ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2023-24

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ

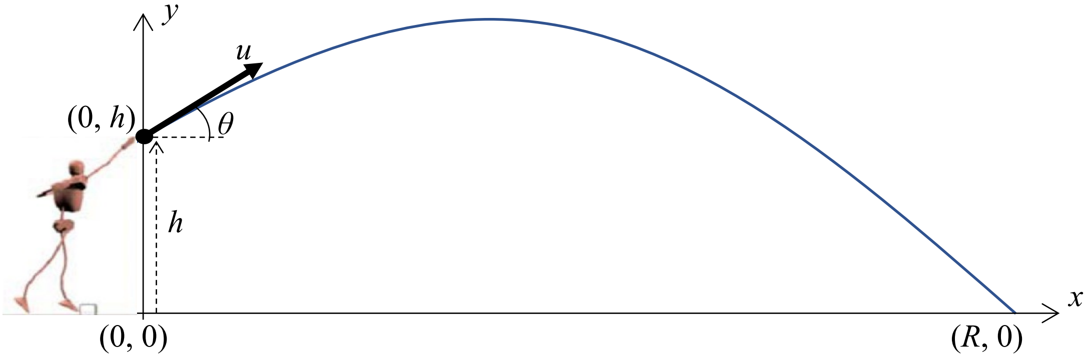
Παρασκευή, 9 Φεβρουαρίου 2024: 09:00-12:00 π.μ. Αίθουσες: ΑΠ3_8, ΑΠ3_11, ΒΠ3_11
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)

Μεταφέρετε όλα τα σχήματα στην κόλλα σας.

Μηχανική

ΘΕΜΑ 1

Άνδρας σφαιροβόλος, επιδόσεων παγκοσμίου επιπέδου, εκτοξεύει τη σφαίρα με ταχύτητα μέτρου $u = 14\,\text{m/s}$ από ύψος $h = 2,2\ \text{m}$ σε γωνία θ. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και η σφαίρα υλικό σημείο. Η ένταση του πεδίου βαρύτητας είναι $g = 9,807\ \ \text{N/kg}$.



1.1 [0,5] Από τις χρονικές εξισώσεις $x(t)$ και $y(t)$ της βολής και ορίζοντας, για συντομία, το μήκος $L = u^2/g$ δείξτε ότι η εξίσωση της τροχιάς της σφαίρας είναι: $y = h + x\tan\theta - x^2\,(1+\tan^2\theta)/2L$ (1)

1.2 [1] Αντικαθιστώντας το σημείο πρόσκρουσης $x = R,\ \ y = 0$ στην (1) βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει το βεληνεκές R με τη γωνία βολής θ : $0 = h + R\tan\theta - R^2\,(1+\tan^2\theta)/2L$ (2).

Δείξτε ότι το βεληνεκές γίνεται μέγιστο, όταν ισχύει: $\tan\theta = L/R$ (3).

(Υπόδειξη: Παραγωγίστε την (2) ως προς θ για να βρείτε την $\dfrac{dR}{d\theta}$ και θέστε $\dfrac{dR}{d\theta} = 0$)

Δίνεται: $\dfrac{d(\tan\theta)}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

1.3 [0,5] Δείξτε ότι το μέγιστο βεληνεκές είναι $R_{\max} = \sqrt{L(L+2h)}$

1.4 [0,5] Δείξτε ότι ο παραπάνω αθλητής πρέπει να εκτελέσει τη βολή σε γωνία 42° για να πετύχει τη μέγιστη δυνατή επίδοση.

ΛΥΣΗ

1.1 [0,5] Χρονικές εξισώσεις κίνησης

άξονας x : ευθύγραμμη ομαλή κίνηση από την αρχή του άξονα με ταχύτητα $\upsilon_{0x} = u\cos\theta$

άξονας y : ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με επιτάχυνση $a = -g$, αντίθετη από την αρχική ταχύτητα $\upsilon_{0y} = u\sin\theta$, από αρχική θέση $y_0 = h$

$$x(t) = u\cos\theta\cdot\ t, \qquad y(t) = h + u\sin\theta\cdot\ t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad [0,1]$$

Λύνουμε την πρώτη ως προς t

$$t = \frac{x}{u\cos\theta} \qquad [0,1]$$

και αντικαθιστούμε στη δεύτερη

$$y = h + u\sin\theta\cdot\ \frac{x}{u\cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right)^2 \ \Rightarrow$$

[σωστές πράξεις 0,3]

$$y = h + x\tan\theta - \frac{x^2}{2\left(u^2/g\right)}\frac{1}{\cos^2\theta} \ \Rightarrow$$

για να πάρουμε την εξίσωση της τροχιάς:

$$\boxed{y = h + x\tan\theta - \frac{x^2}{2L}(1+\tan^2\theta) \qquad (1)}$$

Είτε θυμάστε την ταυτότητα ή κάνετε τις πράξεις και δείχνετε ότι

$$1+\tan^2\theta = 1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

Το μήκος L είναι το μέγιστο βεληνεκές αν η βολή γινόταν από μηδενικό αρχικό ύψος (h=0).

$$y(t) = 0 + u\sin\theta \cdot\ t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow\ 0 = u\sin\theta\cdot\ t_{\pi\tau\eta\sigma\eta\varsigma} - \frac{1}{2}gt^2_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} \Rightarrow\ t_{\pi\tau\eta\sigma\eta\varsigma} = \frac{2u\sin\theta}{g}$$

$$R_0 = u\cos\theta\cdot\ t_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} = u\cos\theta\cdot\ \frac{2u\sin\theta}{g} = \left(\frac{u^2}{g}\right)2\sin\theta\cos\theta = L\sin 2\theta \xrightarrow[\theta=45^0]{} R_{0\max} = L$$

