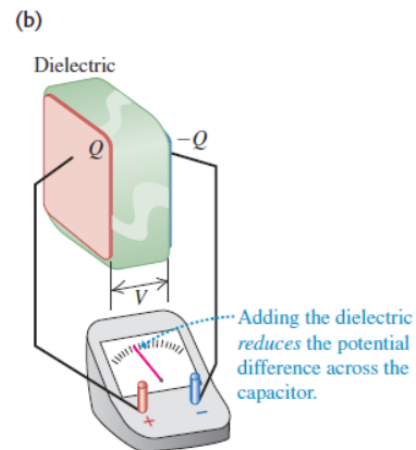
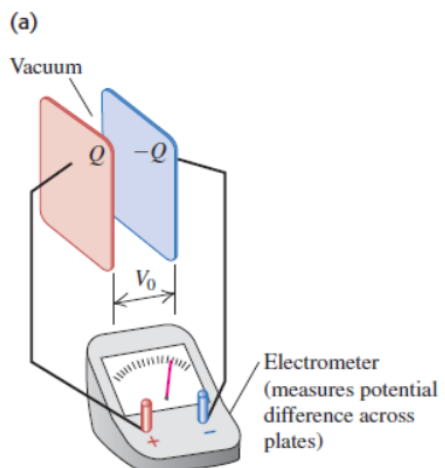


Διηλεκτρικά

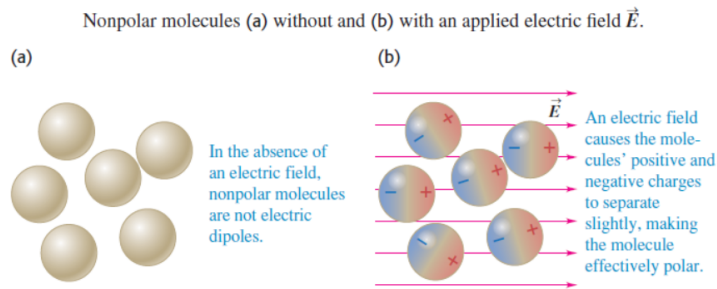
Ο Faraday γεμίζοντας το χώρο μεταξύ των οπλισμών ενός πυκνωτή με ένα διηλεκτρικό, δηλαδή ένα μονωτικό υλικό (ορυκτέλαιο, πλαστικό, κλπ.) βρήκε ότι η χωρητικότητα αυξάνεται κατά ένα παράγοντα $\kappa > 1$ που ονόμασε διηλεκτρική σταθερά του υλικού:

$$C = \kappa C_0 > C_0$$

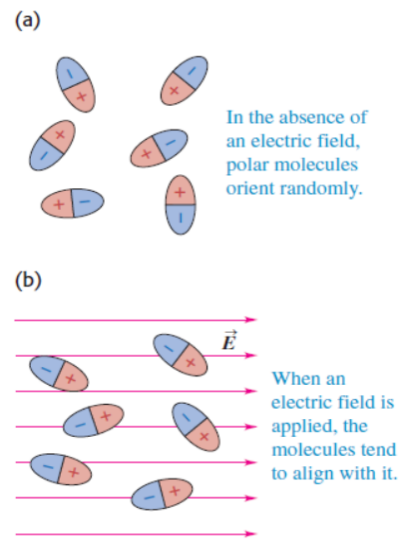
Αυτό διαπιστώνεται από την πτώση τάσης που παρατηρείται όταν εισάγουμε το διηλεκτρικό σε έναν φορτισμένο και απομονωμένο πυκνωτή.



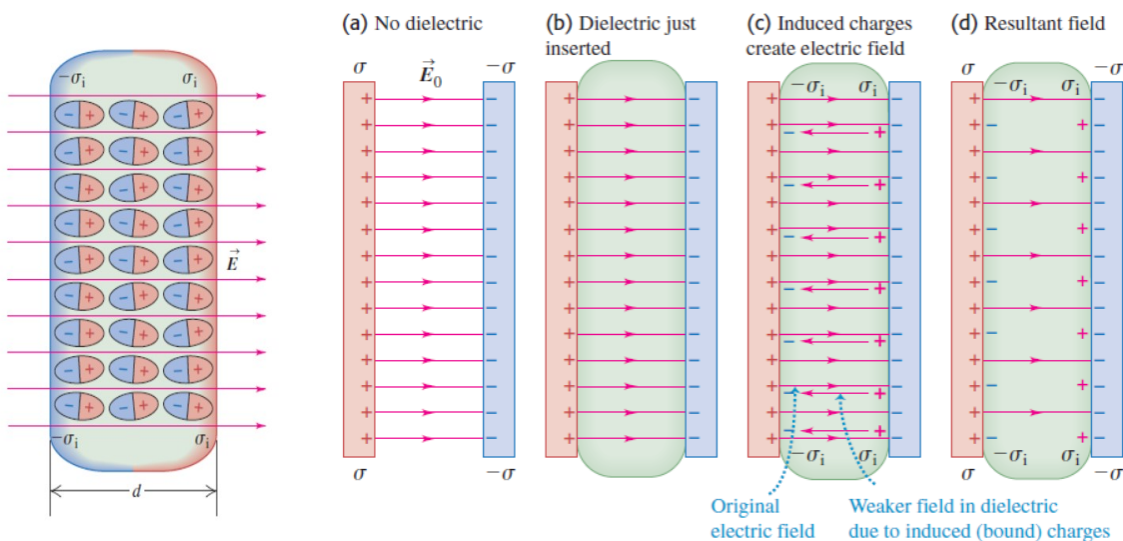
Αυτό που συμβαίνει είναι ότι τα μόρια του διηλεκτρικού είτε ευθυγραμμίζονται με το ηλεκτρικό πεδίο αν είναι ήδη δίπολα είτε πολώνονται αν δεν είναι. Έτσι δημιουργούν ένα αντίθετο ηλεκτρικό πεδίο που μειώνει το αρχικό.



Polar molecules (a) without and (b) with an applied electric field \vec{E} .



(a) Electric field of magnitude E_0 between two charged plates. (b) Introduction of a dielectric of dielectric constant K . (c) The induced surface charges and their field. (d) Resultant field of magnitude E_0/K .



Σταθερό φορτίο: $Q = Q_0 \Rightarrow CV = C_0V_0 \Rightarrow \kappa C_0V = C_0V \Rightarrow V = \frac{V_0}{\kappa}$ μειώνεται

Μεταβολή ηλεκτρικού πεδίου: $E = \frac{V}{d} = \frac{V_0}{d\kappa} = \frac{E_0}{\kappa}$ μειώνεται

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad E = \frac{\sigma - \sigma_{ind}}{\epsilon_0} \text{ μειώνεται}$$

Το γινόμενο της διηλεκτρικής σταθεράς ενός υλικού με την ηλεκτρική σταθερά ϵ_0 ονομάζεται ηλεκτρική επιτρεπτότητα του υλικού ϵ :

$$\epsilon = \kappa\epsilon_0$$

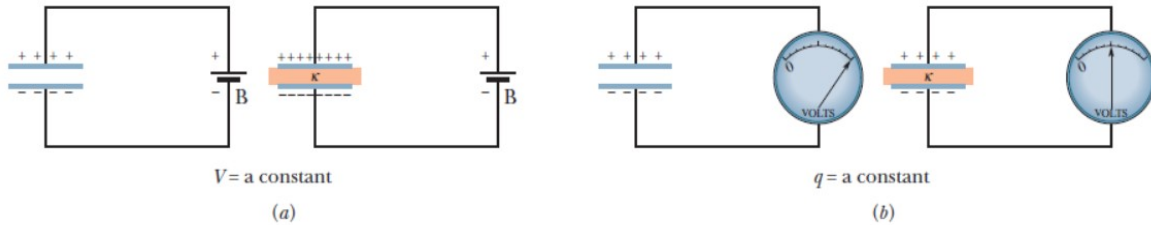
Όταν έχουμε διηλεκτρικό τότε, σε όλους τους τύπους του πυκνωτή απλώς αντικαθιστούμε την ηλεκτρική σταθερά ϵ_0 με την ηλεκτρική επιτρεπτότητα του διηλεκτρικού ϵ .

