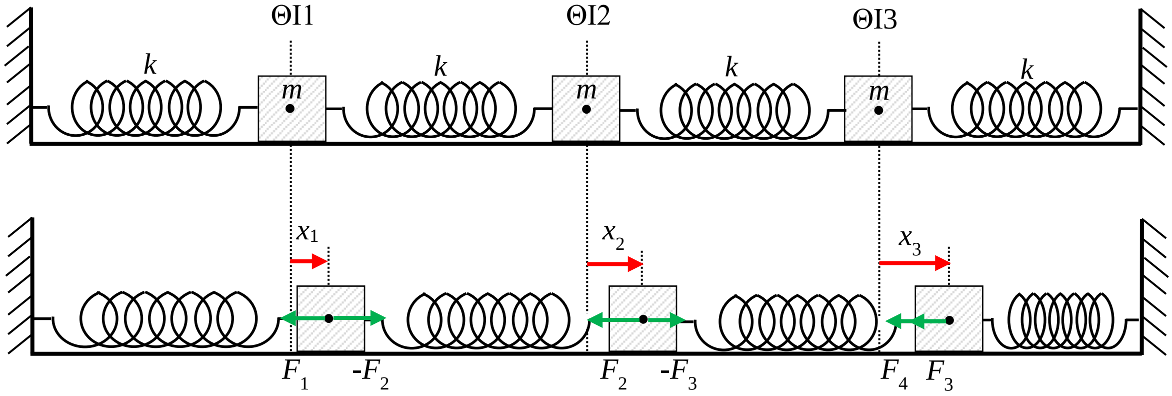
ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΤΡΙΩΝ ΙΣΩΝ ΜΑΖΩΝ

Αμείωτες ταλαντώσεις



Μετατοπίσεις των μαζών από το σημείο ισορροπίας τους : x_1, x_2, x_3

Μετατοπίσεις των τοίχων : $x_0 = 0 = x_4$

Δυνάμεις ελατηρίων :

$F_1 = -k\Delta\ell_1 = -kx_1$, $F_2 = -k\Delta\ell_2 = -k(x_2 - x_1)$, $F_3 = -k\Delta\ell_3 = -k(x_3 - x_2)$, $F_4 = -k\Delta\ell_4 = -kx_3$

Συνισταμένες δυνάμεις στις μάζες :

$$F_{net1} = F_1 - F_2 = -kx_1 - (-k(x_2 - x_1)) = -2kx_1 + kx_2 = kx_0 - 2kx_1 + kx_2$$

$$F_{net2} = F_2 - F_3 = -k(x_2 - x_1) - (-k(x_3 - x_2)) = kx_1 - 2kx_2 + kx_3$$

$$F_{net3} = F_3 + F_4 = -k(x_3 - x_2) - kx_3 = kx_2 - 2kx_3 = kx_2 - 2kx_3 + kx_4$$

Γενίκευση : $F_{net\ n} = kx_{n-1} - 2kx_n + kx_{n+1}$

Νόμοι Νεύτωνα ($F_{net\ i} = ma_i = m\ddot{x}_i$):

$$-2kx_1 + kx_2 = m\ddot{x}_1 \Rightarrow \quad -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 = \ddot{x}_1 \Rightarrow \quad \omega_0^2(-2x_1 + x_2) = \ddot{x}_1$$

$$kx_1 - 2kx_2 + kx_3 = m\ddot{x}_2 \Rightarrow \quad \omega_0^2 x_1 - 2\omega_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_3 = \ddot{x}_2 \Rightarrow \quad \omega_0^2(x_1 - 2x_2 + x_3) = \ddot{x}_2$$

$$kx_2 - 2kx_3 = m\ddot{x}_3 \Rightarrow \quad \omega_0^2 x_2 - 2\omega_0^2 x_3 = \ddot{x}_3 \Rightarrow \quad \omega_0^2(x_2 - 2x_3) = \ddot{x}_3$$

με $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Γενίκευση : $m\ddot{x}_n = kx_{n-1} - 2kx_n + kx_{n+1} \Rightarrow \ddot{x}_n = \omega_0^2(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1})$

Νόμοι Νεύτωνα σε μορφή πίνακα : $-\omega_0^2 KX = \ddot{X} \Rightarrow \omega_0^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

με $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ και $-K = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ συμμετρικός (ονομάζεται πίνακας στιβαρότητας).

Δοκιμαστική λύση : $X(t) = \begin{pmatrix} A_1 e^{i\omega t} \\ A_2 e^{i\omega t} \\ A_3 e^{i\omega t} \end{pmatrix} = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = e^{i\omega t} A$, Παράγωγος $\frac{d^2}{dt^2}X(t)=\frac{d^2(e^{i\omega t})}{dt^2}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}=(i\omega)^2e^{i\omega t}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}=-\omega^2e^{i\omega t}A=-\omega^2X(t)$

Αντικαθιστώ :

$$-\omega_0^2KX=-\omega^2X\Rightarrow\omega_0^2\begin{pmatrix}-2&1&0\\1&-2&1\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}e^{i\omega t}=-e^{i\omega t}\omega^2\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}$$

Όπου θέσαμε : $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}=\lambda$

Αυτή δεν είναι παρά η εξίσωση ιδιοτιμών του *K*.

Άρα το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των ιδιοτιμών του πίνακα $K=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$

Γενίκευση για *n* μάζες : η εύρεση των ιδιοτιμών του τριδιαγώνιου πίνακα

$$K=\begin{pmatrix}2&-1&0&0&0&\cdots&0\\-1&2&-1&0&0&\cdots&0\\0&-1&2&-1&0&\cdots&0\\0&0&-1&2&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&2&-1\\0&0&0&\cdots&0&-1&2\end{pmatrix}\qquad n\text{x}n$$

Για μεγάλο αριθμό μαζών αυτό δεν μπορεί να γίνει πλέον με το χέρι και πρέπει να προγραμματιστεί σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο :

$$P_K(\lambda)=\det(K-\lambda I)=\begin{pmatrix}2-\lambda&-1&0\\-1&2-\lambda&-1\\0&-1&2-\lambda\end{pmatrix}=(2-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2-\lambda&-1\\-1&2-\lambda\end{vmatrix}+(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&-1\\0&2-\lambda\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$P_K(\lambda)=(2-\lambda)\left\lfloor(2-\lambda)^2-1\right\rfloor+(-1)(2-\lambda)=(2-\lambda)\left\lfloor(2-\lambda)^2-2\right\rfloor=(2-\lambda)\left(2-\lambda-\sqrt{2}\right)\left(2-\lambda+\sqrt{2}\right)$$

Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου είναι η ορίζουσα του *K*:

$$\det K=2\cdot\ (2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=2\left(2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)=4$$