1.2 Για $x = R,\ \ y = 0$ η (1) γίνεται

$$0 = h + R\tan\theta - \frac{R^2}{2L}(1+\tan^2\theta) \quad (2)$$

Το βεληνεκές R εξαρτάται από τη γωνία θ σύμφωνα με την παραπάνω περίπλοκη σχέση (2). Αν η $R(\theta)$ έχει ακρότατο τότε, αυτό μπορεί να είναι ***μόνο μέγιστο*** καθώς το R είναι πάντα θετικό και είναι μηδέν για θ=π/2 (κατακόρυφη βολή προς τα πάνω) και $\theta = -$π/2 (κατακόρυφη βολή προς τα κάτω). [0,2]

Επειδή ψάχνω για ακρότατη τιμή του R (πρόβλημα ελαχίστων-μεγίστων) **παραγωγίζω τη σχέση (2)** ως προς θ και στην έκφραση που βρίσκω **θέτω** $R' \equiv \frac{dR}{d\theta} = 0$ ώστε να βρω την ειδική σχέση μεταξύ του μέγιστου βεληνεκούς $R_{\max}$ και της γωνίας θ_{opt} που αυτό επιτυγχάνεται χωρίς να χρειαστεί να βρω την ακριβή έκφραση για την $R(\theta)$ πρώτα. [0,2].

$$\frac{d}{d\theta}\left[h + R\tan\theta - \frac{R^2}{2L}(1+\tan^2\theta)\right] = \frac{d}{d\theta}(0) \Rightarrow$$

$$0 + R'\tan\theta + R(\tan\theta)' - \frac{1}{2L}(R^2)'(1+\tan^2\theta) - \frac{R^2}{2L}(1+\tan^2\theta)' = 0 \Rightarrow$$

$$0 = R'\tan\theta + \frac{R}{\cos^2\theta} - \frac{1}{\cancel{2}L}\cancel{2}RR'(1+\tan^2\theta) - \frac{1}{\cancel{2}L}R^2\cancel{2}\tan\theta(\tan\theta)' \Rightarrow$$

$$0 = R'\tan\theta + \frac{R}{\cos^2\theta} - \frac{R}{L}R'(1+\tan^2\theta) - \frac{R^2}{L}\frac{\tan\theta}{\cos^2\theta} \qquad [0,4]$$

Θέτω $R' = 0$. Τότε $R = R_{\max}$ και $\theta = \theta_{\text{opt}}$

$$0 = 0 + \frac{R_{\max}}{\cos^2\theta_{\text{opt}}} - 0 - \frac{R^2_{\max}}{L}\frac{\tan\theta_{\text{opt}}}{\cos^2\theta_{\text{opt}}}$$

και απλοποιώ τους κοινούς παράγοντες

$$\frac{\cancel{R_{\max}}}{\cancel{\cos^2\theta_{\text{opt}}}} = \frac{R^{\cancel{2}}_{\max}}{L}\frac{\tan\theta_{\text{opt}}}{\cancel{\cos^2\theta_{\text{opt}}}}$$

$$\boxed{\tan\theta_{opt} = \frac{L}{R_{\max}} \quad (3) \qquad [0,2]}$$

Όταν η γωνία συνδέεται με το βεληνεκές με αυτή τη σχέση τότε αυτό το βεληνεκές θα είναι και το μέγιστο $R_{\max}$. Η γωνία αυτή θα είναι η βέλτιστη (optimum)

1.3 [0,5] Αντικαθιστώ την (3) στην (2) για να βρω το μέγιστο βεληνεκές από τα δεδομένα L και h :

$$0 = h + R_{\max}\frac{L}{R_{\max}} - \frac{1}{2L}R^2_{\max}\left(1+\frac{L^2}{R^2_{\max}}\right) \Rightarrow \qquad [0,3]$$

$$0 = h + L - \frac{R^2_{\max}}{2L} - \frac{L}{2} \Rightarrow \text{ όλα επί } 2L$$

$$0 = 2hL + L^2 - R_{\max}^2 \Rightarrow R_{\max} = \sqrt{L^2 + 2hL}$$

$$\boxed{R_{\max} = \sqrt{L(L+2h)} \qquad (4) \quad [0,2]}$$

(έλεγχος: για $h \to 0$ δίνει σωστό όριο $R_{\max} \to L$)

Το υπολογίζω : $R_{\max} = \sqrt{L(L+2h)} = \sqrt{20(20+2\cdot\ 2,2)} = 22,09\ \text{m}$

1.4 [0,5] Αντικαθιστώ την (4) στην (3) για να βρω τη βέλτιστη γωνία από τα δεδομένα L και h :

$$\tan\theta_{opt} = \frac{L}{R_{\max}} = \frac{L}{\sqrt{L(L+2h)}} \Rightarrow \tan\theta_{opt} = \frac{1}{\sqrt{1+2h/L}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta_{opt} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2h/L}}\right)}$$

Αριθμητικός υπολογισμός για τον αθλητή του θέματος :

$$u = 14\,\text{m/s}\ , \quad h = 2,2\ \text{m}, \quad L = \frac{u^2}{g} = \frac{14^2}{9,807} = 19,98572445 = 19,99\,\text{m}$$

$$\theta_{opt} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1+2h/L}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\times 2,2/20}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1+0,22}}\right) = \arctan(0,90536) = 42,16^{\circ} \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta_{opt} = 42^{\circ}}$$

Ή κατευθείαν $\tan\theta_{opt} = \dfrac{L}{R_{\max}} = \dfrac{19,99}{22,09} = 0,9049 \Rightarrow \quad \theta_{opt} = 42,14^{\circ} = 42^{\circ}$

ΘΕΜΑ 2

Πυρήνας θορίου σε ηρεμία διασπάται σε πυρήνα ραδίου και ένα σωμάτιο α: Th $\rightarrow$ Ra + α

2.1 [0,6] Από την διατήρηση της ενέργειας βρείτε την κινητική ενέργεια των προϊόντων της διάσπασης. ($6,567\times10^{-13}$ J)