$$C = \epsilon \frac{A}{d}, \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Αν εισαγάγαμε το διηλεκτρικό έχοντας τον πυκνωτή συνδεδεμένο με πηγή και άρα υπό σταθερή τάση, τότε ο πυκνωτής θα «τραβούσε» φορτία από την πηγή, αφού μεγαλώνει η χωρητικότητά του.

$$\text{Σταθερή τάση : } V = V_0 \Rightarrow \frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{C_0} \Rightarrow \frac{Q}{\kappa C_0} = \frac{Q_0}{C_0} \Rightarrow Q = \kappa Q_0$$

Οι δύο περιπτώσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



(a) If the potential difference between the plates of a capacitor is maintained, as by battery B, the effect of a dielectric is to increase the charge on the plates. (b) If the charge on the capacitor plates is maintained, as in this case, the effect of a dielectric is to reduce the potential difference between the plates. The scale shown is that of a *potentiometer*, a device used to measure potential difference (here, between the plates). A capacitor cannot discharge through a potentiometer.

Συνδέσεις πυκνωτών

Για να πετύχουμε την χωρητικότητα που επιθυμούμε όταν έχουμε πυκνωτές με χωρητικότητα διαφορετική από την επιθυμητή μπορούμε να τους συνδυάσουμε είτε σε σειρά είτε παράλληλα.

Υπενθυμίζουμε: Διαφορά δυναμικού σημαίνει τελική μείον αρχική τιμή δυναμικού. Η πτώση τάσης είναι το αντίθετο, δηλαδή αρχική τιμή δυναμικού μείον τελική (πόσο έπεσα από την αρχική μου τιμή).

$$\text{Διαφορά δυναμικού: } \Delta V(a \rightarrow b) = V_b - V_a$$

$$\text{Πτώση τάσης : } V_{ab} = V_a - V_b$$

$$V_{ab} = -\Delta V(a \rightarrow b)$$

Σύνδεση σε σειρά

Οι πυκνωτές έχουν το ίδιο φορτίο επειδή είναι σε σειρά. Η θετική πλάκα του ενός που συνδέεται με την αρνητική πλάκα του άλλου αποτελούν έναν ουδέτερο αγωγό αφού δεν συνδέονται στην πηγή και άρα πρέπει να έχουν αντίθετα φορτία.

Το άθροισμα των πτώσεων τάσης τους θα πρέπει είναι ίσο με την πτώση τάσης του ισοδύναμου πυκνωτή (που είναι ίση με την πτώση τάσης στους ακροδέκτες της πηγής). Η πτώση τάσης του καθενός είναι αντιστρόφως ανάλογη της χωρητικότητάς του.

$$Q_1 = Q_2 = Q_{eq} = Q$$

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2}, \quad V_{ab} = V_{ac} + V_{cb} = V_1 + V_2 = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$C_{eq} = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{Q}{Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Γενικεύοντας

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$

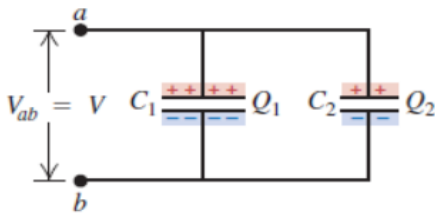
Όταν πυκνωτές συνδυάζονται σε σειρά η ισοδύναμη χωρητικότητα είναι μικρότερη από την ατομική χωρητικότητα καθενός από τους πυκνωτές

A parallel connection of two capacitors.

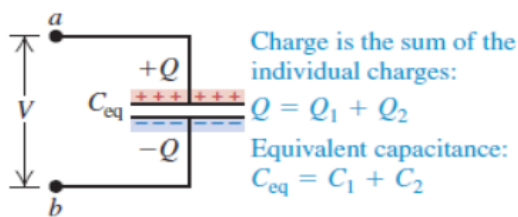
(a) Two capacitors in parallel

Capacitors in parallel:

- The capacitors have the same potential V .
- The charge on each capacitor depends on its capacitance: $Q_1 = C_1V$, $Q_2 = C_2V$.



(b) The equivalent single capacitor

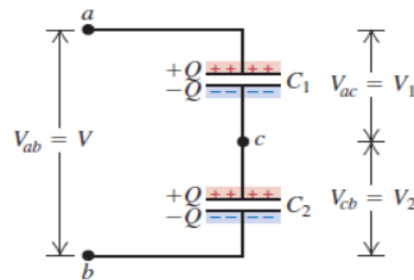


24.8 A series connection of two capacitors.

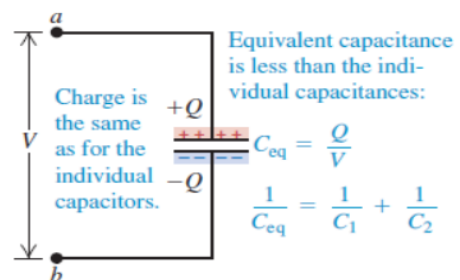
(a) Two capacitors in series

Capacitors in series:

- The capacitors have the same charge Q .
- Their potential differences add: $V_{ac} + V_{cb} = V_{ab}$.



(b) The equivalent single capacitor



Παράλληλη σύνδεση

Οι πυκνωτές έχουν την ίδια τάση στα άκρα τους αυτήν της πηγής. Σε αυτή την τάση θα είναι και ο ισοδύναμος πυκνωτής. Τα φορτία τους είναι διαφορετικά και ανάλογα με τη χωρητικότητα του καθενός. Το συνολικό τους φορτίο θα πρέπει να είναι το φορτίο που θα έχει ο ισοδύναμος πυκνωτής.

$$V_1 = V_2 = V_{eq} = V$$

$$Q_1 = C_1V, \quad Q_2 = C_2V, \quad Q_1 + Q_2 = Q$$

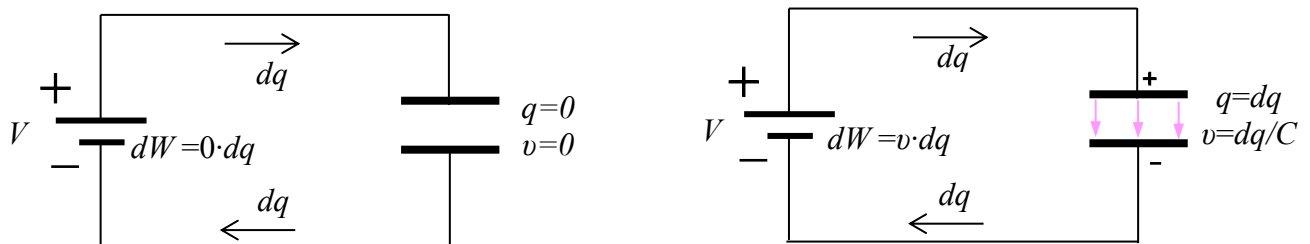
$$C_{eq} = \frac{Q}{V} = \frac{C_1V + C_2V}{V} = C_1 + C_2$$

