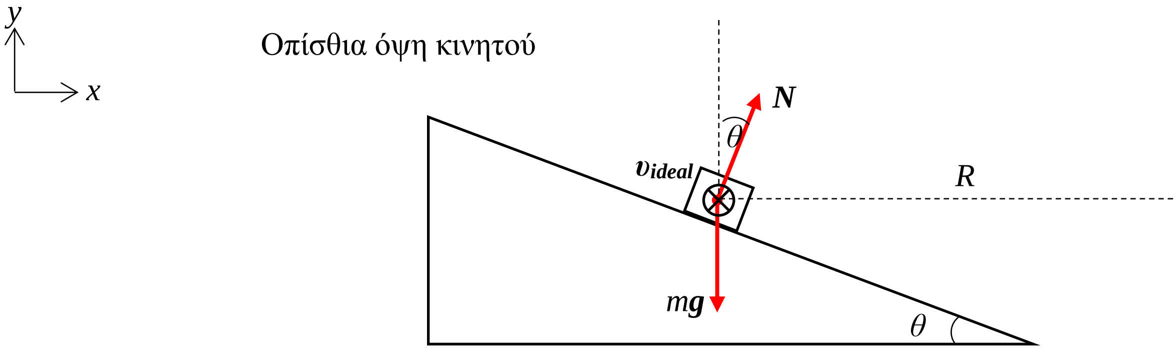
Όρια ταχύτητας και στατική τριβή στην κεκλιμένη στροφή

Ιδανική ταχύτητα για ασφάλεια - Χωρίς στατική τριβή $f_s = 0$



$$\sum F_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\theta = m\frac{\upsilon_{ideal}^2}{R} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow N\cos\theta = mg \qquad (2)$$

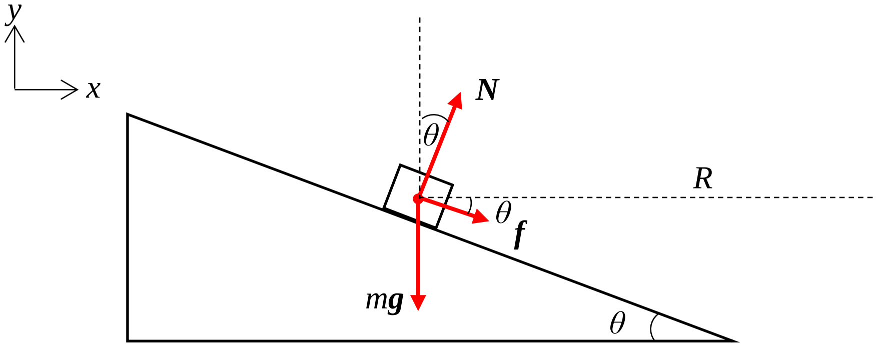
Διαιρώντας (1) διά (2)

$$\frac{N\sin\theta}{N\sin\theta} = \frac{m\upsilon_{ideal}^2 / R}{mg} \Rightarrow \upsilon_{ideal}^2 = gR\tan\theta$$

$$\upsilon_{ideal} = \sqrt{gR\tan\theta}$$

$$N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Μέγιστη ταχύτητα – Στατική τριβή προς τα κάτω $f = \mu N$



$$\sum F_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\theta + f\cos\theta = m\frac{\upsilon^2}{R} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\theta - f\sin\theta - mg = 0 \qquad (2)$$

Όσο αυξάνεται η ταχύτητα αυξάνονται και οι δυνάμεις που παρέχουν την κεντρομόλο δύναμη N και f. Η ταχύτητα θα γίνει μέγιστη όταν η στατική τριβή θα φτάσει στη μέγιστη επιτρεπτή τιμή της $f = \mu N$

$$N\sin\theta + \mu N\cos\theta = m\frac{\upsilon_{\max}^2}{R} \Rightarrow N(\sin\theta + \mu\cos\theta) = m\frac{\upsilon_{\max}^2}{R} \qquad (1)$$

$$N\cos\theta - \mu N\sin\theta - mg = 0 \Rightarrow N(\cos\theta - \mu\sin\theta) = mg \qquad (2)$$

Διαιρώντας την (1) με την (2))