(Ενέργεια σωματιδίου : $E = mc^2 + K$)

2.2 [1,5] Αποδείξτε ότι τα μέτρα των ταχυτήτων των προϊόντων δίνονται από τους τύπους

$$\upsilon_\alpha = c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha + m_{\text{Ra}}}\cdot\frac{m_{\text{Ra}}}{m_\alpha}} \qquad \text{και} \qquad \upsilon_{\text{Ra}} = c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha + m_{\text{Ra}}}\cdot\frac{m_\alpha}{m_{\text{Ra}}}}$$

(Για την κινητική ενέργεια χρησιμοποιήστε τον τύπο : $K = m\upsilon^2/2$)

2.3 [0,4] Υπολογίστε τις ταχύτητες των προϊόντων. ($13,94\times10^6$ m/s $0,2446\times10^6$ m/s)

Δεδομένα: $m_{\text{Th}} = 232,0381\ \text{u}$, $m_{\text{Ra}} = 228,0311\ \text{u}$, $m_\alpha = 4,0026\ \text{u}$,

$\text{u} = 1,660539\times10^{-27}\ \text{kg}$, $c = 2,99792458\times10^8\ \text{m/s}$ *ακριβώς*

ΛΥΣΗ

2.1 [0,6] Διατήρηση της ενέργειας :

$$E_{\pi\rho\iota\nu} = E_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Rightarrow m_{\text{Th}}c^2 = m_{\text{Ra}}c^2 + K_{\text{Ra}} + m_\alpha c^2 + K_\alpha \Rightarrow$$
$$K_{\text{Ra}} + K_\alpha = (m_{\text{Th}} - m_{\text{Ra}} - m_\alpha)c^2 = \Delta m\, c^2 \qquad [0,3]$$

Ονομάζω την κινητική ενέργεια των προϊόντων Q : $\qquad Q \equiv K_\alpha + K_{\text{Ra}} = \Delta m\, c^2$

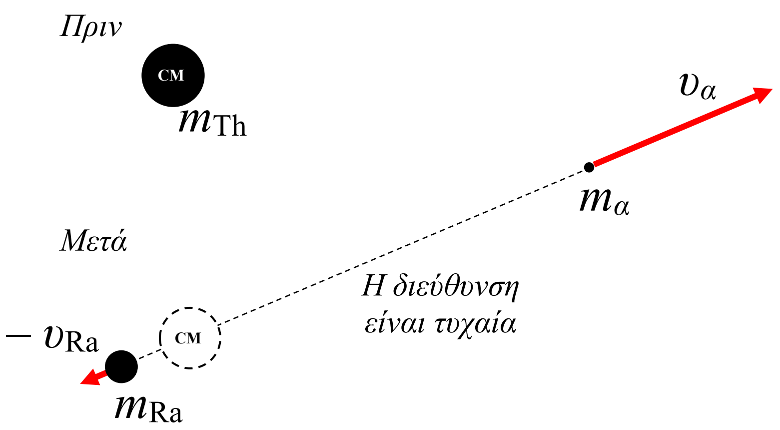
Υπολογίζω:

$$\Delta m = m_{\text{Th}} - m_{\text{Ra}} - m_\alpha = 232,0381\ \text{u} - 228,0311\ \text{u} - 4,0026\ \text{u} = 0,0044\ \text{u} =$$
$$= 0,0044\cdot\ 1,660539\times10^{-27}\ \text{kg} = 7,306372\times10^{-30}\ \text{kg} \qquad [0,1]$$

$$Q = \Delta m c^2 = (7,306372\times10^{-30}\ \text{kg})\times(2,99792458\times10^8\ \text{m/s})^2 = 6,566639\times10^{-13}\ \text{J} \Rightarrow \qquad [0,1]$$

$$\boxed{Q = 6,567\times10^{-13}\ \text{J} \qquad [0,1]}$$

2.2 [1,5] Το σύστημα είναι απομονωμένο άρα η ορμή διατηρείται στην αρχική τιμή μηδέν που σημαίνει ότι το κέντρο μάζας (CM) των προϊόντων παραμένει ακίνητο. Για να είναι η ορμή μηδέν ο θυγατρικός πυρήνας και το σωμάτιο α θα φύγουν σε αντίθετες κατευθύνσεις και το σωματίδιο με τη μικρότερη μάζα (α) θα έχει το μεγαλύτερο μέτρο ταχύτητας. Η διεύθυνση στην οποία θα φύγουν τα σωματίδια μπορεί να είναι η οποιαδήποτε. Μέτρα ταχύτητας: $\upsilon_\alpha, \upsilon_{\mathrm{Ra}} > 0$ με $\upsilon_\alpha > \upsilon_{\mathrm{Ra}}$



Διατήρηση ορμής : $0 = m_\alpha \upsilon_\alpha + m_{\mathrm{Ra}}(-\upsilon_{\mathrm{Ra}}) \Rightarrow \upsilon_\alpha = \dfrac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}\upsilon_{\mathrm{Ra}}$ (1) [0,3]

Αν γράψω την κινητική ενέργεια συστήματος δύο σωματιδίων ως :

$$Q = K_\alpha + K_{\mathrm{Ra}} = \cancel{K_{CM}} + K_{\sigma\chi\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}\mu\upsilon^2 \qquad [0,3]$$

όπου : $\mu = \dfrac{m_\alpha m_{Ra}}{m_\alpha + m_{Ra}}$ η ανηγμένη μάζα και $\upsilon = \upsilon_\alpha - (-\upsilon_{\mathrm{Ra}}) = \upsilon_\alpha + \upsilon_{\mathrm{Ra}}$ η σχετική ταχύτητα των προϊόντων, τότε από τη διατήρηση της ενέργειας βρίσκω κατευθείαν τη σχετική ταχύτητα

$$Q = \frac{1}{2}\mu(\upsilon_\alpha + \upsilon_{\mathrm{Ra}})^2 \Rightarrow \upsilon_\alpha + \upsilon_{\mathrm{Ra}} = \sqrt{\frac{2Q}{\mu}} \qquad (2)$$