Γενικεύοντας

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

Όταν πυκνωτές συνδυάζονται παράλληλα η ισοδύναμη χωρητικότητα είναι μεγαλύτερη από την ατομική χωρητικότητα καθενός από τους πυκνωτές

Ενέργεια πυκνωτή - ηλεκτρικού πεδίου



$$dW = v dq = \frac{1}{C} q dq \Rightarrow W = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

$$Q = CV$$

Ενέργεια πυκνωτή $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QV}{2} = \frac{1}{2}CV^2$

Είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργήθηκε

Πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου : $u_E = \frac{\text{ενέργεια}}{\text{όγκος}} = \frac{CV^2/2}{Ad}$

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}, \quad V = Ed$$

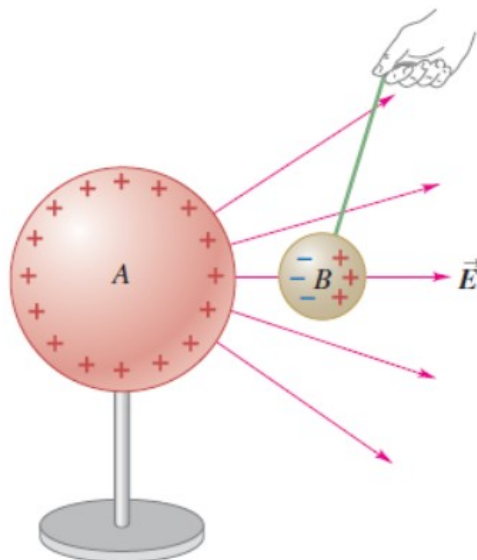
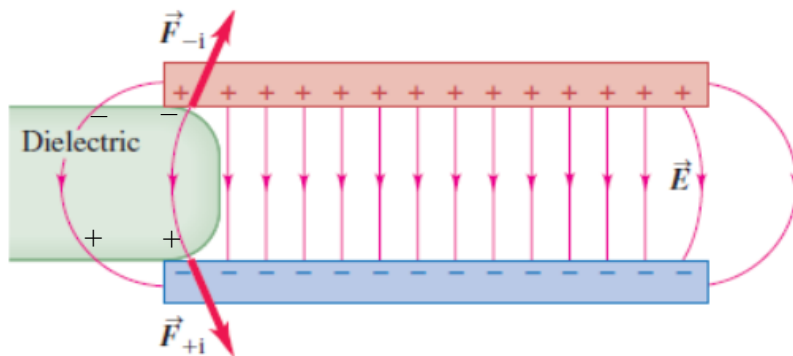
$$u_E = \frac{\frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2}{Ad} \Rightarrow u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Με διηλεκτρικό (Q =σταθερό) η πυκνότητα ενέργειας είναι $u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2$

Η ενέργεια μειώνεται $u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \kappa \epsilon_0 \frac{E_0^2}{\kappa^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{u_{E0}}{\kappa}$

Η διαφορά είναι το έργο που κάνει το πεδίο στα άκρα, όπου δεν είναι ομογενές, για να τραβήξει το διηλεκτρικό μέσα

The fringing field at the edges of the capacitor exerts forces \vec{F}_{-i} and \vec{F}_{+i} on the negative and positive induced surface charges of a dielectric, pulling the dielectric into the capacitor.



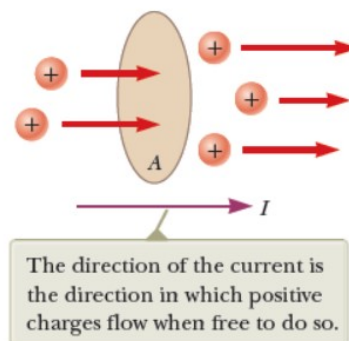
Ηλεκτρικό ρεύμα

Ως ηλεκτρικό ρεύμα ορίζεται η κατά μέσο όρο προσανατολισμένη κίνηση ηλεκτρικών φορτίων. Ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος μέσω μίας επιφάνειας είναι η ποσότητα του ηλεκτρικού φορτίου που τη διαρρέει στη μονάδα του χρόνου :

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος μετριέται σε αμπέρ (A), μια από τις βασικές μονάδες του SI ενώ η μονάδα μέτρησης του ηλεκτρικού φορτίου, το κουλόμπ (C), ορίζεται μέσω του αμπέρ $C \equiv A \cdot s$,

$$[I] = \frac{[Q]}{[t]} \Rightarrow A = \frac{C}{s}$$



Αγωγοί και μονωτές

Υλικά τα οποία επιτρέπουν την διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος ονομάζονται αγωγοί (π.χ. μέταλλα) ενώ αυτά που την εμποδίζουν ονομάζονται μονωτές (π.χ. γυαλί, πλαστικά). Μια τρίτη κατηγορία υλικών είναι οι ημιαγωγοί οι οποίοι είναι μονωτές για κάποιες τιμές της θερμοκρασίας και μετατρέπονται σε αγωγούς όταν η θερμοκρασία ανέβει.

Η ηλεκτρική αγωγιμότητα μπορεί να προσεγγιστεί κλασσικά (για τους αγωγούς) όμως ερμηνεύεται πλήρως για όλα τα υλικά, μόνο κβαντικά.

Φορείς και συμβατική φορά του ρεύματος – Ταχύτητα ολίσθησης

Οι φορείς του ρεύματος μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά φορτισμένα σωματίδια. Στα μέταλλα είναι τα αρνητικά φορτισμένα ελεύθερα ηλεκτρόνια του μετάλλου, στα υδατικά διαλύματα ετεροπολικών ενώσεων (οξέα, βάσεις, άλατα) είναι τόσο τα θετικά φορτισμένα κατιόντα όσο και τα αρνητικά φορτισμένα ανιόντα, ενώ στους ημιαγωγούς είναι είτε τα ηλεκτρόνια είτε οι θετικά φορτισμένες οπές, τέλος στο πλάσμα είναι τόσο τα ηλεκτρόνια όσο και τα θετικά ιόντα.

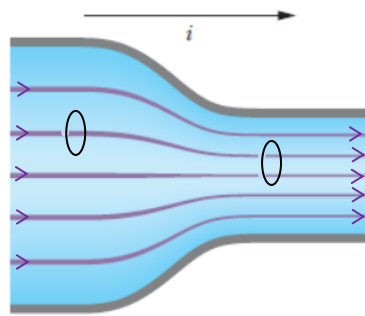
Σε κάθε περίπτωση ως φορά του ρεύματος ορίζεται συμβατικά η φορά κίνησης των θετικά φορτισμένων σωματιδίων.