Χαρακτηριστική εξίσωση :

$$P_K(\lambda)=0\Rightarrow\ \det(K-\lambda I)=0\Rightarrow\ (\lambda-2)\left(\lambda-2+\sqrt{2}\right)\left(\lambda-2-\sqrt{2}\right)=0$$

Οπότε οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυχνότητες είναι :

$$\lambda_1=2-\sqrt{2}\Rightarrow\ \omega_1=\pm\omega_0\sqrt{\lambda_1}=\pm\omega_0\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\lambda_2=2\Rightarrow\ \omega_2=\pm\omega_0\sqrt{\lambda_2}=\pm\omega_0\sqrt{2}$$

$$\lambda_3=2+\sqrt{2}\Rightarrow\ \omega_1=\pm\omega_0\sqrt{\lambda_3}=\pm\omega_0\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Για να βρούμε τα ιδιοανύσματα πρέπει να λύσουμε τα 3 ομογενή γραμμικά συστήματα 3x3

$$Ku_i = \lambda_i u_i \Rightarrow (K - \lambda_i I)u_i = 0 \qquad i = 1,2,3$$

για τα οποία γνωρίζουμε ότι έχουν άπειρες λύσεις (αφού η ορίζουσές τους είναι μηδέν)

1ο σύστημα, $\lambda_1 = 2-\sqrt{2}$, $u_1 = ?$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda_1 & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-(2-\sqrt{2}) & -1 & 0 \\ -1 & 2-(2-\sqrt{2}) & -1 \\ 0 & -1 & 2-(2-\sqrt{2}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sqrt{2}A_1 - A_2 = 0 \\ -A_1 + \sqrt{2}A_2 - A_3 = 0 \\ -A_2 + \sqrt{2}A_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_1 = A_2/\sqrt{2} \\ -A_2/\sqrt{2} + \sqrt{2}A_2 - A_2/\sqrt{2} = 0 \\ A_3 = A_2/\sqrt{2} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} A_1 = A_3 = A_2/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}A_2 - 2A_2/\sqrt{2} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_1 = A_3 = A_2/\sqrt{2} \\ 0\cdot\ A_2 = 0 \end{matrix}$$

Άρα A_2 απροσδιόριστο οπότε το θέτω ίσο με $A_2 = \sqrt{2}$ και παίρνω $A_1 = A_3 = 1$

Έτσι το 1ο ιδιοάνυσμα είναι το : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ (καθώς και όλα τα πολλαπλάσιά του), το οποίο έχει μέτρο

$|u_1|^2 = u_1^T u_1 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1 = 4 \Rightarrow |u_1| = 2$ και άρα το κανονικοποιημένο ιδιοάνυσμα είναι :

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{|u_1|}u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

2ο σύστημα $\lambda_2 = 2$, $u_2 = ?$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda_2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -A_2 = 0 \\ -A_1 - A_3 = 0 \\ -A_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_3 = -A_1 \\ A_2 = 0 \end{matrix}$$

Άρα A_1 απροσδιόριστο οπότε το θέτω ίσο με $A_1 = 1$ και παίρνω $A_3 = -1$

Έτσι το 2ο ιδιοάνυσμα είναι το $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (καθώς και όλα τα πολλαπλάσιά του), το οποίο έχει μέτρο

$|u_2|^2 = u_2^T u_2 = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2 \Rightarrow |u_2| = \sqrt{2}$ και άρα το κανονικοποιημένο ιδιοάνυσμα είναι :

$$\hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3ο σύστημα, $\lambda_2 = 2+\sqrt{2}$, $u_2 = ?$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_3 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda_3 & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-(2+\sqrt{2}) & -1 & 0 \\ -1 & 2-(2+\sqrt{2}) & -1 \\ 0 & -1 & 2-(2+\sqrt{2}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -\sqrt{2}A_1 - A_2 = 0 \\ -A_1 - \sqrt{2}A_2 - A_3 = 0 \\ -A_2 - \sqrt{2}A_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_1 = -A_2/\sqrt{2} \\ A_2/\sqrt{2} - \sqrt{2}A_2 + A_2/\sqrt{2} = 0 \\ A_3 = -A_2/\sqrt{2} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} A_1 = A_3 = -A_2/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}A_2 + 2A_2/\sqrt{2} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_1 = A_3 = -A_2/\sqrt{2} \\ 0\cdot\ A_2 = 0 \end{matrix}$$

Άρα A_2 απροσδιόριστο, οπότε το θέτω ίσο με $A_2 = -\sqrt{2}$ και παίρνω $A_1 = A_3 = 1$

Έτσι το 3ο ιδιοάνυσμα είναι το $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ (καθώς και όλα τα πολλαπλάσιά του), το οποίο έχει μέτρο

$|u_3|^2 = u_3^T u_3 = 1^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1 = 4 \Rightarrow |u_3| = 2$ και άρα το κανονικοποιημένο ιδιοάνυσμα είναι :

$$\hat{u}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ό,τι τα ιδιοανύσματα $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του διανυσματικού χώρου των διανυσμάτων με τρεις πραγματικές συνιστώσες R^3:

$$\hat{u}_i^T \hat{u}_i = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3$$

$$\forall A \in R^3 \exists c_i \in R: \qquad A = c_1\hat{u}_1 + c_2\hat{u}_2 + c_3\hat{u}_3$$

Καθένα από αυτά τα ιδιοανύσματα, επί τη χρονική του εξάρτηση, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με την δικιά του συχνότητα:

$$u_i(t) = (c_i e^{i\omega_i t} + \bar{c}_i e^{-i\omega_i t})\hat{u}_i = A_i \sin(\omega t + \varphi_i)\hat{u}_i$$

και αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης : $\ddot{u}_i(t) + \omega_0^2 K u_i(t) = 0$