και έχω ένα σύστημα δυο εξισώσεων για τους δύο αγνώστους $\upsilon_\alpha, \upsilon_{\mathrm{Ra}}$.

$$\upsilon_\alpha = \frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}\upsilon_{\mathrm{Ra}} \qquad (1)$$

$$\upsilon_\alpha + \upsilon_{\mathrm{Ra}} = \sqrt{\frac{2Q}{\mu}} \qquad (2)$$

(λύση συστήματος, πράξεις [0,9])

Αντικαθιστώ την (1) στη (2) και βρίσκω :

$$\frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}\upsilon_{\mathrm{Ra}} + \upsilon_{\mathrm{Ra}} = \sqrt{\frac{2Q}{\mu}} \Rightarrow \upsilon_{\mathrm{Ra}} = \frac{\sqrt{\dfrac{2Q}{\mu}}}{1 + \dfrac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}}$$

Κάνω πράξεις για να τη φέρω στη ζητούμενη μορφή :

$$\upsilon_{\mathrm{Ra}} = \frac{1}{1 + \dfrac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}}\sqrt{\frac{2\Delta mc^2}{\dfrac{m_\alpha m_{Ra}}{m_\alpha + m_{Ra}}}} = \frac{c}{\dfrac{m_\alpha + m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}}\sqrt{\frac{2\Delta m(m_\alpha + m_{Ra})}{m_\alpha m_{Ra}}} = c\sqrt{\frac{m_\alpha^{\cancel{2}}}{(m_\alpha + m_{Ra})^{\cancel{2}}}}\sqrt{\frac{2\Delta m\,\cancel{(m_\alpha + m_{Ra})}}{\cancel{m_\alpha} m_{Ra}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_{\mathrm{Ra}} = c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha + m_{\mathrm{Ra}}}\cdot\frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Ra}}}}}$$

$$\upsilon_\alpha = \frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}\upsilon_{\mathrm{Ra}} = \frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha + m_{\mathrm{Ra}}}\cdot\frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Ra}}}} = c\sqrt{\frac{m_{\mathrm{Ra}}^{\cancel{2}}}{m_\alpha^{\cancel{2}}}\cdot\frac{2\Delta m}{m_\alpha + m_{\mathrm{Ra}}}\cdot\frac{\cancel{m_\alpha}}{\cancel{m_{\mathrm{Ra}}}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_\alpha = c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha + m_{\mathrm{Ra}}}\frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}}}$$

Μπορούσατε και χωρίς την $K_{\sigma\chi\varepsilon\tau}$

Διατήρηση ορμής : $\upsilon_\alpha = \dfrac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}\upsilon_{\mathrm{Ra}}$ (1)

Διατήρηση ενέργειας : $\Delta m\, c^2 = \dfrac{1}{2}m_\alpha \upsilon_\alpha^2 + \dfrac{1}{2}m_{\mathrm{Ra}}\upsilon_{\mathrm{Ra}}^2$ (2)

(1) → (2) : $\Delta m\, c^2 = \dfrac{1}{2}m_\alpha\left(\dfrac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}\upsilon_{\mathrm{Ra}}\right)^2 + \dfrac{1}{2}m_{\mathrm{Ra}}\upsilon_{\mathrm{Ra}}^2 \Rightarrow 2\Delta m\, c^2 = \left(m_\alpha\dfrac{m_{\mathrm{Ra}}^2}{m_\alpha^2} + m_{\mathrm{Ra}}\right)\upsilon_{\mathrm{Ra}}^2 \Rightarrow$

$$2\Delta m\, c^2 = \left(\frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}+1\right)m_{\mathrm{Ra}}\upsilon_{\mathrm{Ra}}^2 \Rightarrow 2\Delta m\, c^2 = \left(\frac{m_{\mathrm{Ra}}+m_\alpha}{m_\alpha}\right)m_{\mathrm{Ra}}\upsilon_{\mathrm{Ra}}^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_{\mathrm{Ra}}^2 = \frac{2\Delta m\, c^2}{m_\alpha + m_{\mathrm{Ra}}}\cdot\frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Ra}}}$$

2.3 [0,4] Αριθμητικοί υπολογισμοί

αντικατάσταση – μονάδες :

$$\upsilon_{\mathrm{Ra}} = 2{,}99792458\times 10^8\,\mathrm{m/s}\sqrt{\frac{0{,}0088\,\cancel{u}}{232{,}0337\,\cancel{u}}\frac{228{,}0311\,\cancel{u}}{4{,}0026\,\cancel{u}}} \Rightarrow \quad [0{,}1]$$

ενδιάμεσοι υπολογισμοί (προαιρετικό, αλλά προτείνεται για να μην χάνετε τη μπάλα) :

$$\upsilon_{\mathrm{Ra}} = 2{,}99792458\sqrt{\frac{0{,}0088}{232{,}0337}0{,}01755287}\times 10^8\,\mathrm{m/s} = 2{,}99792458\sqrt{6{,}657018\times 10^{-7}}\times 10^8\,\mathrm{m/s} =$$

$$= 2{,}99792458\cdot 8{,}159055\times 10^{-4}\times 10^8\,\mathrm{m/s} \Rightarrow$$