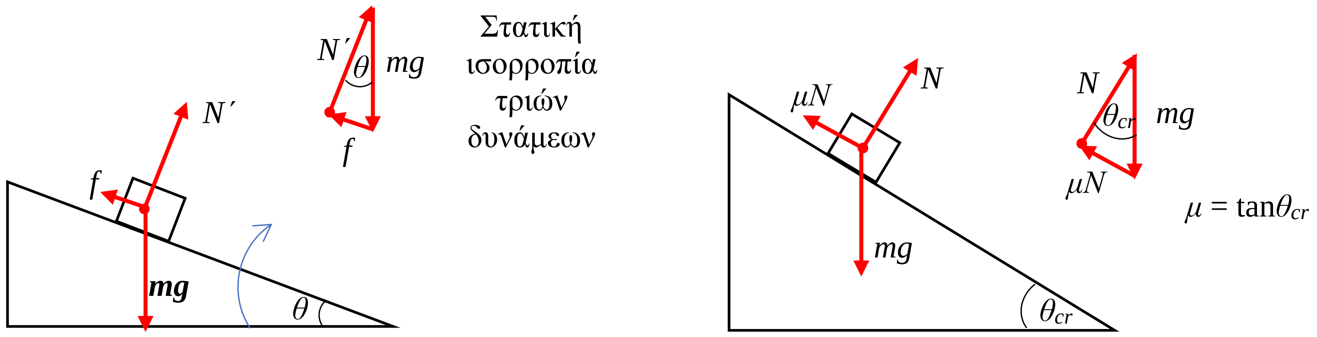
$$\frac{m\frac{\upsilon^2}{R}}{mg} = \frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta} \Rightarrow \upsilon_{\max}^2 = gR\frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta} = gR\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}$$

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{gR\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}}$$

$$N_{\max} = \frac{mg}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$$

Κρίσιμη γωνία για στατική ισορροπία

Η μέγιστη ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί και συναρτήσει της μέγιστης γωνίας θ_{cr} (κρίσιμη γωνία) πέραν της οποίας ένα ακίνητο σώμα θα αρχίσει να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο. Δηλαδή τη μέγιστη γωνία στην οποία έχω στατική ισορροπία και η στατική τριβή παίρνει τη μέγιστη τιμή της $f = \mu N$.



Η κρίσιμη γωνία είναι ίση με : $\mu = \tan\theta_{cr}$

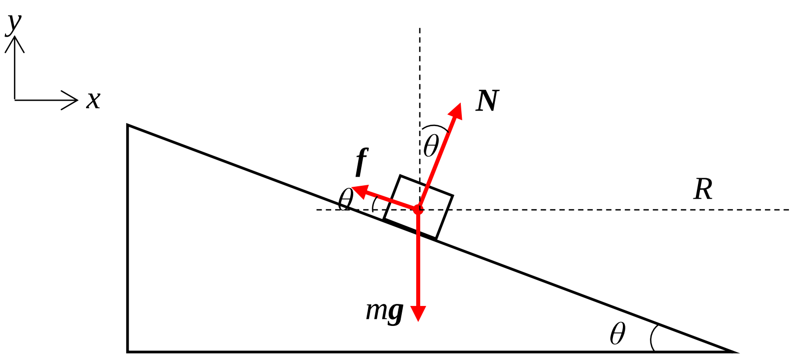
Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα της εφαπτομένης του αθροίσματος/διαφοράς γωνιών

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

παίρνουμε

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{gR\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}} = \sqrt{gR\frac{\tan\theta + \tan\theta_{cr}}{1 - \tan\theta_{cr}\tan\theta}} \Rightarrow \upsilon_{\max} = \sqrt{gR\tan(\theta + \theta_{cr})}$$

Ελάχιστη ταχύτητα – Στατική τριβή προς τα πάνω $f = \mu N$



$$\sum F_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\theta - f\cos\theta = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N(\sin\theta - \mu\cos\theta) = m\frac{\upsilon_{\min}^2}{R} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\theta + f\sin\theta - mg = 0 \Rightarrow N(\cos\theta + \mu\sin\theta) = mg \qquad (2)$$

Διαιρώντας

$$\frac{m\frac{\upsilon_{\min}^2}{R}}{mg} = \frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta} \Rightarrow \upsilon_{\min}^2 = gR\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta} \Rightarrow$$

$$\upsilon_{\min} = \sqrt{gR\frac{\tan\theta - \mu}{1 + \mu\tan\theta}} = \sqrt{gR\tan(\theta - \theta_{cr})}$$

$$N_{\min} = \frac{mg}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

Υπολογισμός των μέτρων των N και f ($f < \mu N$), για ταχύτητα στο διάστημα $\upsilon_{ideal} < \upsilon < \upsilon_{\max}$, τριβή προς τα κάτω

$$\sum F_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\theta + f\cos\theta = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\theta = m\frac{\upsilon^2}{R} - f\cos\theta \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\theta - f\sin\theta - mg = 0 \Rightarrow N\cos\theta = mg + f\sin\theta \qquad (2)$$