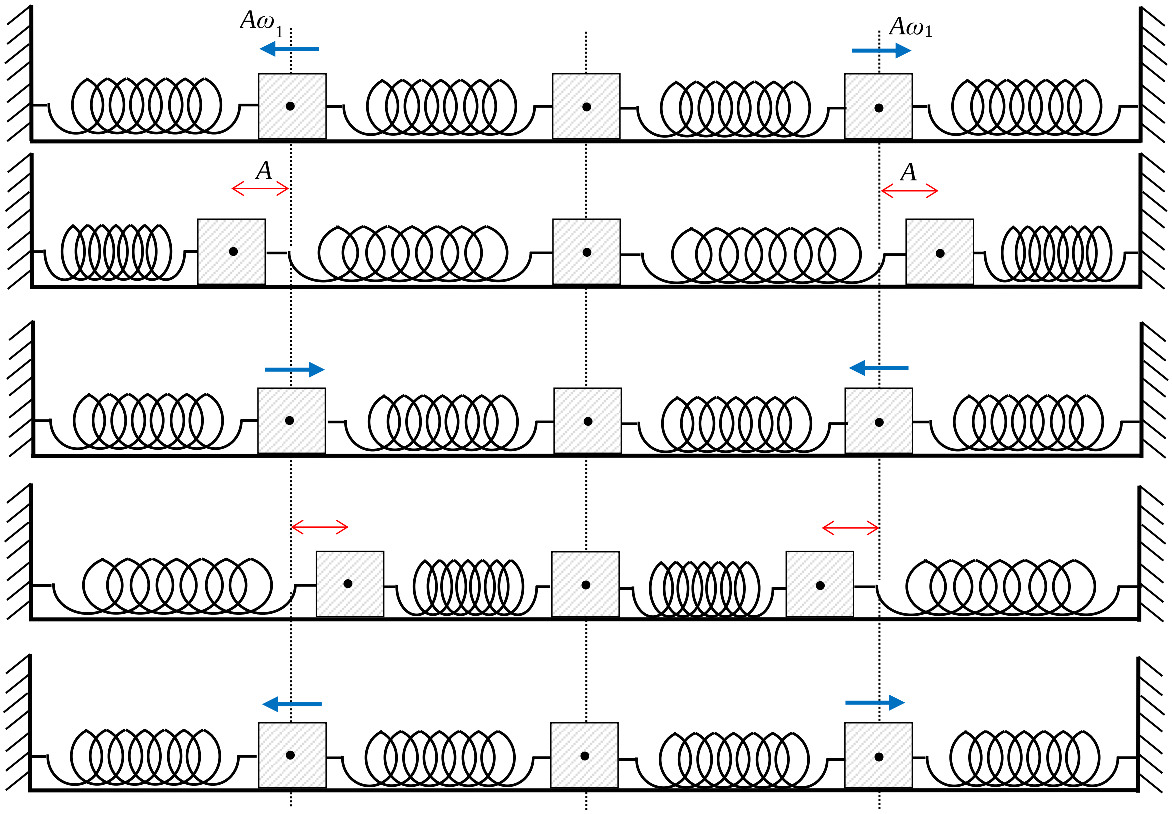
Οι συνιστώσες των διανυσμάτων $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ καθορίζουν τα σχετικά μεγέθη των πλατών των απλών αρμονικών ταλαντώσεων που εκτελούν οι τρεις μάζες, όλες με την ίδια συχνότητα.

Οι τρεις ανεξάρτητες απλές αρμονικές ταλαντώσεις $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$, ονομάζονται **κανονικοί τρόποι ταλάντωσης**.

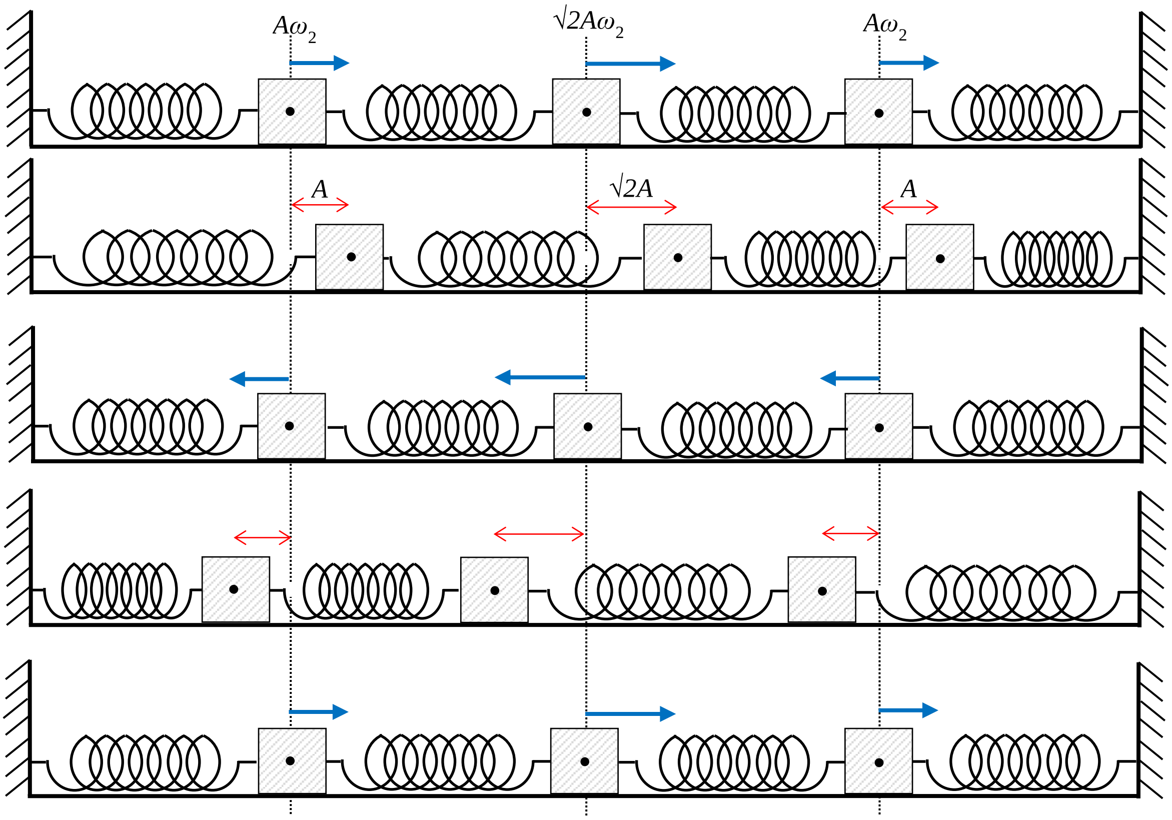
Κανονικός τρόπος ταλάντωσης : κοινή συχνότητα ταλάντωσης των μαζών
+ σχετικά πλάτη ταλάντωσης

Άρα τρεις συζευγμένες μάζες, έχουν τρεις κανονικούς τρόπους ταλάντωσης που πραγματοποιούνται με 3 συχνότητες, την αργή (slow) $\omega_s \equiv \omega_1 = \omega_0\sqrt{2-\sqrt{2}}$, την ενδιάμεση (middle) $\omega_m \equiv \omega_2 = \omega_0\sqrt{2}$ και την γρήγορη (fast) $\omega_m \equiv \omega_2 = \omega_0\sqrt{2+\sqrt{2}}$ και είναι οι εξής :