αποτέλεσμα αριθμομηχανής :

$$\upsilon_{\mathrm{Ra}} = 244.602{,}3214738\ \mathrm{m/s} \quad [0{,}1]$$

στρογγυλοποίηση – μετακίνηση υποδιαστολής :

$$\boxed{\upsilon_{\mathrm{Ra}} = 0{,}2446\times 10^6\ \mathrm{m/s} \quad [0{,}05]}$$

$$\upsilon_\alpha = \frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}\upsilon_{\mathrm{Ra}} = \frac{228{,}0311\,\cancel{u}}{4{,}0026\,\cancel{u}}0{,}2446\times 10^6\ \mathrm{m/s} = 13{,}935044\times 10^6\ \mathrm{m/s} \Rightarrow \quad [0{,}1]$$

$$\boxed{\upsilon_\alpha = 13{,}94\times 10^6\ \mathrm{m/s} \quad [0{,}05]}$$

Για να πάρετε τις 0,5 μονάδες του 2.3 πρέπει να αντικαταστήσετε τα μεγέθη με τις σωστές μονάδες στον τύπο και με τουλάχιστον τόσα σημαντικά ψηφία όσα έχει και η δοσμένη απάντηση (4), **πρέπει να δείξετε το αποτέλεσμα όπως σας το δίνει η αριθμομηχανή**, μετά να μετακινήσετε την υποδιαστολή ώστε να εμφανιστεί η ζητούμενη δύναμη του 10 και τέλος να κάνετε σωστά τη στρογγυλοποίηση στα 4 σημαντικά ψηφία της απάντησης που σας δίνεται.

Άμα βάλετε τις μάζες σε kg πρέπει να έχετε:

$m_{\mathrm{Th}} = 232{,}0381\ \mathrm{u}\cdot 1{,}660539\times 10^{-27}\ \mathrm{kg/u} = 385{,}3083\times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$,

$m_{\mathrm{Ra}} = 228{,}0311\ \mathrm{u}\cdot 1{,}660539\times 10^{-27}\ \mathrm{kg/u} = 378{,}6545\times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$,

$m_\alpha = 4{,}0026\ \mathrm{u}\cdot 1{,}660539\times 10^{-27}\ \mathrm{kg/u} = 6{,}6465\times 10^{-27}\mathrm{kg}$,

$m_{\mathrm{Ra}} + m_\alpha = 232{,}0337\ \mathrm{u}\cdot 1{,}660539\times 10^{-27}\ \mathrm{kg/u} = 385{,}2967\times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$

$\Delta m = 7{,}306372\times 10^{-30}\ \mathrm{kg}$

$$\frac{\Delta m}{m_{\mathrm{Ra}}+m_{\alpha}}=\frac{7,306372\times10^{-30}\ \mathrm{kg}}{385,2967\times10^{-27}\ \mathrm{kg}}=1,896298\times10^{-5}$$

Ηλεκτρομαγνητισμός

ΘΕΜΑ 3

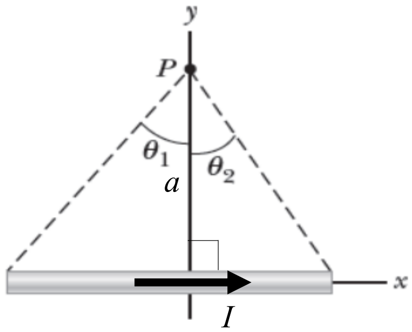
3.1 [1] Χρησιμοποιώντας το νόμο των Biot-Savart $d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}$ δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται στο σημείο P του σχήματος 1 από το ρευματοφόρο ευθύγραμμο τμήμα δίνεται από τον τύπο: $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}\left(\sin\theta_1-\sin\theta_2\right)\hat{z}$

(Υπόδειξη: Σχήμα 2. Θετική κατεύθυνση θ προς τα αριστερά, θετική κατεύθυνση x προς τα δεξιά)

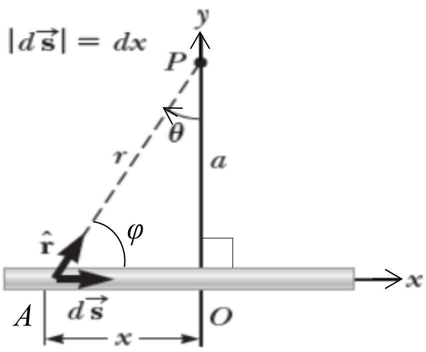
3.2 [1] Βρείτε την έκφραση για το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται στο κέντρο επίπεδου τετράγωνου σύρματος πλευράς d που διαρρέεται από ρεύμα I (Σχήμα 3).

3.3 [0,5] Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο του βρόχου για I = 707 A, d =10 cm, αν το καλώδιο του βρόχου περιέχει N=100 συρμάτινες σπείρες. (0,80 T)

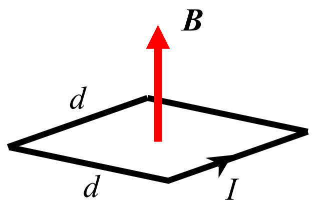
Δίνεται μ_0=4π×10^{-7} N/A^2



Σχ. 1



Σχ. 2



Σχ. 3

ΛΥΣΗ

3.1 Στο ορθογώνιο τρίγωνο AOP ισχύουν :

Α) οι γωνίες φ και θ είναι συμπληρωματικές : $\sin\varphi=\cos\theta$

Β) $r=\dfrac{a}{\cos\theta}$

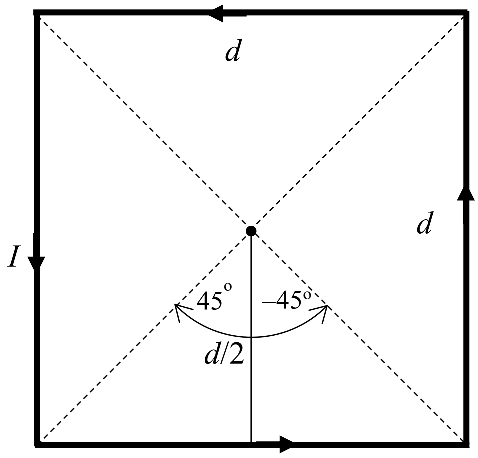
Γ) $x=-a\tan\theta$ επειδή όταν θ>0 τότε x<0. Οπότε $\dfrac{dx}{d\theta}=-a\dfrac{d(\tan\theta)}{d\theta}=-\dfrac{a}{\cos^2\theta}\Rightarrow dx=-\dfrac{ad\theta}{\cos^2\theta}$