Διαιρώ (1) δια (2)

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{m\frac{\upsilon^2}{R} - f\cos\theta}{mg + f\sin\theta} \Rightarrow mg\sin\theta + f\sin^2\theta = m\frac{\upsilon^2}{R}\cos\theta - f\cos^2\theta \Rightarrow$$

$$f(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = m\frac{\upsilon^2}{R}\cos\theta - mg\frac{R}{R}\sin\theta \Rightarrow f = \frac{m\cos\theta}{R}(\upsilon^2 - gR\tan\theta) \Rightarrow$$

$$f = \frac{m\cos\theta}{R}(\upsilon^2 - \upsilon_{ideal}^2)$$

Με ορίζουσες

$$f\cos\theta + N\sin\theta = m\frac{\upsilon^2}{R} \qquad (1)$$

$$-f\sin\theta + N\cos\theta = mg \qquad (2)$$

$$D = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$D_f = \begin{vmatrix} m\upsilon^2/R & \sin\theta \\ mg & \cos\theta \end{vmatrix} = m\frac{\upsilon^2}{R}\cos\theta - mg\sin\theta = \frac{m\cos\theta}{R}\left(\upsilon^2 - \frac{gR\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{m\cos\theta}{R}\left(\upsilon^2 - gR\tan\theta\right) =$$

$$= \frac{m\cos\theta}{R}(\upsilon^2 - \upsilon_{safe}^2)$$

$$f = \frac{D_f}{D} = \frac{m\cos\theta}{R}(\upsilon^2 - \upsilon_{safe}^2)$$

$$D_N = \begin{vmatrix} \cos\theta & m\upsilon^2/R \\ -\sin\theta & mg \end{vmatrix} = mg\cos\theta + m\frac{\upsilon^2}{R}\sin\theta = \frac{m\sin\theta}{R}\left(\upsilon^2 + gR\cot\theta\right)$$

$$N = \frac{m\sin\theta}{R}\left(\upsilon^2 + gR\cot\theta\right)$$

Άσκηση άλγεβρας: Επιβεβαιώστε ότι $f < \mu N$

Υπολογισμός των μέτρων των *N* και *f* ($f < \mu N$), για ταχύτητα στο διάστημα $\upsilon_{\min} < \upsilon < \upsilon_{ideal}$, τριβή προς τα πάνω

$$\sum F_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\theta - f\cos\theta = m\frac{\upsilon^2}{R} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\theta + f\sin\theta = mg \qquad (2)$$

$$D = \begin{vmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$D_N = \begin{vmatrix} m\upsilon^2/R & -\cos\theta \\ mg & \sin\theta \end{vmatrix} = m\frac{\upsilon^2}{R}\sin\theta + mg\cos\theta = \frac{m\sin\theta}{R}\left(\upsilon^2 + gR\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{m\sin\theta}{R}\left(\upsilon^2 + gR\cot\theta\right)$$

$$N = \frac{D_N}{D} == \frac{m\sin\theta}{R}\left(\upsilon^2 + gR\cot\theta\right)$$

$$D_f = \begin{vmatrix} \sin\theta & m\upsilon^2/R \\ \cos\theta & mg \end{vmatrix} = mg\sin\theta - m\frac{\upsilon^2}{R}\cos\theta = \frac{m\cos\theta}{R}\left(gR\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \upsilon^2\right) = \frac{m\cos\theta}{R}\left(gR\tan\theta - \upsilon^2\right)$$

$$f = \frac{D_f}{D} = \frac{m\cos\theta}{R}(\upsilon_{ideal}^2 - \upsilon^2)$$

Τι συμβαίνει με τα αεροπλάνα?

Δεν υπάρχει τριβή. Η τριβή είναι διατμητική δύναμη και τα ρευστά δεν ασκούν διατμητικές δυνάμεις. Το αεροπλάνο μπορεί να στρίψει χωρίς να χρησιμοποιήσει το πηδάλιο του αν περιστραφεί (roll) γύρω από τον επιμήκη άξονά του. Τότε θα το στρίψει ή οριζόντια συνιστώσα της άντωσης (lift). Όμως ταυτόχρονα πρέπει και να αυξήσει ταχύτητα για να αυξηθεί η άντωση επειδή η κατακόρυφη συνιστώσα της άντωσης πρέπει να συνεχίσει να σηκώνει το βάρος του αεροπλάνου.

Οπίσθια όψη αεροπλάνου