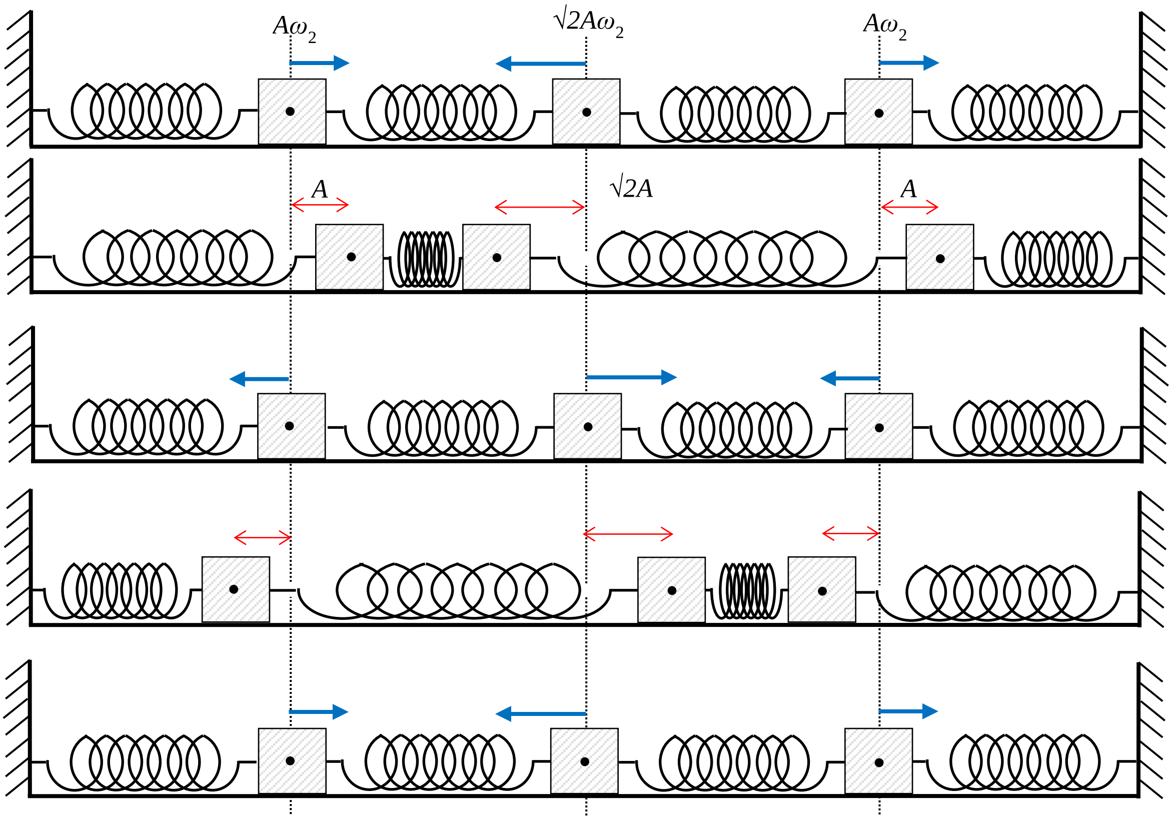
2ο τρόπος με την ενδιάμεση συχνότητα : Η μεσαία μάζα μένει διαρκώς ακίνητη (άρα ισοδυναμεί με ακίνητο τοίχο) οπότε οι δύο ακριανές μάζες ταλαντώνονται κάθε στιγμή προς αντίθετες κατευθύνσεις (διαφορά φάσης π) με ίσα πλάτη και με συχνότητα που προκύπτει από την ισοδύναμη σταθερά ελατηρίου $\kappa = k + k = 2k$ του παράλληλου συνδυασμού των δύο ίδιων ελατηρίων που τραβάνε την καθεμία $\omega = \sqrt{\kappa/m} = \sqrt{2k/m} = \omega_0\sqrt{2} = \omega_s$



1ος τρόπος με την αργή συχνότητα : και οι τρεις μάζες ταλαντώνονται προς την ίδια κατεύθυνση, οι ακριανές με ίσα πλάτη A και η μεσαία με μεγαλύτερο πλάτος ίσο με $A\sqrt{2}$ (άρα και με μεγαλύτερη ταχύτητα), κυνηγώντας μια τη μάζα στα δεξιά της και μια τη μάζα στα αριστερά της



$3^{ος}$ τρόπος με την γρήγορη συχνότητα : Οι ακριανές μάζες ταλαντώνονται κάθε στιγμή προς την ίδια κατεύθυνση, με ίσα πλάτη A ενώ η μεσαία προς την αντίθετη κατεύθυνση με μεγαλύτερο πλάτος ίσο με $A\sqrt{2}$ (άρα και με μεγαλύτερη ταχύτητα). Συνεπώς η μεσαία μάζα μία φορά κινείται προς κατά μέτωπο σύγκρουση με τη μάζα στα αριστερά της και την άλλη κινείται προς κατά μέτωπο σύγκρουση με τη μάζα στα δεξιά της.



Η γενικότερη λύση της διαφορικής εξίσωσης για τις εξισώσεις κίνησης των μαζών $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$, θα είναι μια σύνθετη ταλάντωση που προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (που είναι απλές αρμονικές ταλαντώσεις)

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\left(C_s e^{i\omega_s t} + \bar{C}_s e^{-i\omega_s t}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\left(C_m e^{i\omega_m t} + \bar{C}_m e^{-i\omega_m t}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\left(C_f e^{i\omega_f t} + \bar{C}_f e^{-i\omega_f t}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} A_s \sin\left(\omega_s t + \varphi_s\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} A_m \sin\left(\omega_m t + \varphi_m\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} A_f \sin\left(\omega_f t + \varphi_f\right)$$

όπου οι σταθερές C_i ή A_i προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες x_{0i}, υ_{0i}.

