ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΝΟΣΗΣΑΝΤΩΝ COVID-19
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2021-22

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ

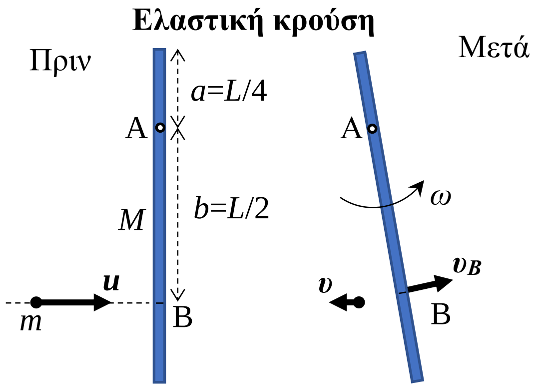
Τετάρτη, 23 Φεβρουαρίου 2022: 10-12 π.μ. αίθ. 7
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)
Επιτηρήτρια : Ραφαέλα Σωτηροπούλου
Τα 4 θέματα είναι ισοδύναμα και αξίας 2,5 μονάδων
Δίνετε τα αριθμητικά αποτελέσματα με ακρίβεια τριών σημαντικών ψηφίων

ΘΕΜΑ 1.

Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από τον άξονα Α. [0,7]

Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ της σφαίρας και τη γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου μετά την ελαστική κρούση. [1,8]

u=10 m/s, m=0,3 kg, M=1,2 kg, L=1 m, $I_{CM}=ML^2/12$



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ροπή αδράνειας

Από Steiner

$$I_A = I_{CM} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{ML^2}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{ML^2}{4}\left(\frac{4+3}{12}\right) = \frac{7}{48}ML^2 = \frac{7}{48}\times 1,2\cdot\ 1^2 = \frac{7}{40} = 0,175\ \text{kg}\cdot\ \text{m}^2$$

> Η απευθείας χρήση του έτοιμου τύπου $I = \frac{M}{3}\left[\ L^2 - 3aL + 3a^2\ \right]$ από τη σχετική λυμένη άσκηση μηδενίζεται εκτός αν τον αποδείξετε πρώτα.

Ελαστική κρούση

Διατηρείται και η στροφορμή (ως προς το Α) και η κινητική ενέργεια του συστήματος.

$$L_A' = L_A \Rightarrow I_A\omega + m\upsilon b = mub \Rightarrow m(u-\upsilon) = \frac{I_A}{b^2}\omega b \Rightarrow m(u-\upsilon) = m_{AB}\upsilon_B \qquad (1)$$

$$K' = K \Rightarrow \frac{1}{2}I_A\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow m(u^2-\upsilon^2) = \frac{I_A}{b^2}\omega^2 b^2 \Rightarrow m(u-\upsilon)(u+\upsilon) = m_{AB}\upsilon_B^2 \qquad (2)$$

όπου $m_{AB} = \frac{I_A}{b^2} = \frac{\frac{7}{48}ML^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{7}{12}M = \frac{7}{12}1,2 = 0,7\ \text{kg}$

Διαιρώντας κατά τα γνωστά την (2) με την (1) καταλήγουμε σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων :

$$m(u-\upsilon) = m_{AB}\upsilon_B \qquad (1)$$

$$u + \upsilon = \upsilon_B \qquad (2')$$

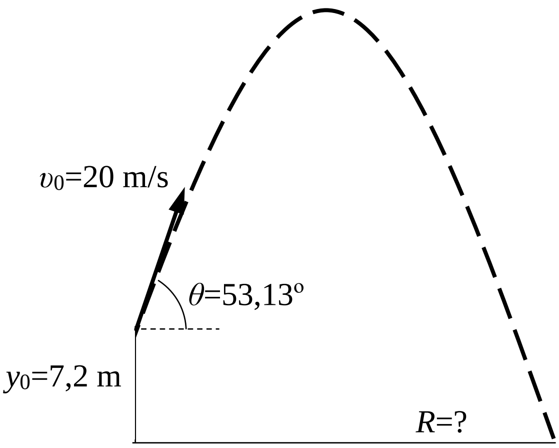
που είναι ίδιες με της κεντρικής ελαστικής κρούσης υλικών σημείων, βλήματος με αρχική ταχύτητα u πάνω σε ακίνητο στόχο μάζας m_{AB} και άρα έχουν λύση

$$\upsilon = \frac{m - m_{ab}}{m + m_{ab}}u = \frac{0,3-0,7}{0,3+0,7}10 = -4\ \text{m/s}$$

$$\upsilon_B = \frac{2m}{m+m_{ab}}u = \frac{2\cdot\ 0,3}{0,3+0,7}10 = 6\ \text{m/s}, \qquad \omega = \frac{\upsilon_B}{b} = \frac{6}{0,5} = 12\ \text{rad/s}$$

ΘΕΜΑ 2.