Κλασσικά θεωρούμε ότι στα μέταλλα στην τυχαία κίνηση των ελεύθερων ηλεκτρονίων τους προστίθεται και μια πολύ μικρότερη αλλά σταθερά προσανατολισμένη κίνηση λόγω ενός ηλεκτρικού πεδίου. Η τελική μέση ταχύτητα θα είναι κατά μέσο όρο παράλληλη με το ηλεκτρικό πεδίο και ονομάζεται ταχύτητα ολίσθησης v_d . Π.χ. στα μέταλλα οι ταχύτητες των ελεύθερων ηλεκτρονίων είναι της τάξης της λεγόμενης ταχύτητας Fermi $v_F = 10^6$ m/s, ενώ η ταχύτητα ολίσθησης είναι της τάξης των $v_d = 10^{-4}$ m/s

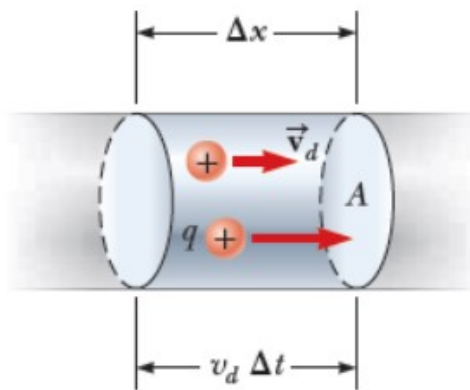
Πυκνότητα ρεύματος

Όταν μας ενδιαφέρει η ροή του ηλεκτρικού φορτίου τοπικά, σε ένα σημείο του αγωγού, χρησιμοποιούμε την πυκνότητα ρεύματος. Η πυκνότητα ρεύματος έχει την φορά της ταχύτητας των θετικών φορτίων και είναι ίση με το ρεύμα που διαρρέει μια μικρή επιφάνεια προς το εμβαδόν της. Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει μια διατομή του αγωγού θα είναι:

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$



Αν n είναι η πυκνότητα (συγκέντρωση) ενός είδους φορέων $n = \frac{N}{V}$, όπου N ο συνολικός αριθμός τους σε όγκο V και τα οποία κινούνται με ταχύτητα ολίσθησης v_d διαρρέοντας μια διατομή εμβαδού A τότε το φορτίο που περνά από την A σε χρονικό διάστημα dt είναι $dQ = qdN = qndV = qnAdx = qnAv_d dt$



και άρα το ηλεκτρικό ρεύμα γράφεται ως

$$I = \frac{dQ}{dt} = qnv_d \cdot A$$

Οπότε η πυκνότητα ρεύματος είναι :

$$J \equiv \frac{I}{A} = nqv_d \quad \text{και} \quad \text{διανυσματικά} \quad \vec{J} = nq\vec{v}_d$$

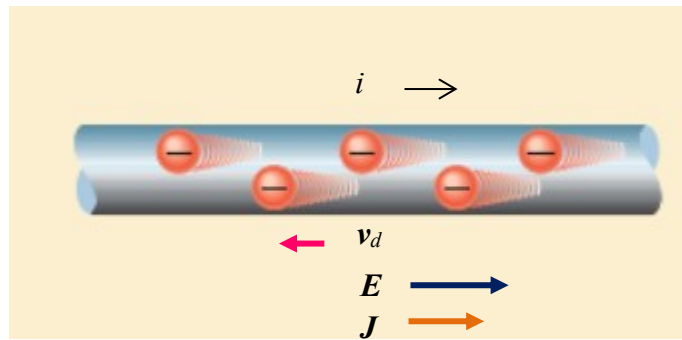
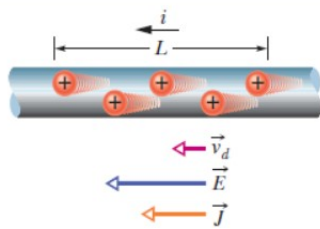
με μονάδες

$$[J] = \frac{A}{m^2}$$

Ενώ αν υπάρχουν πολλών ειδών φορείς (διαφορετικά θετικά και αρνητικά σωματίδια) η συνολική πυκνότητα ρεύματος όλων των φορέων θα είναι $\vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_{d,i}$

Καθώς οι θετικοί φορείς κινούνται προς τη φορά του ηλεκτρικού πεδίου ενώ οι αρνητικοί αντίθετα το γινόμενο $q_i \vec{v}_{d,i}$ θα είναι πάντα θετικό, δηλαδή παράλληλο με το ηλεκτρικό πεδίο $q_i \vec{v}_{d,i} \uparrow \uparrow \vec{E}$.

Current is said to be due to positive charges that are propelled by the electric field.



Νόμος του Ohm

Είναι ένας εμπειρικός κανόνας που ισχύει για ένα μεγάλο εύρος αγωγών και ηλεκτρικών πεδίων και δηλώνει ότι η πυκνότητα ρεύματος που προκαλείται στον αγωγό είναι ανάλογη του ηλεκτρικού πεδίου που έχει δημιουργήσει η πηγή μέσα στον αγωγό:

$$J = \sigma E$$

Η σταθερά αναλογίας σ ονομάζεται συντελεστής αγωγιμότητας του υλικού και το αντίστροφο της συντελεστής ειδικής αντίστασης $\rho = 1/\sigma$. Οι μονάδες μέτρησής τους στο SI είναι :

$$[\sigma] = \frac{S}{m} \text{ (ζήμενος ανά μέτρο),}$$

$$[\rho] = \Omega \cdot m \text{ (ωμόμετρο)}$$

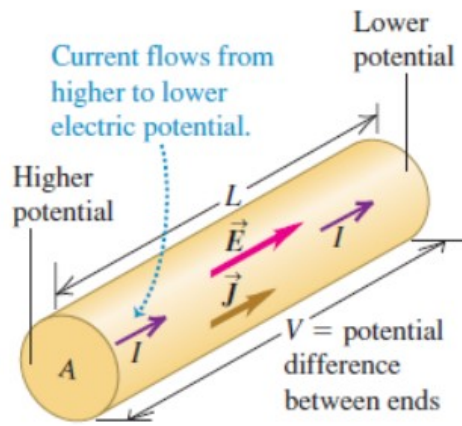
Resistivities at Room Temperature (20°C)

Substance			ρ ($\Omega \cdot m$)	Substance			ρ ($\Omega \cdot m$)	
Conductors				Semiconductors				
Metals				Pure carbon (graphite)				3.5×10^{-5}
	Silver		1.47×10^{-8}	Pure germanium				0.60
	Copper		1.72×10^{-8}	Pure silicon				2300
	Gold		2.44×10^{-8}	Insulators				
	Aluminum		2.75×10^{-8}	Amber				5×10^{14}
	Tungsten		5.25×10^{-8}	Glass				$10^{10} - 10^{14}$
	Steel		20×10^{-8}	Lucite				$> 10^{13}$
	Lead		22×10^{-8}	Mica				$10^{11} - 10^{15}$
	Mercury		95×10^{-8}	Quartz (fused)				75×10^{16}
Alloys			44×10^{-8}	Sulfur				10^{15}
	Manganin (Cu 84%, Mn 12%, Ni 4%)		49×10^{-8}	Teflon				$> 10^{13}$
	Constantan (Cu 60%, Ni 40%)		44×10^{-8}	Wood				$10^8 - 10^{11}$
	Nichrome		100×10^{-8}					

Σε έναν κυλινδρικό μεταλλικό αγωγό η πηγή μαζί με τα ιόντα του πλέγματος δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος του αγωγού. Οι γραμμές του πεδίου ακολουθούν το σχήμα του αγωγού όπως οι γραμμές στρωτής ροής ενός ρευστού σε σωλήνα. Η μορφή του ηλεκτρικού πεδίου διαφέρει ανάλογα με τον τρόπο που συνδέουμε την πηγή στα άκρα του αγωγού. Θα θεωρούμε ότι συνδέεται όπως στο σχήμα *b* ώστε σε έναν κυλινδρικό αγωγό να δημιουργεί ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.



Two ways of applying a potential difference to a conducting rod. The gray connectors are assumed to have negligible resistance. When they are arranged as in (a) in a small region at each rod end, the measured resistance is larger than when they are arranged as in (b) to cover the entire rod end.