Άρα $\dfrac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}=\dfrac{dx\cdot\ 1\cdot\ \sin\varphi\ \ \hat{z}}{a^2/\cos^2\theta}=\dfrac{\left(-ad\theta/\cos^2\theta\right)\cdot\ \cos\theta}{a^2/\cos^2\theta}\hat{z}=-\dfrac{\cos\theta d\theta}{a}\hat{z}$

Έτσι έχουμε : $\vec{B}=\int_{\alpha\rho\chi\acute{\eta}}^{\tau\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma}d\vec{B}=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\alpha\rho\chi\acute{\eta}}^{\tau\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma}\dfrac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}=-\hat{z}\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta d\theta\Rightarrow\vec{B}=-\hat{z}\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\sin\theta_2-\sin\theta_1\right)$

$$\boxed{\vec{B}_{\varepsilon\upsilon\theta.\tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\sin\theta_1-\sin\theta_2\right)\hat{z}}$$

3.2 Το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του τετραγώνου θα είναι το άθροισμα των τεσσάρων πεδίων που δημιουργεί κάθε πλευρά. Οι διαγώνιες είναι ίσες και διχοτομούνται. Άρα για κάθε πλευρά η απόσταση a του κέντρου είναι $a=d/2$ και οι γωνίες θ_1= 45° και θ_2= –45°.



Οπότε :

$$B_{\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\ d/2}\left(\sin(45^{\circ}) - \sin(-45^{\circ})\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\cdot\ 2\sin(45^{\circ}) = \frac{\mu_0 I}{\pi d}\cdot\ \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$B_{\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma} = \frac{\mu_0 I}{\pi d\sqrt{2}}$$

$$\boxed{B_{\square} = 4B_{\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma} = 4\cdot\ \frac{\mu_0 I}{\pi d\sqrt{2}}\ = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi d}}$$

3.3 Εφόσον υπάρχουν N τετράγωνα (σπείρες) τότε το συνολικό πεδίο στο κέντρο θα είναι :

$$\boxed{B = NB_{\square} = N\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi d} = (100)\frac{2\sqrt{2}\cdot\ 4\pi\times10^{-7}\cdot\ (707)}{\pi(0{,}10)} = 0{,}80\,\mathrm{T}}$$

Αν όλα τα μεγέθη εκφραστούν σε μονάδες SI, τότε και το αποτέλεσμα θα βγει σε SI δηλαδή τέσλα (Τ). Το αποτέλεσμα δίνεται με ακρίβεια 2 σημαντικών ψηφίων όσα και του μεγέθους με τη μικρότερη ακρίβεια που είναι το μήκος της πλευράς $d = 10\ \mathrm{cm} = 0{,}10\ \mathrm{m}$ η οποία πρέπει να μπει σε μέτρα (m) στον τύπο και όχι σε εκατοστά (cm).

ΘΕΜΑ 4

Διαθέτουμε λεπτή οριζόντια δέσμη μονοσθενών ιόντων νέου Ne^{+} διαφόρων ταχυτήτων. Η δέσμη αρχικά περνάει μέσα από κατακόρυφο ηλεκτρικό πεδίο σταθερού μέτρου έντασης $E = 6{,}4\times10^{4}$ N/C με φορά προς τα κάτω, στο χώρο του οποίου υπάρχει και σταθερό μαγνητικό πεδίο με ένταση B_1 = 0,4 T που διασταυρώνεται κάθετα με το ηλεκτρικό. Στη συνέχεια η δέσμη που απέμεινε εισέρχεται σε χώρο σταθερού οριζόντιου μαγνητικού πεδίου, έντασης B_2 = 0,2 T με διεύθυνση κάθετη στην ταχύτητά των ιόντων. Τα ιόντα διαγράφουν κυκλικές τροχιές και καταλήγουν πάνω σε κατακόρυφη φωτογραφική πλάκα στην οποία αφήνουν 3 σημάδια αντιδιαμετρικά του σημείου εισόδου (άρα το νέον έχει 2 ισότοπα). Το πιο έντονο σημάδι $\left({}^{20}_{10}\mathrm{Ne}\right)$ είναι σε απόσταση d_0 = 331,5 mm από το σημείου εισόδου ενώ τα άλλα δύο σε αποστάσεις d_1 =348,1 mm $\left({}^{x}_{10}\mathrm{Ne}\right)$ και d_2 =364,7 mm $\left({}^{y}_{10}\mathrm{Ne}\right)$ αντίστοιχα.

4.1 [0,2] Τι φορά πρέπει να έχει το μαγνητικό πεδίο B_1 ώστε κάποια από τα ιόντα της δέσμης να διασχίσουν το χώρο των διασταυρούμενων πεδίων χωρίς παρέκκλιση;

4.2 [0,3] Να σχεδιάσετε όλη τη διάταξη δείχνοντας τη φορά όλων των πεδίων, την κατεύθυνση της δέσμης, τις τροχιές των ιόντων που διαπερνούν χωρίς παρέκκλιση από τα διασταυρούμενα πεδία και το διαχωρισμό τους από το δεύτερο μαγνητικό πεδίο.