Βρείτε το βεληνεκές R της βολής.
g = 10 N/kg.



$$\sin\theta = 0,8 \qquad \cos\theta = 0,6$$
$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\theta = 20 \times 0,6 = 12 \text{ m/s}$$
$$\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\theta = 20 \times 0,8 = 16 \text{ m/s}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$y = y_0 + \upsilon_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y = 7,2 + 16t - 5t^2$$

Βρίσκουμε το χρόνο πτήσης T>0 , θέτοντας y=0 και λύνοντας τη δευτεροβάθμια

$$5T^2 - 6 \cdot T - 7,2 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} = \sqrt{16^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-7,2)} = \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20$$

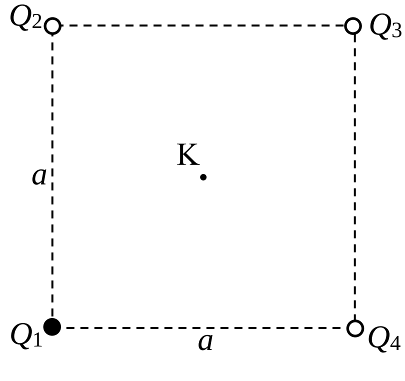
$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{16 \pm 20}{10} = 3,6 \text{ s} \quad \text{και} \quad -0,6 \text{ s} \quad \text{άρα} \quad T = 3,6 \text{ s}$$

Το βεληνεκές είναι : $R = \upsilon_{0x} T = 12 \cdot 3,6 = 43,2$ m

Η απευθείας χρήση των τύπων $R = \frac{\upsilon_0 \cos\theta}{g}\left(\upsilon_0 \sin\theta + \sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\theta + 2 g y_0}\right)$ και $R = \frac{R_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 + y_0/h_0}\right)$ από τη σχετική λυμένη άσκηση μηδενίζεται εκτός αν τους έχετε αποδείξει πρώτα.

ΘΕΜΑ 3.

Να υπολογίσετε το ηλεκτροστατικό δυναμικό στο κέντρο Κ του τετραγώνου πλευράς a που δημιουργούν τα τέσσερα σημειακά φορτία στις κορυφές του. [0,7]



Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο Κ του τετραγώνου. [1,1]

Πόσο έργο θα παράγει το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημειακό φορτίο q= –2 mC, το οποίο φέρνουμε από πολύ μακριά και το τοποθετούμε στο κέντρο του τετραγώνου; [0,7]

$1/4\pi\varepsilon_0 = 9,00\times10^9$ NC^2/m^2, a = 1 cm,
Q_1=Q=1,4142 nC= –Q_2= –Q_3 = –Q_4

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Διαγώνιος τετραγώνου $d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} = 1,4142$ cm

Απόσταση φορτίων από το κέντρο $r_i = \frac{d}{2} = 0,7071$ cm για $i = 1,2,3,4$

Δυναμικό : $V_K = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \frac{Q_3}{r_3} + \frac{Q_4}{r_4}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{d/2} - \frac{Q}{d/2} - \frac{Q}{d/2} - \frac{Q}{d/2}\right) =$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d/2} = -9\times10^9\,\frac{2\times1,4142\times10^{-9}}{0,7071\times10^{-2}} = -36\times10^2 = -3,60\ \text{kV}$$

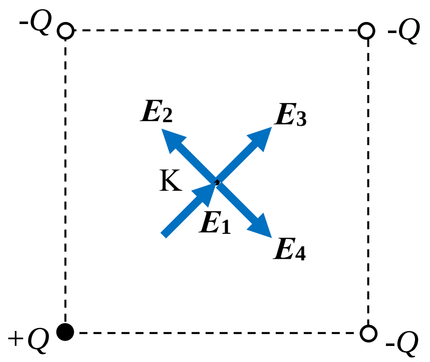
Από τον παραπάνω τύπο φαίνεται ότι για κάποιο σημείο πολύ μακριά από το τετράγωνο ($\forall\ i : r_i \to\infty$) το δυναμικό και άρα και η δυναμική ενέργεια $U=qV$ είναι μηδέν.