Επιβεβαιώνουμε ότι ο πίνακας $D = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \end{pmatrix}$ που έχει ως στήλες τα κανονικοποιημένα ιδιοανύσματα του πίνακα K τον διαγωνιοποιεί (η κανονικοποίηση δεν είναι απαραίτητη αλλά θα την χρησιμοποιήσουμε για να έχουμε την απλούστερη μορφή του D).

$$D = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} = D^T$$, παρατηρούμε ότι είναι συμμετρικός

$$|D| = \det D = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1)^{1+2}(-1) \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Κατασκευάζουμε τον $\mathrm{adj}D$ που είναι ο ανάστροφος του αλγεβρικού συμπληρώματος του D υπολογίζοντας όλες τις υποορίζουσες 2x2 D_{ij} : $\mathrm{adj}D_{ij} = (-1)^{i+j} |D_{ji}|$

$$D^{-1} = \frac{\mathrm{adj}D}{|D|} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} +(-1/2) & -(1/\sqrt{2}) & +(-1/2) \\ -(1/\sqrt{2}) & +(0) & -(1/\sqrt{2}) \\ +(-1/2) & -(-1/\sqrt{2}) & +(-1/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} = D^T = D$$

Βλέπουμε ότι ο πίνακας D είναι ορθογώνιος, δηλαδή ο αντίστροφός του είναι ίσος με τον ανάστροφό του

$$D^{-1} = D^T$$

Πίνακες που είναι μετασχηματισμοί συντεταγμένων από μια ορθοκανονική βάση σε μια άλλη ορθοκανονική βάση θα είναι πάντα ορθογώνιοι. Εδώ η αρχική βάση ήταν η

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{με } e_i^T e_j = \delta_{ij}, \quad \text{ενώ η τελική βάση είναι η}$$

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{u}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

Στην περίπτωση μας ο πίνακας όχι μόνο είναι ορθογώνιος αλλά επειδή ήταν και συμμετρικός, ο αντίστροφός του συμπίπτει με τον ίδιο τον πίνακα

$$D^{-1} = D^T = D \Rightarrow DD = I$$

Αυτό είναι μια ιδιαιτερότητα της περίπτωσης μας όπου όλες οι μάζες είναι ίσες με m και όλες οι σταθερές των ελατηρίων ίσες με k και δεν θα ίσχυε αν οι σταθερές ήταν διαφορετικές.

$$\Lambda = D^{-1}KD \underset{\text{ορθογώνιος}}{=} D^T KD \underset{\text{συμμετρικός}}{=} DKD = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Επιβεβαιώστε το

Προσθήκη απόσβεσης

Η προσθήκη απόσβεσης σε κάθε μάζα, ανάλογης με την ταχύτητα της, δεν προσθέτει κάτι καινούργιο στη γραμμική άλγεβρα του προβλήματος εύρεσης των εξισώσεων κίνησης κάθε μάζας.

Η συνισταμένη δύναμη σε κάθε μάζα θα είναι τώρα : $F_{net\ i} = kx_{i-1} - 2kx_i + kx_{i+1} - b\dot{x}_i$.

Εξισώνουμε με $m\ddot{x}_i$ και παίρνουμε για την κάθε μάζα : $m\ddot{x}_i + b\dot{x}_i + k(-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}) = 0$.

Το σύστημα εξισώσεων είναι τώρα : $M\ddot{X}(t) + B\dot{X}(t) + KX(t) = 0 \Rightarrow KX(t) = -M\ddot{X}(t) - B\dot{X}(t)$

με $X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}=mI$, $B=\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}=bI$, $K=k\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Επειδή και ο πίνακας απόσβεσης *B* είναι διαγώνιος και ανάλογος με την μονάδα *I*, όπως ο πίνακας μάζας *M*, δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής $X(t)=e^{zt}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}=e^{zt}A$, καταλήγουμε πάλι στην εξίσωση ιδιοτιμών και ιδιοανυσμάτων του πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ τα οποία ήδη γνωρίζουμε. Πράγματι, θέτοντας κατά τα γνωστά $\omega_0=\sqrt{k/m}$ και $\beta=b/2m$ παίρνουμε

$$KX(t)=-M\ddot{X}(t)-B\dot{X}(t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}e^{zt}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}\frac{d^2(e^{zt})}{dt^2}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\frac{d(e^{zt})}{dt}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ke^{zt}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}=-mz^2e^{zt}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}-bze^{zt}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_0^2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}=-z^2\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}-2z\beta\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}=-\left(\frac{z^2+2z\beta}{\omega_0^2}\right)\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

που είναι η εξίσωση ιδιοτιμών του πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Άρα οι ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του (κανονικοί τρόποι ταλάντωσης) με απόσβεση θα είναι ίδια με την αμείωτη ταλάντωση :

$$\lambda_1=2-\sqrt{2}\,,\quad u_1=\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},\qquad \lambda_2=2\,,\quad u_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\qquad \lambda_3=2+\sqrt{2}\,,\quad u_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Αυτό που θα αλλάξει θα είναι οι «συχνότητες» z_i οι οποίες υπολογίζονται από τις εξισώσεις :
$-\left(\frac{z_i^2+2z_i\beta}{\omega_0^2}\right)=\lambda_i\Rightarrow z_i^2+2z_i\beta+\lambda_i\omega_0^2=0\Rightarrow z_{\pm i}=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\lambda_i\omega_0^2}=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_i^2}$, όπου ω_i είναι οι ιδιοσυχνότητες των αμείωτων κανονικών τρόπων ταλάντωσης $\omega_i=\omega_0\sqrt{\lambda_i}$:

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{k}{m}} \equiv \omega_s\,,$$

$$\omega_2 = \omega_0\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \equiv \omega_m\,,$$

$$\omega_3 = \omega_0\sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\frac{k}{m}} \equiv \omega_f$$

Ορίζουμε τις συχνότητες με απόσβεση $\Omega_i = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_i^2\right|}$:

$$\Omega_1 = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_1^2\right|} = \sqrt{\left|\frac{b^2}{4m^2} - \left(2-\sqrt{2}\right)\frac{k}{m}\right|} \equiv \Omega_s$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_2^2\right|} = \sqrt{\left|\frac{b^2}{4m^2} - \frac{2k}{m}\right|} \equiv \Omega_m$$

$$\Omega_3 = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_3^2\right|} = \sqrt{\left|\frac{b^2}{4m^2} - \left(2+\sqrt{2}\right)\frac{k}{m}\right|} \equiv \Omega_f$$

Η χρονική εξάρτηση των λύσεων θα εξαρτάται από τη θέση του β ανάμεσα στις $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ (7 περιπτώσεις)

1) $\beta < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$: και οι τρεις τρόποι είναι φθίνουσες ταλαντώσεις

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\beta t}\left(C_1 e^{i\Omega_1 t} + \bar{C}_1 e^{-i\Omega_1 t}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\beta t}\left(C_2 e^{i\Omega_2 t} + \bar{C}_2 e^{-i\Omega_2 t}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\beta t}\left(C_3 e^{i\Omega_3 t} + \bar{C}_3 e^{-i\Omega_3 t}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\beta t} A_1 \sin\left(\Omega_1 t + \varphi_1\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\beta t} A_2 \sin\left(\Omega_2 t + \varphi_2\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\beta t} A_3 \sin\left(\Omega_3 t + \varphi_3\right)\end{aligned}$$

2) $\beta = \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$: ο 1ος τρόπος είναι κρίσιμη απόσβεση και οι άλλοι δύο φθίνουσες ταλαντώσεις

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\beta t}\left(A_1 + B_1 t\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\beta t} A_2 \sin\left(\Omega_2 t + \varphi_2\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\beta t} A_3 \sin\left(\Omega_3 t + \varphi_3\right)$$