4.3 [0,3] Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας των ιόντων που διαπερνούν το χώρο των διασταυρούμενων πεδίων χωρίς παρέκκλιση;

4.4 [0,8] Ποιες είναι οι μάζες του ${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}$ και των δύο ισοτόπων του ${}^{x}_{10}\mathrm{Ne}$ και ${}^{y}_{10}\mathrm{Ne}$;

(3,320 3,486 3,652 $\times10^{-26}$ kg)

4.5 [0,6] Αν η μάζα ενός νετρονίου είναι $1{,}674\,927\,498\times10^{-27}$ kg, ποιοι είναι οι μαζικοί αριθμοί x και y των δυο ισοτόπων του νέου;

4.6 [0,3] Πόσο χρόνο χρειάζεται το καθένα από τα παραπάνω τρία ιόντα για να διαγράψει την ημικυκλική του τροχιά (3,25 μs, 3,42 μs, 3,58 μs)
Δίνεται $e = 1{,}602\ 176\ 634\times10^{-19}$ C *ακριβώς*

ΛΥΣΗ

4.1 [0,2] Η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο σε θετικά μονοσθενή ιόντα ($q=+e$) θα είναι προς τα κάτω $-\hat{y}$

$$\vec{F}_E = q\vec{E} = (+e)(-E\hat{y}) = eE(-\hat{y})$$

Άρα η δύναμη από το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι προς τα πάνω $\hat{y}$: $\vec{F}_B = F_B\hat{y}$.

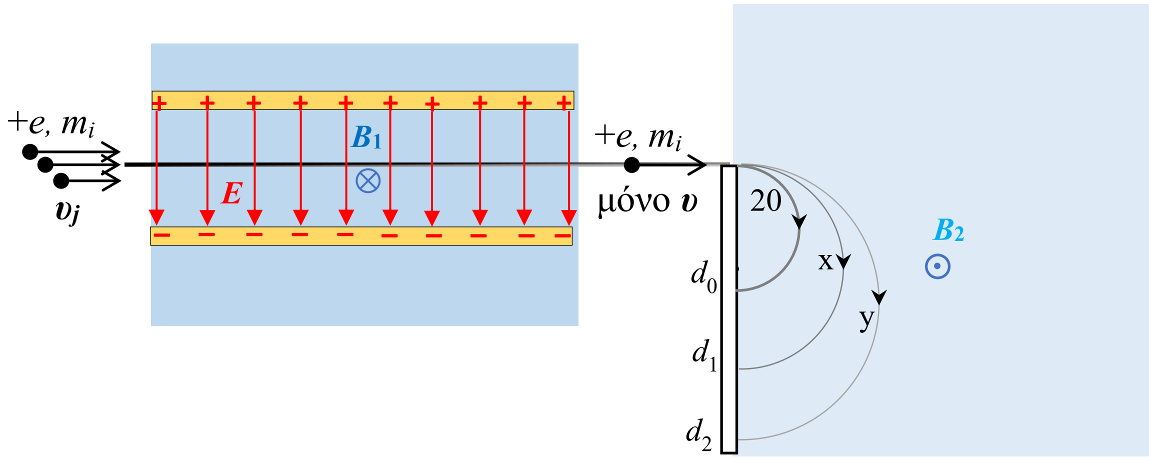
Η ταχύτητα είναι στην κατεύθυνση $\hat{x}$: $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{x}$.

Το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι κάθετο και στην ταχύτητα ώστε το ιόν να έκανε μόνο κυκλική κίνηση και όχι σπειροειδή. Άρα πρέπει να είναι κάθετο στη σελίδα. Δηλαδή ή στην κατεύθυνση $\hat{z}$ (προς τα έξω της σελίδας) ή στην κατεύθυνση $-\hat{z}$ (προς τα μέσα της σελίδας). Από τον κανόνα του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι πρέπει να είναι **προς τα μέσα της σελίδας**, δηλαδή προς την κατεύθυνση $-\hat{z}$

$$\vec{F}_B = e\vec{\upsilon}\times\vec{B} \Rightarrow \hat{F}_B = \hat{\upsilon}\times\hat{B} \Rightarrow \ \hat{y} = \hat{x}\times\hat{B} \Rightarrow \hat{B} = -\hat{z} \quad \text{επειδή } \ \hat{x}\times(-\hat{z}) = \hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}$$

4.2 [0,3]

Θετικά μονοσθενή ιόντα με φορτίο $+e$ με διάφορες μάζες και διάφορες ταχύτητες εισέρχονται στον επιλογέα ταχύτητας.
Ηλεκτρικό πεδίο προς τα κάτω από το + προς το –
Μαγνητικό πεδίο B_1 προς τα μέσα της σελίδας
Τα ιόντα που εξέρχονται έχουν μόνο μια ταχύτητα και διάφορες μάζες.
Το μαγνητικό πεδίο B_2 πρέπει να είναι είτε προς τα μέσα είτε προς τα έξω της σελίδας.
Στο μαγνητικό πεδίο B_2 η δέσμη χωρίζεται σε τρεις που διαγράφουν ημικυκλικές τροχιές οι οποίες πρέπει να καμπυλώνουν προς την ίδια πλευρά είτε κάτω είτε πάνω ανάλογα με τη φορά του B_2.



Ή με το B_2 προς τα μέσα της σελίδας οπότε τα ιόντα στρίβουν προς τα πάνω

4.3 [0,3] Οι δύο αντίθετες δυνάμεις θα έχουν ίσα μέτρα

$$F_{B1} = F_E \Rightarrow q\upsilon B_1 = qE \Rightarrow \upsilon = \frac{E}{B_1} \Rightarrow \upsilon = \frac{6{,}4\times10^4\ \text{N/C}}{0{,}4\ \text{T}} = 16\times10^4\ \text{m/s}$$

[τον τύπο $\upsilon = \dfrac{E}{B}$ πρέπει να τον αποδείξετε, δεν μπορείτε να τον πάρετε έτοιμο]

4.4 [0,8] Στο δεύτερο μαγνητικό πεδίο τα ιόντα θα εκτελέσουν ομαλή κυκλική κίνηση επειδή μπαίνουν κάθετα στις γραμμές του πεδίου και η μαγνητική δύναμη θα είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητά τους, παρέχοντας την κεντρομόλο δύναμη.