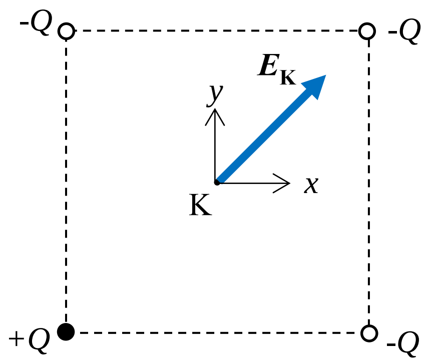
Τα μέτρα των ηλεκτρικών πεδίων κάθε σημειακού φορτίου είναι όλα ίσα μεταξύ τους καθώς τα φορτία είναι ίσα κατ' απόλυτη τιμή και απέχουν ίση απόσταση από το κέντρο Κ:

$$E = \left|\vec{E}_i\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_i|}{r_i^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(d/2)^2} = 9\times10^9\,\frac{1,4142\times10^{-9}}{\left(0,7071\times10^{-2}\right)^2} = 25,4561\times10^4 = 254,561\ \text{kV/m}\ \text{για}\ i=1,2,3,4,$$

Οι κατευθύνσεις τους είναι πάνω στις διαγώνιες του τετραγώνου, όπως στο σχήμα και άρα τα δύο πεδία, από το Q_2 και Q_4 αλληλοαναιρούνται επειδή είναι αντίθετα ενώ τα άλλα δύο είναι ίσα και προστίθενται:

Ηλεκτρικό πεδίο : $\vec{E}_K = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = \vec{E}_1 + \vec{E}_3 = 2\vec{E}_1$





Άρα το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο είναι κατά την κατεύθυνση της διαγωνίου 1-3, δηλ. σχηματίζει 45° με την οριζόντιο με φορά προς τα πάνω και δεξιά, ενώ έχει μέτρο ίσο με $2E$:

$$\boxed{\left|\vec{E}_K\right| = 2\left|\vec{E}_1\right| = 509\ \text{kV/m}\ \text{στις}\ 45^{\circ}\ \text{από την οριζόντιο.}}$$

Με διανύσματα. Το μοναδιαίο της διαγωνίου 1-3 είναι ίσο με :

$$\hat{n} = n_x\hat{x} + n_y\hat{y} = (\hat{n}\cdot\ \hat{x})\hat{x} + (\hat{n}\cdot\ \hat{y})\hat{y} = \cos 45^{\circ}\,\hat{x} + \cos 45^{\circ}\,\hat{y} = \frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}$$

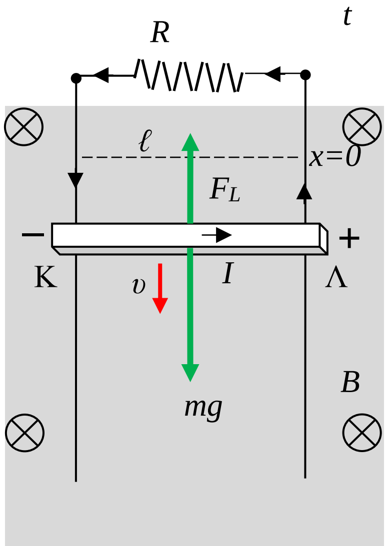
$$\vec{E}_K = \left|\vec{E}_K\right|\hat{n} = 509\,\frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}} = 360(\hat{x}+\hat{y})\ \text{kV/m}$$

Από τον ορισμό της δυναμικής ενέργειας, το έργο είναι ίσο με τη διαφορά της αρχικής και της τελικής δυναμικής ενέργειας

$$\boxed{W_E(\infty\to\text{K}) = U_\infty - U_\text{K} = -U_\text{K} = -qV_\text{K} = -(-2\times10^{-3})(-3,6\times10^{3}) = -7,20\ \text{J}}$$

ΘΕΜΑ 4.

Η λεπτή αγώγιμη ράβδος ΚΛ αφήνεται να πέσει λόγω του βάρους της, μέσα σε οριζόντιο σταθερό μαγνητικό πεδίο, όντας συνεχώς σε επαφή με τις κατακόρυφες αγώγιμες ράγες.



$$\mathscr{E} = B\upsilon\ell$$
$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}$$
$$F_L = BI\ell$$

Υπολογίστε την οριακή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho}$, που θα αποκτήσει η ράβδος. [0,2]

Πόση ισχύς καταναλώνεται στην ωμική αντίσταση στη μόνιμη κατάσταση; [0,2]

Να σχεδιάσετε την πολικότητα της επαγωγικής τάσης και τη φορά του ηλεκτρικού ρεύματος στο κύκλωμα και να υπολογίσετε τις τιμές τους στη μόνιμη κατάσταση. [0,3]