3) $\omega_1 < \beta < \omega_2 < \omega_3$: ο 1ος τρόπος είναι υπεραπόσβεση και οι άλλοι δύο φθίνουσες ταλαντώσεις

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \left(A_+ e^{-(\beta+\Omega_1)t} + A_- e^{-(\beta-\Omega_1)t}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\beta t} A_2 \sin\left(\Omega_2 t + \varphi_2\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\beta t} A_3 \sin\left(\Omega_3 t + \varphi_3\right)$$

4) $\omega_1 < \beta = \omega_2 < \omega_3$: ο 1ος τρόπος είναι υπεραπόσβεση, ο 2ος κρίσιμη απόσβεση και ο 3ος φθίνουσα ταλάντωση

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \left(A_+ e^{-(\beta+\Omega_1)t} + A_- e^{-(\beta-\Omega_1)t} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\beta t} \left(A_2 + B_2 t \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\beta t} A_3 \sin\left(\Omega_3 t + \varphi_3 \right)$$

Αναλόγως γράφονται και οι υπόλοιπες 3 περιπτώσεις

5) $\omega_1 < \omega_2 < \beta < \omega_3$: 1ος =υπεραπόσβεση, 2ος =υπεραπόσβεση, 3ος =φθίνουσα ταλάντωση

6) $\omega_1 < \omega_2 < \beta = \omega_3$: 1ος =υπεραπόσβεση, 2ος =υπεραπόσβεση, 3ος =κρίσιμη απόσβεση

7) $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \beta$: 1ος =υπεραπόσβεση, 2ος =υπεραπόσβεση, 3ος =υπεραπόσβεση

Βλέπουμε ότι κάθε λύση τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν. Πρακτικά μετά από ικανό χρονικό διάστημα, μετά από μερικές σταθερές χρόνου $\tau = 1/\beta = 2m/b$, οι μάζες σταματούν να κινούνται. Η όποια κίνση σβήνει και οι μάζες επιστρέφουν και ισορροπούν στα σημεία ισορροπίας τους : $x_i(t) \to 0$ για μεγάλα $t >> \tau$.

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

Έστω ότι εφαρμόζουμε περιοδική αρμονική δύναμη στην πρώτη μάζα ώστε η ταλάντωση να μην σβήσει. Οι εξισώσεις μας τώρα γίνονται :

$m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + k(2x_1 - x_2) = F \sin \omega t$ (ε1)

$m\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + k(-x_1 + 2x_2 - x_3) = 0$ (ε2)

$m\ddot{x}_3 + b\dot{x}_3 + k(-x_2 + 2x_3) = 0$ (ε3)

και σε μορφή πίνακα

$$M\ddot{X}(t) + B\dot{X}(t) + KX(t) = F(t)$$

με:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} = mI,\ B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = bI,\ K = k\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ F(t) = \begin{pmatrix} F\sin \omega t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη γνώση των ιδιοανυσμάτων ώστε να ορίσουμε νέες μεταβλητές που να ικανοποιούν μη συζευγμένες εξισώσεις.

Αφαιρούμε τις εξισώσεις 1 και 3 και ορίζουμε $q_2(t) = x_1(t) - x_3(t)$

$m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + k(2x_1 - x_2) - m\ddot{x}_3 - b\dot{x}_3 - k(-x_2 + 2x_3) = F \sin \omega t \Rightarrow$

$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + 2k(x_1 - x_3) = F \sin \omega t \Rightarrow m\ddot{q}_2 + b\dot{q}_2 + 2kq_2 = F \sin \omega t \Rightarrow$

$$\boxed{\ddot{q}_2 + 2\beta\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \gamma \sin \omega t}$$

με $\omega_2^2 = 2k/m = \lambda_2 \omega_0^2$, $\beta = b/2m$, $\gamma = F/m$

Αυτή είναι μια εξίσωση εξαναγκασμένης ταλάντωσης για το q_2 από αρμονική δύναμη κυκλικής συχνότητας ω η οποία δεν είναι συζευγμένη με άλλες μεταβλητές. Λύνεται από μόνη της. Η γενική της λύση είναι η λύση της ομογενούς της προηγούμενης ενότητας συν τη μερική λύση που πρέπει να μαντέψουμε. Η μερική λύση όμως ξέρουμε πλέον ότι είναι

$$\boxed{q_2(t) = A_2(\omega)\sin(\omega t - \delta_2) = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_{r2}^2)^2 + 4\beta^2\Omega_2^2}}\sin(\omega t - \delta_2)\,,}$$

με $\omega_{r2} = \omega_2^2 - 2\beta^2$, $\Omega_2 = \omega_2^2 - \beta^2$

Στη συνέχεια παίρνουμε το συνδυασμό εξισώσεων $\varepsilon_1 + \sqrt{2}\varepsilon_2 + \varepsilon_3$ και ορίζουμε τη νέα μεταβλητή $q_1(t) = x_1(t) + \sqrt{2}x_2(t) + x_3(t)$

$$m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + k(2x_1 - x_2) + m\sqrt{2}\ddot{x}_2 + b\sqrt{2}\dot{x}_2 + k\sqrt{2}(-x_1 + 2x_2 - x_3) + m\ddot{x}_3 + b\dot{x}_3 + k(-x_2 + 2x_3) = F\sin\omega t \Rightarrow$$
$$m(\ddot{x}_1 + \sqrt{2}\dot{x}_2 + \ddot{x}_3) + b(\dot{x}_1 + \sqrt{2}\dot{x}_2 + \dot{x}_3) + k(2x_1 - x_2 + x_3 - \sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3 - x_2 + 2x_3) = F\sin\omega t$$

Όμως

$$2x_1 - x_2 + x_3 - \sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3 - x_2 + 2x_3 = (2-\sqrt{2})x_1 + (-2+2\sqrt{2})x_2 + (2-\sqrt{2})x_3 =$$
$$= (2-\sqrt{2})x_1 + (2-\sqrt{2})\sqrt{2}x_2 + (2-\sqrt{2})x_3 = (2-\sqrt{2})(x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3) = (2-\sqrt{2})q_1$$

Οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$\ddot{q}_1 + 2\beta\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \gamma\sin\omega t$$

και η μερική της λύση είναι :

$$\boxed{q_1(t) = A_1(\omega)\sin(\omega t - \delta_1) = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_{r1}^2)^2 + 4\beta^2\Omega_1^2}}\sin(\omega t - \delta_1)}$$