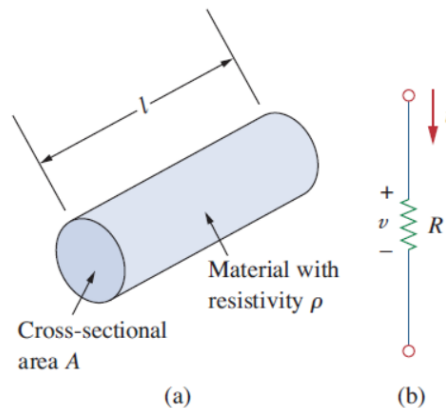
Οπότε ο νόμος του Ohm παίρνει την γνωστή του μορφή

$$E = \rho J \Rightarrow \frac{V}{\ell} = \rho \frac{I}{A} \Rightarrow V = I \cdot \left(\rho \frac{\ell}{A} \right) \Rightarrow V = IR$$

Το μέγεθος:

$$R = \rho \frac{\ell}{A}$$

ονομάζεται ηλεκτρική αντίσταση και μετριέται σε ωμ (Ω) $[R] = V/A = \Omega$



(a) Resistor, (b) Circuit symbol for resistance.

Ο λόγος της τάσης στα άκρα του αγωγού προς το ρεύμα που τον διαρρέει είναι σταθερός:

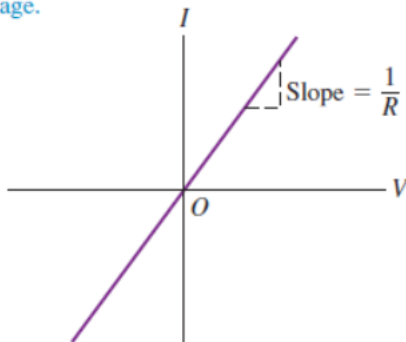
$$R = \frac{V}{I} = \text{σταθ}$$

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει ένα αγωγό είναι ανάλογη της τάσης στα άκρα του αγωγού και αντιστρόφως ανάλογη με την αντίσταση του αγωγού:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{\text{αιτία}}{\text{αντίσταση}}$$

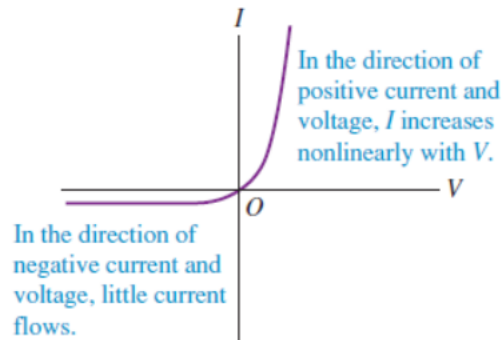
(a)

Ohmic resistor (e.g., typical metal wire): At a given temperature, current is proportional to voltage.



(b)

Semiconductor diode: a nonohmic resistor



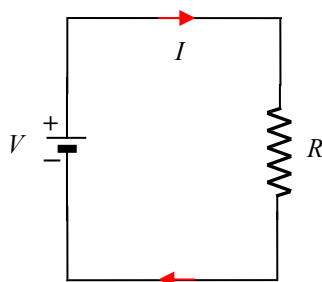
Ο συντελεστής ειδικής αντίστασης και κατά συνέπεια η ηλεκτρική αντίσταση των αγωγών μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία. Η μεταβολή αυτή είναι σε πρώτη προσέγγιση γραμμική και εκφράζεται από τη σχέση :

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

Όπου ρ_0 η ειδική αντίσταση του αγωγού σε μια θερμοκρασία αναφοράς T_0 και α είναι σταθερά που ονομάζεται θερμοκρασιακός συντελεστής, με μονάδες $1/C^\circ$.

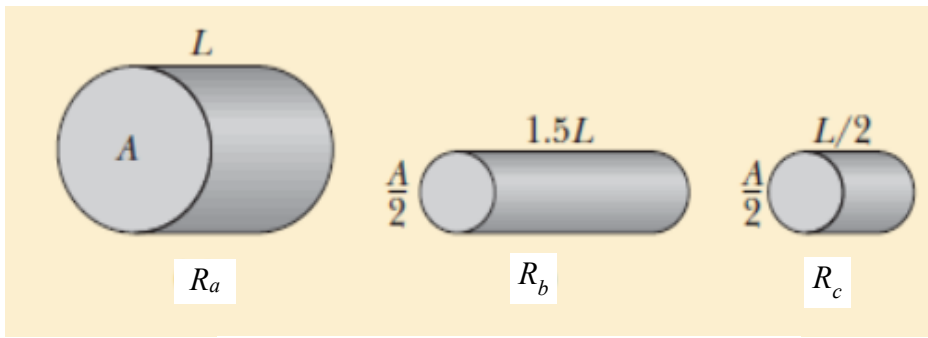
Table 25.2 Temperature Coefficients of Resistivity (Approximate Values Near Room Temperature)

Material	$\alpha [(\text{C}^\circ)^{-1}]$	Material	$\alpha [(\text{C}^\circ)^{-1}]$
Aluminum	0.0039	Lead	0.0043
Brass	0.0020	Manganin	0.00000
Carbon (graphite)	-0.0005	Mercury	0.00088
Constantan	0.00001	Nichrome	0.0004
Copper	0.00393	Silver	0.0038
Iron	0.0050	Tungsten	0.0045



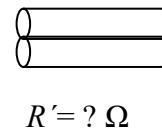
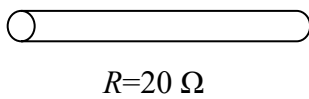
Ο αντιστάτης R λειτουργεί ως βαλβίδα ρυθμίζοντας τη ροή του ρεύματος σε συγκεκριμένη τιμή

$$I = V/R$$



Εφαρμόζεται ίδια τάση V .
 Βάλτε τα ρεύματα σε αύξουσα σειρά
 $I_a \quad I_b \quad I_c$

Το σύρμα του σχήματος έχει αντίσταση 20Ω . Όταν το «διπλώσω» στη μέση, πόση θα γίνει η τιμή της ηλεκτρικής του αντίστασης?



Κλασικό μοντέλο ηλεκτρικής αγωγιμότητας μετάλλων

Το φορτίο q επιταχύνεται από κάποια αρχική τυχαία ταχύτητά του μέχρι να συγκρουστεί με ένα ιόν του πλέγματος όπου χάνει ενέργεια και ξεκινάει από την αρχή να επιταχύνεται. Ο μέσος χρόνος μεταξύ συγκρούσεων συμβολίζεται με τ . Μεταξύ των συγκρούσεων ισχύουν οι κανόνες της ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης από την δύναμη του ηλεκτρικού πεδίου.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{q\vec{E}}{m}t \Rightarrow \text{παίρνοντας χρονικούς μέσους όρους}$$

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_0 \rangle + \frac{q\vec{E}}{m} \langle t \rangle$$

Ταχύτητα ολίσθησης (drift) $\vec{v}_d \equiv \langle \vec{v} \rangle$, η μέση χρονικά ταχύτητα με την οποία κινείται τελικά το φορτίο κατά τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου

Η μέση χρονική τιμή της αρχικής ταχύτητας είναι μηδέν $\langle \vec{v}_0 \rangle = 0$ και $\langle t \rangle = \tau$

Οπότε $\vec{v}_d \equiv \langle \vec{v} \rangle = \frac{q\tau}{m} \vec{E}$

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d = \left(\frac{nq^2\tau}{m} \right) \vec{E}$$

Άρα η ειδική αγωγιμότητα είναι : $\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{nq^2\tau}{m}$