Δείξτε ότι η σταθερά $\tau = mR/B^2\ell^2$ έχει μονάδες χρόνου και υπολογίστε την τιμή της. Στη συνέχεια δείξτε ότι $\upsilon_{o\rho} = g\tau$. [0,4]

Δείξτε ότι ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα για τη ράβδο καταλήγει στη μορφή $\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(\upsilon_{o\rho} - \upsilon\right)$. [0,6]

Ολοκληρώστε τον και βρείτε τις χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της ράβδου. [0,6]

Τι διάστημα έχει διανύσει η ράβδος και με τι ταχύτητα κινείται μετά από τρεις σταθερές χρόνου $t = 3\tau$ [0,2]

R=2,50 Ω, m=400 g, ℓ = 50,0 cm, B=2,00 T, g=9,80 N/kg

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια της ράβδου που κινείται, προς τα κάτω, μέσα στο μαγνητικό πεδίο δέχονται δύναμη Lorenz $F = -e\vec{\upsilon}\times\vec{B}$ που τα ωθεί προς το άκρο Κ της ράβδου. Άρα η πολικότητα της επαγωγικής τάσης είναι Κ(-) και Λ(+). Το ηλεκτρικό ρεύμα ορίζεται να έχει φορά αντίθετη από τη φορά κίνησης των ηλεκτρονίων.

Με διαφορετικό τρόπο. Το ρεύμα πρέπει να έχει τη φορά του σχήματος ώστε η δύναμη Laplace να είναι προς τα πάνω (Lenz). Η ράβδος αποτελεί πηγή για το κύκλωμα. Μέσα στην πηγή το ρεύμα κατευθύνεται από τον αρνητικό (–) προς το θετικό (+) πόλο. Αυτή η μετακίνηση φορτίων και η συγκέντρωση τους στα άκρα της ράβδου δημιουργεί τους πόλους της πηγής. Τα θετικά φορτία πρέπει να πάνε προς το θετικό πόλο για να τον φτιάξουν τον θετικό πόλο και αντίστοιχα τα αρνητικά. Άρα η πολικότητα της επαγωγικής τάσης είναι Κ(-) και Λ(+).

Οριακή ταχύτητα όταν

$$\sum F = 0 \Rightarrow W - F_{L,\tau\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow \quad BI_{\tau\varepsilon\lambda}\ell = mg \Rightarrow B\frac{B\upsilon_{o\rho}\ell}{R}\ell = mg \Rightarrow \upsilon_{o\rho} = \frac{mgR}{B^2\ell^2} = \frac{0,4\cdot\ 9,8\cdot\ 2,5}{2^2\cdot\ 0,5^2}$$

$$\boxed{\upsilon_{o\rho} = 9,80 \text{ m/s}}$$

Καταναλώνεται όση παράγεται από τη δύναμη του βάρους

$$P_{out}=P_{in}=W\upsilon_{o\rho}=mg\frac{mgR}{B^2\ell^2}=\frac{0,4^2\cdot\ 9,8^2\cdot\ 2,5}{2^2\cdot\ 0,5^2}=0,4\cdot\ 9,8^2\Rightarrow$$

$$\boxed{P_{out}=38,416\simeq 38,4\ \mathrm{W}}$$

$$BI_{\tau\varepsilon\lambda}\ell=mg\Rightarrow I_{\tau\varepsilon\lambda}=\frac{mg}{B\ell}=\frac{0,4\cdot\ 9,8}{2\cdot\ 0,5}\Rightarrow$$

$$\boxed{I_{\tau\varepsilon\lambda}=3,92\ \mathrm{A}}$$

$$\mathscr{E}_{\tau\varepsilon\lambda}=B\upsilon_{o\rho}\ell=2\cdot\ 9,8\cdot\ 0,5\Rightarrow$$

$$\boxed{\mathscr{E}_{\tau\varepsilon\lambda}=9,80\ \mathrm{V}}$$

$$[\tau]=\left[\frac{mR}{B^2\ell^2}\right]=\frac{\mathrm{kg}\cdot\ \Omega}{\mathrm{T}^2\mathrm{m}^2}=\frac{\mathrm{kg}\cdot\ \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}}{\dfrac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{A}^2\mathrm{m}^2}\cdot\ \mathrm{m}^2}=\frac{\mathrm{kg}\cdot\ \mathrm{V}\cdot\ \mathrm{A}}{\mathrm{N}^2}=\frac{\mathrm{kg}\cdot\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\cdot\ \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{N}^2}=\frac{\mathrm{kg}\cdot\ \mathrm{N}\cdot\ \mathrm{m}}{\mathrm{N}\cdot\ \mathrm{N}\cdot\ \mathrm{s}}=\frac{\mathrm{kg}\cdot\ \mathrm{m}}{\mathrm{kg}\cdot\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\ \mathrm{s}}=\mathrm{s}$$

$$\boxed{\tau=\frac{mR}{B^2\ell^2}=\frac{0,4\cdot\ 2,5}{2^2\cdot\ 0,5^2}=1,00\ \mathrm{s}}$$