με $\omega_{r1} = \omega_1^2 - 2\beta^2$, $\Omega_1 = \omega_1^2 - \beta^2$

Μπορείτε πλέον να μαντέψετε ποιος θα είναι ο τρίτος συνδυασμός των $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ που θα μας δώσει την 3η εξίσωση για μια νέα μεταβλητή q_3 που δεν θα είναι συζευγμένη με τις q_1, q_2. Θα είναι ο συνδυασμός που έχει συντελεστές τις συνιστώσες του 3[ου] ιδιοανύσματος του K : $q_3(t) = x_1(t) - \sqrt{2}x_2(t) + x_3(t)$ και θα ικανοποιεί την εξίσωση που προκύπτει από τον γραμμικό συνδυασμό των εξισώσεων $\varepsilon_1 - \sqrt{2}\varepsilon_2 + \varepsilon_3$:

$$\ddot{q}_3 + 2\beta\dot{q}_3 + \omega_1^2 q_3 = \gamma\sin\omega t \qquad \textbf{(επιβεβαιώστε το)}$$

Η μερική λύση θα είναι επίσης της ίδιας μορφής

$$\boxed{q_3(t) = A_3(\omega)\sin(\omega t - \delta_3) = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_{r3}^2)^2 + 4\beta^2\Omega_3^2}}\sin(\omega t - \delta_3)}$$

με $\omega_{r3}^2 = \omega_3^2 - 2\beta^2$, $\Omega_3^3 = \omega_3^2 - \beta^2$

Από τα $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ βρίσκουμε στη συνέχεια τα $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$. Εδώ ισχύει :
$x_1(t) \propto q_1(t) + \sqrt{2}q_2(t) + q_3(t)$, $x_2(t) \propto q_1(t) - q_3(t)$, $x_3(t) \propto q_1(t) - \sqrt{2}q_2(t) + q_3(t)$
(επαληθεύστε το και βρείτε τους συντελεστές αναλογίας)

Ουσιαστικά αυτό που κάναμε είναι να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα D που διαγωνιοποιεί τον K για να αποσυζεύξουμε τις εξισώσεις.

Για τον πίνακα D βρήκαμε : $D = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} = D^T = D^{-1}$ και

$$D^{-1}KD = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Σε μορφή πίνακα οι συζευγμένες εξισώσεις ε_1, ε_2, ε_3 είναι :

$$M\ddot{X}(t) + B\dot{X}(t) + KX(t) = F(t)$$

με:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} = mI,\ B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = bI,\ K = k\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ F(t) = \begin{pmatrix} F\sin\omega t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Οι εξισώσεις είναι συζευγμένες επειδή ο K δεν είναι διαγώνιος. Μπορούμε να τον διαγωνιοποιήσουμε χωρίς να εμπλέξουμε το υπόλοιπο μέρος της εξίσωσης επειδή οι άλλοι δύο πίνακες M και B είναι ανάλογοι της μονάδας (διαγώνιοι με ίσα στοιχεία) και άρα μετατίθενται στον πολλαπλασιασμό με κάθε άλλο πίνακα A : $MA = mIA = mAI = AmI = AM$, $BA = bIA = bAI = AbI = AB$. Αλλιώς θα έπρεπε να διαγωνιοποιούνται από τον ίδιο πίνακα D (αυτό συμβαίνει για δύο πίνακες όταν μετατίθενται στον μεταξύ τους πολλαπλασιασμό).

Ορίζουμε τις νέες μεταβλητές

$$X(t) = DQ(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix} \Rightarrow Q(t) = D^{-1}X(t) = DX(t)$$

$$\dot{X}(t) = D\dot{Q}(t), \quad \ddot{X}(t) = D\ddot{Q}(t)$$

Ως προς τις νέες μεταβλητές οι εξισώσεις αποσυζεύγνεινται, δηλαδή η εξίσωση πινάκων είναι ισοδύναμη με μια εξίσωση πινάκων όπου όλοι οι πίνακες είναι διαγώνιοι

$$M\ddot{X}(t) + B\dot{X}(t) + KX(t) = F(t) \underset{\substack{\text{αντικατάσταση} \\ X=DQ}}{\Rightarrow} MD\ddot{Q}(t) + BD\dot{Q}(t) + KDQ(t) = F(t) \Rightarrow$$

$$\underset{\substack{\text{μεταθετικότητα } M, B \\ MD=DM,\ BD=DB}}{\Rightarrow} DM\ddot{Q}(t) + DB\dot{Q}(t) + KDQ(t) = F(t) \Rightarrow$$

$$\underset{\substack{\text{πολλαπλασιασμός} \\ \text{από αριστερά με } D^{-1}}}{\Rightarrow} D^{-1}DM\ddot{Q}(t) + D^{-1}DB\dot{Q}(t) + D^{-1}KDQ(t) = D^{-1}F(t) \Rightarrow$$

$$M\ddot{Q}(t) + B\dot{Q}(t) + \Lambda Q(t) = D^{-1}F(t) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ \ddot{q}_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F\sin\omega t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} m\ddot{q}_1(t) + b\dot{q}_1(t) + k\lambda_1 q_1(t) \\ m\ddot{q}_2(t) + b\dot{q}_2(t) + k\lambda_2 q_2(t) \\ m\ddot{q}_3(t) + b\dot{q}_3(t) + k\lambda_3 q_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} F\sin\omega t \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{q}_1(t) + 2\beta\dot{q}_1(t) + \omega_1^2 q_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) + 2\beta\dot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) \\ \ddot{q}_3(t) + 2\beta\dot{q}_3(t) + \omega_3^2 q_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \sin\omega t$$

Όπου διαιρέσαμε με τη μάζα m και ως συνήθως : $\omega_i^2 = \lambda_i k/m = \lambda_i \omega_0^2$, $\beta = b/2m$ και $\gamma_1 = \gamma_3 = F/2m$, $\gamma_2 = F/\sqrt{2}m$. Αυτές είναι τρεις ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις εξαναγκασμένης ταλάντωσης (γραμμικές μη ομογενείς) των οποίων τις μερικές λύσεις γνωρίζουμε :

$$q_i(t) = A_i(\omega)\sin(\omega t - \delta_i) = \frac{\gamma_i}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_{ri}^2)^2 + 4\beta^2\Omega_i^2}}\sin(\omega t - \delta_i)$$

Λύνοντας για τις μετατοπίσεις των μαζών παίρνουμε :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[q_1(t) + \sqrt{2}q_2(t) + q_3(t)] \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[q_1(t) - q_3(t)] \\ \frac{1}{2}[q_1(t) - \sqrt{2}q_2(t) + q_3(t)] \end{pmatrix}$$