Ηλεκτρικά κυκλώματα

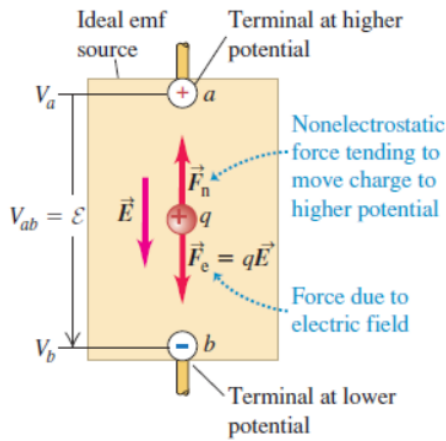
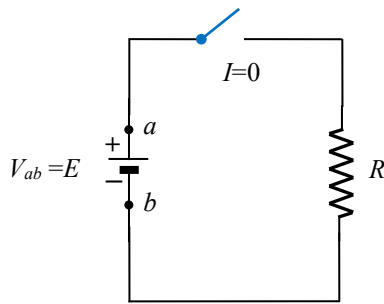
Τερματική τάση ή τάση εξόδου:

$$V_{ab} = V_a - V_b \quad \text{με } V_a \equiv V_+, V_b \equiv V_-$$

Ανοικτό κύκλωμα :

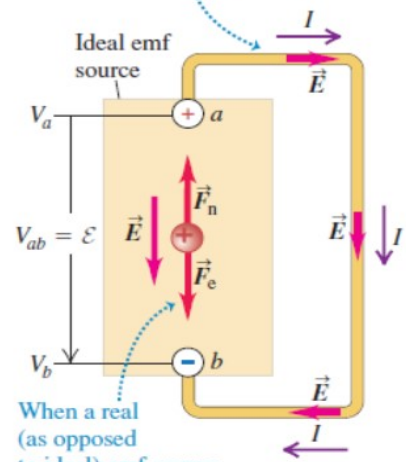
$$V_{ab} = \mathcal{E}$$

Ανοικτό κύκλωμα



When the emf source is not part of a closed circuit, $F_n = F_e$ and there is no net motion of charge between the terminals.

Potential across terminals creates electric field in circuit, causing charges to move.



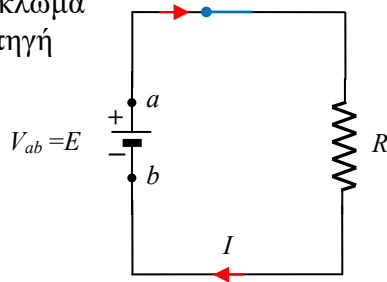
When a real (as opposed to ideal) emf source is connected to a circuit, V_{ab} and thus F_e fall, so that $F_n > F_e$ and F_n does work on the charges.

Κλειστό κύκλωμα

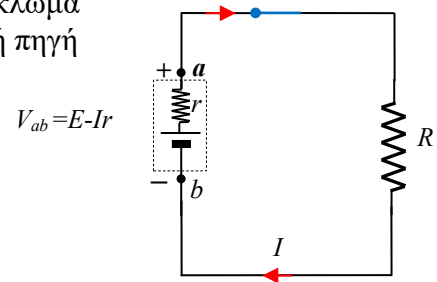
Ιδανική πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης (ΗΕΔ) : $V_{ab} = \mathcal{E} = IR \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R}$

Πραγματική πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης (ΗΕΔ) : $V_{ab} = \mathcal{E} - Ir = IR \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$

Κλειστό κύκλωμα
Ιδανική πηγή



Κλειστό κύκλωμα
Πραγματική πηγή



Ισχύς που παράγει η πηγή : $dW = \mathcal{E} dQ = \mathcal{E} Idt \Rightarrow P \equiv \frac{dW}{dt} = \mathcal{E} I$

Ισχύς που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα: $dW = V_{ab} dQ = V_{ab} Idt \Rightarrow P \equiv \frac{dW}{dt} = V_{ab} I$

Ισχύς σε ωμική αντίσταση : $P = V_{ab} I = I^2 R = \frac{V_{ab}^2}{R}$

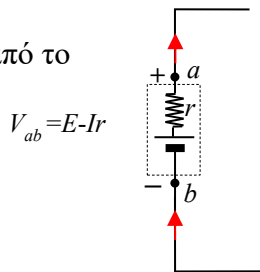
Όταν στα άκρα μιας αντίστασης R εφαρμοστεί διαφορά δυναμικού V καταναλώνει ισχύ $P=2,5$ W. Αν διπλασιαστεί η διαφορά δυναμικού τότε πόση ισχύ καταναλώνει ;

Απάντηση

Επειδή σε ωμικό αντιστάτη η ισχύς εξαρτάται από το τετράγωνο της διαφοράς δυναμικού, όταν το δυναμικό διπλασιαστεί η ισχύς τετραπλασιάζεται

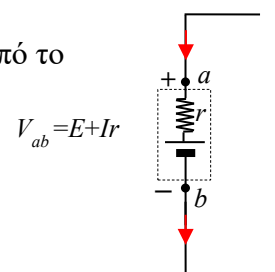
$$P' = \frac{V'^2}{R} = \frac{(2V)^2}{R} = 4 \frac{V^2}{R} = 4P = 4 \cdot 2,5 = 10 \text{ W}$$

Πηγή παρέχει ενέργεια
(εκφόρτιση πηγής)
Το ρεύμα βγαίνει από το θετικό πόλο



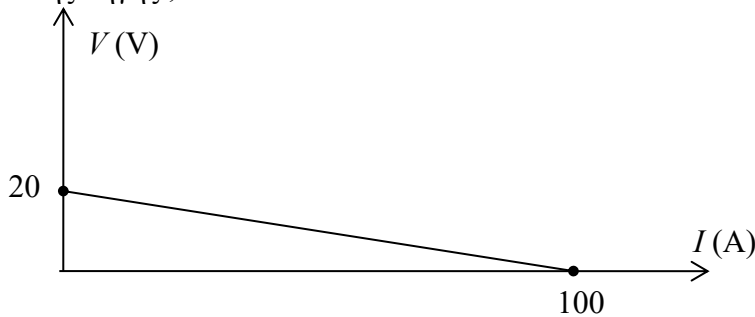
Εκφόρτιση πηγής : $P = V_{ab}I = \mathcal{E} \cdot I - I^2r$

Πηγή καταναλώνει ενέργεια
(φόρτιση πηγής)
Το ρεύμα **μπαίνει** από το θετικό πόλο



Φόρτιση πηγής : $P = V_{ab}I = \mathcal{E} \cdot I + I^2r$

Το παρακάτω είναι η γραφική παράσταση της διαφοράς δυναμικού στα άκρα μιας πραγματικής πηγής συναρτήσει του ρεύματος που τη διαρρέει. Πόση είναι η ηλεκτρεγερτική δύναμη E και η εσωτερική αντίσταση r της πηγής ;



Απάντηση

Η σχέση που συνδέει την πολική τάση της πηγής V με το ρεύμα I που τη διαρρέει είναι γραμμική όπως και η γραφική παράσταση : $V = E - Ir$. Αυτή η σχέση είναι ευθεία με κατηγμένη (τομή με τον κάθετο άξονα) ίση με E και κλίση προς τα κάτω ίση με $-r$.