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \xrightarrow{\text{ακτινικά}} F_{B2} = ma_c \Rightarrow e\upsilon B_2 = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow m = \frac{eB_2R}{\upsilon} \qquad [0,3]$$

[τον τύπο $m = \dfrac{eBR}{\upsilon}$ πρέπει να τον αποδείξετε, δεν μπορείτε να τον πάρετε έτοιμο]

Η μάζα είναι ανάλογη με την ακτίνα. Το πιο βαρύ θα έχει τη μεγαλύτερη ακτίνα. Ο λόγος των μαζών είναι ανάλογος με το λόγο των ακτίνων περιστροφής (άρα και τη διάμετρο).
Δίνονται διάμετροι, άρα : $R = d/2$ [0,1]

Η μάζα του ${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}$ είναι :

$$m_0 = \frac{eB_2R_0}{\upsilon} = \frac{(1.602\ 176\ 634\times 10^{-19}\ )(0,2)\left(\dfrac{331,5\times 10^{-3}}{2}\right)}{16\times 10^4} = 3,320\times 10^{-26}\ \mathrm{kg}\ \ [0,2]$$

Αφού η μάζες είναι ανάλογες με τη διάμετρο η μάζα του ${}^{x}_{10}\mathrm{Ne}$ είναι :

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{d_1}{d_0} \Rightarrow m_1 = m_0\frac{d_1}{d_0} = 3,320\times 10^{-26}\frac{348,1}{331,5} = 3,486\times 10^{-26}\ \mathrm{kg} \qquad [0,1]$$

και η μάζα του ${}^{y}_{10}\mathrm{Ne}$ είναι :

$$\frac{m_2}{m_0} = \frac{d_2}{d_0} \Rightarrow m_2 = m_0\frac{d_2}{d_0} = 3,320\times 10^{-26}\frac{364,7}{331,5} = 3,652\times 10^{-26}\ \mathrm{kg} \qquad [0,1]$$

4.5 [0,6] Οι διαφορές των μαζών οφείλονται χοντρικά στα πρόσθετα νετρόνια που έχουν τα ισότοπα και άρα πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός μαζών νετρονίων. Πράγματι:

$$\frac{m_1 - m_0}{m_n} = \frac{(3,486-3,320)\times 10^{-26}}{1,674\ 927\ 498\times 10^{-27}} = 0,99109 \simeq 1 \qquad [0,2]$$

$$\frac{m_2 - m_0}{m_n} = \frac{(3,652-3,320)\times 10^{-26}}{1,674\ 927\ 498\times 10^{-27}} = 1,982175 \simeq 2\ \ [0,2]$$

Το ${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}$ με το ${}^{x}_{10}\mathrm{Ne}$ διαφέρουν κατά ένα νετρόνιο, άρα $x = 20+1 = 21$ και το ισότοπο είναι το ${}^{21}_{10}\mathrm{Ne}$ [0,1]

Το ${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}$ με το ${}^{y}_{10}\mathrm{Ne}$ διαφέρουν κατά δύο νετρόνιο, άρα $y = 20+2 = 22$ και το ισότοπο είναι το ${}^{22}_{10}\mathrm{Ne}$ [0,1]

Κάποιοι χρησιμοποίησαν την προσέγγιση ότι η μάζα του πρωτονίου είναι ίση με τη μάζα του νετρονίου $m_p \simeq m_n$ και μπροστά τους η μάζα του ηλεκτρονίου όπως και οι ενέργειες σύνδεσης του πυρήνα και του ατόμου είναι όλα αμελητέα $BE_{nucleus},\ BE_{atom},\ m_e \simeq 0$. Θα τη δεχτώ αν έχετε γράψει κάποια αιτιολόγηση. Οπότε η μάζα ενός ιόντος ${}^{A}_{Z}\mathrm{Ne}$ θα είναι χοντρικά ο μαζικός του αριθμός A επί τη μάζα του νετρονίου m_n:

$$m = Am_n$$

$$m_1 = xm_n \ \Rightarrow\ x = \frac{3,486\times 10^{-26}\ \mathrm{kg}}{1,674\ 927\ 498\times 10^{-27}\ \mathrm{kg}} = 20,81 \simeq 21 \quad \mathrm{OK}$$

$$m_2 = ym_n \ \Rightarrow\ y = \frac{3,652\times 10^{-26}\ \mathrm{kg}}{1,674\ 927\ 498\times 10^{-27}\ \mathrm{kg}} = 21,80 \simeq 22 \quad \mathrm{OK}$$

4.6 [0,3] Η περίοδος της κυκλικής τροχιάς είναι $T = \dfrac{2\pi R}{\upsilon}$ και άρα οι ζητούμενοι χρόνοι που αφορούν ημικύκλια θα υπολογίζονται απευθείας από $t = \dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi R}{\upsilon}$ [0,1]

$$t_0 = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi R_0}{\upsilon} = \frac{\pi(331,5\times 10^{-3}/2)}{16\times 10^4} = 32,54494\times 10^{-7} = 3,25\times 10^{-6} = 3,25\,\mu\mathrm{s}\ \ [0,1]$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση της ταχύτητας

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{2\pi R}{eB_2R/m} = \left(\frac{2\pi}{eB_2}\right)m$$

βλέπουμε ότι χρόνος είναι ανάλογος της μάζας και οι υπόλοιποι χρόνοι μπορούν να υπολογιστούν και από τις αναλογίες μαζών

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= t_0 \frac{m_1}{m_0} = (32,54494\times 10^{-7})\frac{3,486}{3,320} = 34,1722\times 10^{-7} = 3,42 \ \mu\text{s} \\ t_2 &= t_0 \frac{m_2}{m_0} = (32,54494\times 10^{-7})\frac{3,652}{3,320} = 35,7994\times 10^{-7} = 3,58 \ \mu\text{s} \end{aligned}\right\} \ [0,1]$$

[τον τύπο $T = \dfrac{2\pi m}{eB_2}$ πρέπει να τον αποδείξετε, δεν μπορείτε να τον πάρετε έτοιμο]