Άρα η γενική λύση της μόνιμης κατάστασης (αφού η μεταβατική θα έχει μηδενιστεί) θα είναι

$$x_1(t) = \frac{A_s(\omega)}{2}\sin(\omega t - \delta_s) + \frac{A_m(\omega)}{\sqrt{2}}\sin(\omega t - \delta_m) + \frac{A_f(\omega)}{2}\sin(\omega t - \delta_f)$$

$$x_2(t) = \frac{A_s(\omega)}{\sqrt{2}}\sin(\omega t - \delta_s) - \frac{A_f(\omega)}{\sqrt{2}}\sin(\omega t - \delta_f)$$

$$x_3(t) = \frac{A_s(\omega)}{2}\sin(\omega t - \delta_s) - \frac{A_m(\omega)}{\sqrt{2}}\sin(\omega t - \delta_m) + \frac{A_f(\omega)}{2}\sin(\omega t - \delta_f)$$

Όπου αλλάξαμε συμβολισμό από 1,2,3 σε *s,m,f* (slow, medium, fast) για τις συχνότητες. Οι διαφορές στα ημίτονα είναι στις αρχικές φάσεις. Όλα έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα *ω*, οπότε κάθε έκφραση μπορεί να έρθει στη μορφή $x_i(t) = C_i(\omega)\sin(\omega t + \varphi_i(\omega))$

Οι μάζες θα εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις με τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης και με πλάτη που εξαρτώνται από τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης αφού:

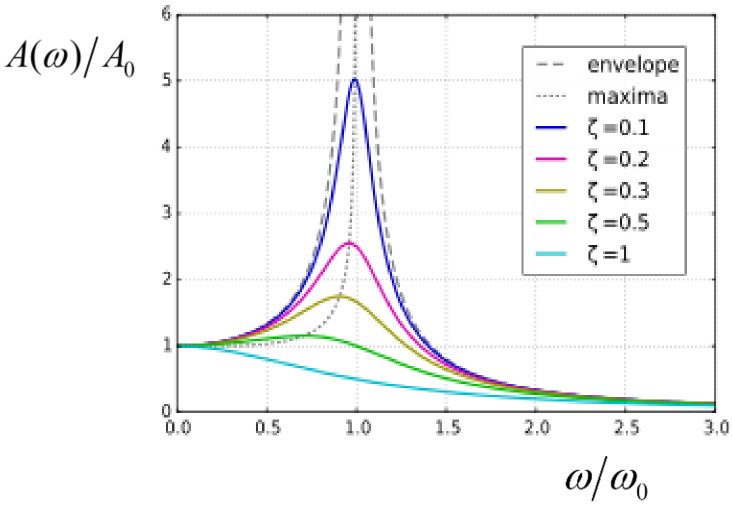
$$A_s(\omega) = \frac{F/2m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_{rs}^2)^2 + 4\beta^2\Omega_s^2}} \qquad \text{με } \omega_{r1}^2 = \omega_s^2 - 2\beta^2 \text{ και } \Omega_s^2 = \omega_s^2 - \beta^2$$

$$A_m(\omega) = \frac{F/\sqrt{2}m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_{rm}^2)^2 + 4\beta^2\Omega_m^2}} \qquad \text{με } \omega_{rs}^2 = \omega_m^2 - 2\beta^2 \text{ και } \Omega_m^2 = \omega_m^2 - \beta^2$$

$$A_f(\omega) = \frac{F/2m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_{r3}^2)^2 + 4\beta^2\Omega_3^2}} \qquad \text{με } \omega_{rf}^2 = \omega_f^2 - 2\beta^2 \text{ και } \Omega_3^2 = \omega_f^2 - \beta^2$$

όπου θυμίζουμε ότι $\omega_s \equiv \omega_1 = \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{k}{m}}$, $\omega_m \equiv \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ και $\omega_f \equiv \omega_3 = \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\frac{k}{m}}$ είναι οι τρεις ιδιοσυχνότητες του συστήματος (συχνότητες αμείωτων κανονικών τρόπων ταλάντωσης).

Έχουμε δει ότι για μικρά $\beta<\omega_0$ ή $\zeta<1$ (με $\zeta = \frac{\beta}{\omega_0} = \frac{b}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$) οι περίπλοκες αυτές συναρτήσεις $A_i(\omega)$ του ω παρουσιάζουν πολύ μεγάλα μέγιστα, φαινόμενο που ονομάσαμε συντονισμό:



Παρατηρούμε ότι για τρεις μάζες εμφανίζονται τρεις συχνότητες συντονισμού οι ω_{rs}, ω_{rm}, ω_{rf} . Ανάλογα, για N μάζες θα εμφανιστούν N συχνότητες συντονισμού. Δηλαδή ένα σύστημα με πάρα πολλά μέρη θα εμφανίζει πάρα πολλές συχνότητες συντονισμού.

Έστω ότι η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης είναι ίση με την πρώτη συχνότητα συντονισμού την αργή $\omega = \omega_s$. Τότε τα πλάτη $A_m(\omega_s)$ και $A_f(\omega_s)$ θα είναι μακριά από το μέγιστό τους και θα είναι πολύ μικρά, αμελητέα σε σχέση με το $A_s(\omega_s) >> A_m(\omega_s), A_f(\omega_s)$, το οποίο θα βρίσκεται πάνω στην κορυφή της γραφικής παράστασης έχοντας τη μέγιστή τιμή του $A_s(\omega)_{\max} = A_s(\omega_s) = \frac{F/2m}{2\beta\Omega_s}$

Οι θέσεις των μαζών θα είναι :

$$x_1(t) \approx \frac{A_s(\omega_s)}{2}\sin(\omega_s t - \delta_s) + 0 + 0$$

$$x_2(t) \approx \frac{A_s(\omega_s)}{\sqrt{2}}\sin(\omega_s t - \delta_s) - 0$$

$$x_3(t) \approx \frac{A_s(\omega_s)}{2}\sin(\omega_s t - \delta_s) - 0 + 0$$

Δηλαδή οι τρείς μάζες ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα ω_s και πλάτη με σχετικά μεγέθη $1:\sqrt{2}:1$. Αυτό δεν είναι παρά ο πρώτος κανονικός τρόπος ταλάντωσης του συστήματος. Το ίδιο θα συμβεί και αν η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης αυξηθεί και πάρει τις τιμές $\omega = \omega_m$ και $\omega = \omega_f$. Οι μάζες θα ταλαντώνονται σύμφωνα με τον δεύτερο και τον τρίτο κανονικό τρόπο ταλάντωσης αντίστοιχα. Οπότε με το συντονισμό αναγκάζουμε το σύστημα να ταλαντωθεί σύμφωνα με έναν από τους τρεις κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του.

Όταν το σύστημα είναι σε συντονισμό τότε ταλαντώνεται με έναν από τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσής του.