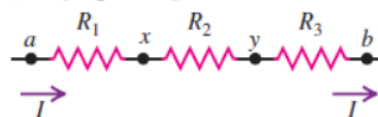
Οπότε από τη γραφική παράσταση «διαβάζουμε» $E=20 \text{ V}$ (V για $I=0$). Η κλίση της ευθείας είναι (από το τριγωνάκι) :

$$\text{κλίση} = \frac{\Delta V}{\Delta I} = \frac{0 - 20}{100 - 0} = -0,2 \frac{\text{V}}{\text{A}} . \text{ Οπότε } r = 0,2 \Omega$$

Συνδυασμοί αντιστάσεων

Σε σειρά

(a) $R_1, R_2,$ and R_3 in series

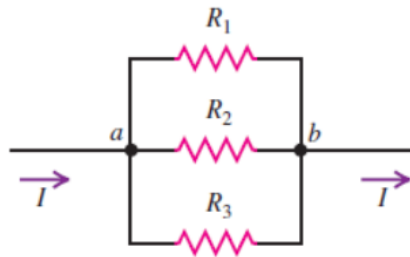


$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} \Rightarrow IR_s = IR_1 + IR_2 + IR_3$$

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

Παράλληλα

(b) $R_1, R_2,$ and R_3 in parallel



$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} \Rightarrow IR_s = IR_1 + IR_2 + IR_3$$

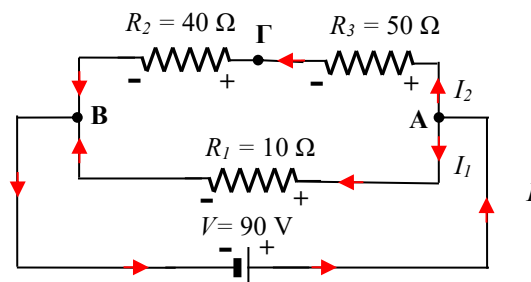
$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

Για δύο αντιστάσεις παράλληλα

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

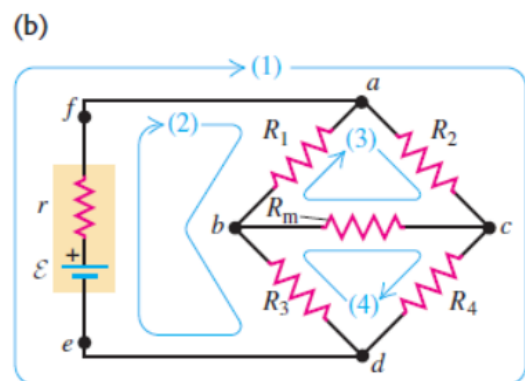
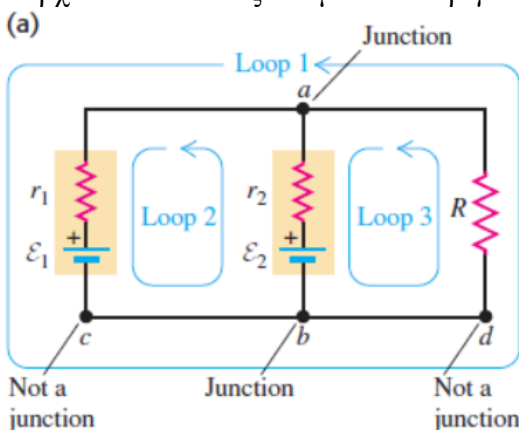
Κανόνες Kirchhoff

Στα κυκλώματα ακολουθούμε ενεργειακή προσέγγιση. Μας ενδιαφέρουν οι διαφορές δυναμικού ανάμεσα στα διάφορα σημεία του και η τιμή του ρεύματος που διαρρέει τον κάθε κλάδο τους.



- $R_{ολ}=?$
- $I=?$
- $I_1=?$
- $I_2=?$
- $V_{ΑΓ}=?$
- $V_{ΓΒ}=?$

Όταν οι συνδυασμοί αντιστάσεων παράλληλα και σειριακά δεν επαρκούν για την εύρεση της ολικής αντίστασης και άρα του συνολικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα και στη συνέχεια των τάσεων κάθε κόμβου και των ρευμάτων κάθε κλάδου, τότε χρησιμοποιούμε τους κανόνες του Kirchhoff. Δύο παραδείγματα είναι τα παρακάτω κυκλώματα όπου είτε υπάρχουν παραπάνω από μια πηγές είτε υπάρχουν αντιστάτες ενωμένοι σε τρίγωνο.



Σε κάθε κόμβο : $\sum_i I_i = 0$ (διατήρηση ηλεκτρικού φορτίου)

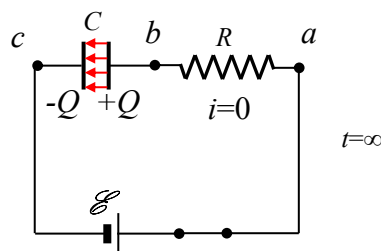
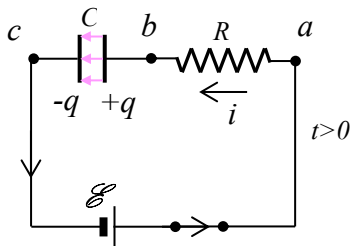
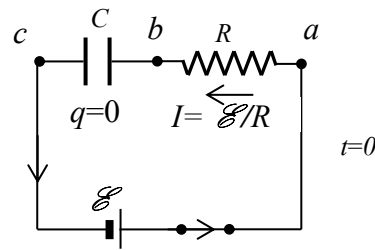
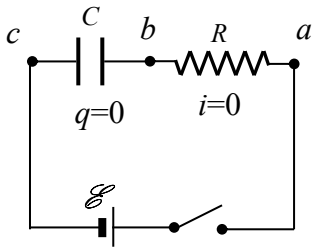
Σε κάθε βρόχο : $\sum_i V_i = 0$ (διατήρηση ηλεκτροστατικής ενέργειας)

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν ένα μεγάλο γραμμικό σύστημα εξισώσεων η λύση του οποίου μας δίνει όλα τα ρεύματα και όλες τις τάσεις στο κύκλωμα. Για την απλοποίηση του συστήματος

υπάρχουν διάφορες μέθοδοι όπως η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων, η μέθοδος των κομβικών ρευμάτων κλπ.

Κύκλωμα RC

Φόρτιση



$$v_{ab} = iR, \quad v_{bc} = \frac{q}{C}, \quad v_{ca} = \mathcal{E}$$

Από 2^ο κανόνα Kirchhoff έχουμε: $v_{ab} + v_{bc} + v_{ca} = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} \Rightarrow$

Επειδή 1) σταθερά χρόνου : $\tau = RC, \quad [RC] = s$

2) για $t=0$: $q=0, \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R}$

3) για $t=\infty$: $q=C \mathcal{E} = Q_f \quad i = 0$

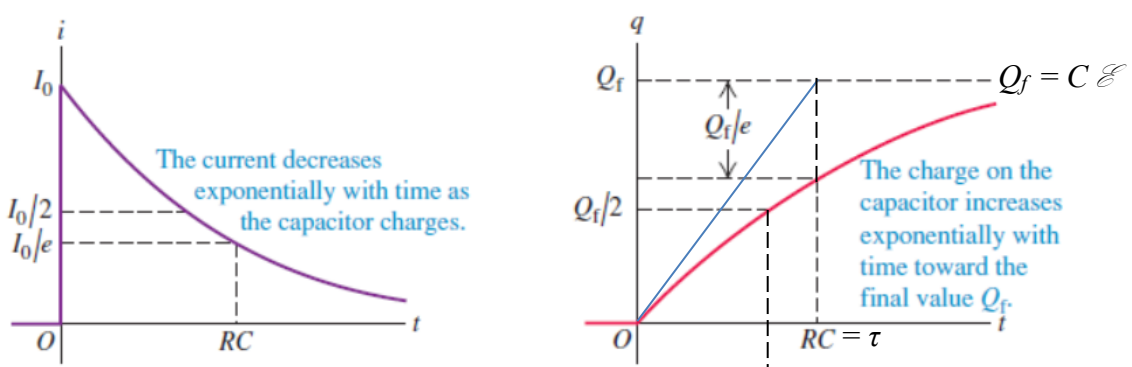
η εξάρτηση των q και i από το χρόνο θα είναι της μορφής :

$$q = Q_f (1 - e^{-t/RC}) \quad \text{και} \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$$