Οι δυνάμεις που δρουν στη ράβδο είναι το βάρος $W=mg$ και η δύναμη Laplace

$$F_L=BI\ell=B\frac{\mathscr{E}}{R}\ell=B\frac{B\upsilon\ell}{R}\ell=\frac{B^2\ell^2}{R}\upsilon$$

$$\sum F=ma\Rightarrow\ W-F_L=ma\Rightarrow\ mg-\frac{B^2\ell^2}{R}\upsilon=ma\Rightarrow\ a=g-\frac{B^2\ell^2}{mR}\upsilon\Rightarrow\ a=\frac{B^2\ell^2}{mR}\left(\frac{gmR}{B^2\ell^2}-\upsilon\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{1}{\tau}\left(\upsilon_{o\rho}-\upsilon\right)}$$

Ολοκληρώνουμε κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $u=\upsilon_{o\rho}-\upsilon\Rightarrow\ du=-d\upsilon$

$$\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{1}{\tau}\left(\upsilon_{o\rho}-\upsilon\right)\Rightarrow\frac{d\upsilon}{\upsilon_{o\rho}-\upsilon}=\frac{dt}{\tau}\Rightarrow\int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon_{o\rho}-\upsilon}=\frac{1}{\tau}\int_0^t dt\Rightarrow-\int_{\upsilon_{o\rho}}^{\upsilon_{o\rho}-\upsilon}\frac{du}{u}=\frac{t}{\tau}\Rightarrow\ \ln u\Big|_{\upsilon_{o\rho}}^{\upsilon_{o\rho}-\upsilon}=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln\left(\upsilon_{o\rho}-\upsilon\right)-\ln\left(\upsilon_{o\rho}\right)=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow\ln\left(\frac{\upsilon_{o\rho}-\upsilon}{\upsilon_{o\rho}}\right)=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow\frac{\upsilon_{o\rho}-\upsilon}{\upsilon_{o\rho}}=e^{-t/\tau}\Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon=\upsilon_{o\rho}\left(1-e^{-t/\tau}\right)}$$

Παραγωγίζοντας βρίσκουμε την επιτάχυνση

$$a(t)=\frac{d\upsilon(t)}{dt}=\upsilon_{o\rho}\frac{d}{dt}\left(1-e^{-t/\tau}\right)=\frac{\upsilon_{o\rho}}{\tau}e^{-t/\tau}\Rightarrow$$

$$\boxed{a(t)=ge^{-t/\tau}}$$

και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τη θέση

$$x(t)=\int_0^t\upsilon(t)dt=\upsilon_{o\rho}\int_0^t\left(1-e^{-t/\tau}\right)dt=\upsilon_{o\rho}t-\upsilon_{o\rho}\int_0^t e^{-t/\tau}dt=\upsilon_{o\rho}t+\upsilon_{o\rho}\tau\int_0^{-t/\tau}e^u du=\upsilon_{o\rho}t+\upsilon_{o\rho}\tau\Big[\ e^u\ \Big]_0^{-t/\tau}=$$

$$=\upsilon_{o\rho}t+\upsilon_{o\rho}\tau(e^{-t/\tau}-1)\Rightarrow$$

$$\boxed{x(t)=\upsilon_{o\rho}(t-\tau)+\upsilon_{o\rho}\tau e^{-t/\tau}}$$

με την αλλαγή μεταβλητής: $u=-t/\tau\Rightarrow du=-dt/\tau$.

Για $t=6\tau$

$$\upsilon(6\tau)=\upsilon_{o\rho}\left(1-e^{-6\tau/\tau}\right)=9,80(1-e^{-6})=9,80(1-0,002479)=9,78\ \mathrm{m/s}$$

$$a(6\tau)=ge^{-6\tau/\tau}=9,80e^{-6}=0,0243\ \mathrm{m/s^2}$$

$$x(6\tau) = \upsilon_{o\rho}(6\tau - \tau) + \upsilon_{o\rho}\tau e^{-6\tau/\tau} = \upsilon_{o\rho}\tau(5 + e^{-6}) = 9,8 \cdot 1\left(5 + 0,00248\right) = 49,0243 \simeq 49,0 \text{ m}$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