Αναλυτικά με ολοκλήρωση παίρνουμε πράγματι

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} \Rightarrow \frac{d(q - C\mathcal{E})}{dt} = -\frac{(q - C\mathcal{E})}{RC} \Rightarrow \int_{-C\mathcal{E}}^{q-C\mathcal{E}} \frac{d(q - C\mathcal{E})}{(q - C\mathcal{E})} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = e^{-t/RC} \Rightarrow q - C\mathcal{E} = -C\mathcal{E}e^{-t/RC} \Rightarrow q = Q_f(1 - e^{-t/RC})$$



Καμπύλες φόρτισης πυκνωτή $\tau \ln 2$

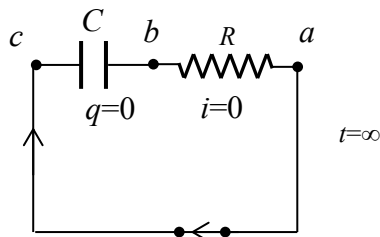
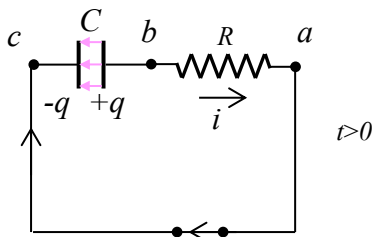
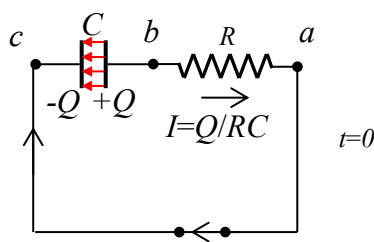
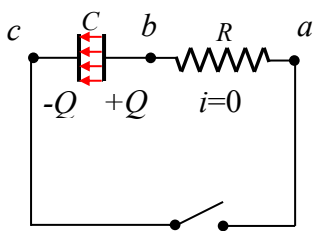
Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας τη χρονική στιγμή μηδέν είναι το ρεύμα τη χρονική στιγμή μηδέν

$$\left. \frac{\Delta q}{\Delta t} \right|_{t=0} = i_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-0/RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Προεκτείνοντας την ευθεία έως την οριζόντια ευθεία του τελικού φορτίου $q=Q_f$ βλέπουμε ότι η χρονική στιγμή που οι δύο ευθείες τέμνονται είναι ίση με τη σταθερά χρόνου $\tau = RC$

$$\left. \frac{\Delta q}{\Delta t} \right|_{t=0} = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow \frac{Q_f - 0}{t_f - 0} = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow \frac{C\mathcal{E}}{t_f} = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow t_f = CR = \tau$$

Εκφόρτιση



Από 2^ο κανόνα Kirchhoff έχουμε: $v_{ab} + v_{bc} = 0 \Rightarrow iR + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow i = -\frac{q}{RC}$

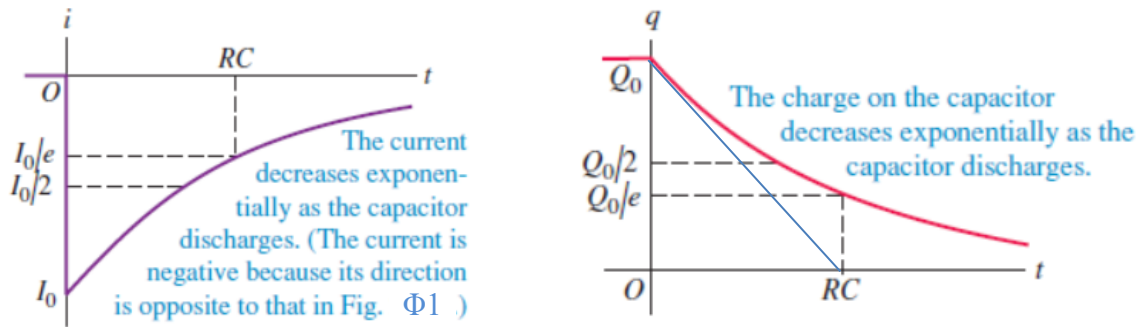
- Επειδή
- 1) για $t=0$: $q=Q_0, \quad i = -\frac{Q_0}{RC}$
 - 2) για $t=\infty$: $q=0, \quad i = 0$

η εξάρτηση των q και i από το χρόνο θα είναι της μορφής :

$$q = Q_0 e^{-t/RC} \quad \text{και} \quad i = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

Αναλυτικά με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \Rightarrow \int_0^q \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{RC} \Rightarrow \ln\left(\frac{q}{Q_0}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow q = Q_0 e^{-t/RC}$$



Καμπύλες εκφόρτισης πυκνωτή

Ενέργεια

Το τελικό φορτίο του πυκνωτή είναι : $Q_f = C\mathcal{E}$. Η ενέργεια που παρείχε η πηγή κατά την φόρτιση ήταν $U_{\mathcal{E}} = Q_f \mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$ αφού μετακίνησε φορτίο Q_f μεταξύ διαφοράς δυναμικού \mathcal{E} . Η ενέργεια που αποθηκεύτηκε στον πυκνωτή : $U_C = \frac{1}{2} Q_f \mathcal{E} = \frac{U_{\mathcal{E}}}{2}$, άρα αναλώθηκε στην αντίσταση

$U_R = U_{\mathcal{E}} - U_C = U_{\mathcal{E}} - \frac{U_{\mathcal{E}}}{2} = \frac{U_{\mathcal{E}}}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$ η μισή από την ενέργεια που παρείχε η πηγή ανεξαρτήτως της τιμής της αντίστασης.

Οι ρυθμοί αποθήκευσης ενέργειας στον πυκνωτή και ανάλωσης στην αντίσταση (ισχύς) γίνονται ίσοι τη χρονική στιγμή $t_{1/2} = \ln 2 \cdot RC$. Αυτό είναι και το σημείο όπου η καμπύλη φόρτισης q vs. t συμπίπτει με τη καμπύλη εκφόρτισης : $q_{\text{φορτ}}(t) = q_{\text{εκφορτ}}(t)$, όπου το αρχικό φορτίο της εκφόρτισης είναι το τελικό φορτίο της φόρτισης $Q_0 = Q_f$

$$P_C = P_R \Rightarrow i v_C = i^2 R \Rightarrow i \frac{q}{C} = i^2 R \Rightarrow \frac{q}{C} = i R \Rightarrow \frac{1}{C} C\mathcal{E} (1 - e^{-t/RC}) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} R \Rightarrow$$

$$1 - e^{-t/RC} = e^{-t/RC} \Rightarrow 1 = 2e^{-t/RC} \Rightarrow e^{t/RC} = 2 \Rightarrow t = RC \ln 2$$

Η τιμή του φορτίου αυτή τη στιγμή είναι το μισό του τελικού (ή αρχικού)

$$\text{Φόρτιση : } q = Q_f (1 - e^{-\ln 2 RC/RC}) = Q_f (1 - e^{-\ln 2}) = Q_f \left(1 - \frac{1}{e^{\ln 2}}\right) = Q_f \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{Q_f}{2}$$

$$\text{Εκφόρτιση : } q = Q_f e^{-\ln 2 RC/RC} = Q_f e^{-\ln 2} = \frac{Q_f}{e^{\ln 2}} = \frac{Q_f}{2}$$

$$q_{\text{φορτ}}(t_{1/2}) = q_{\text{εκφορτ}}(t_{1/2}) = \frac{Q_f}{2}$$

