**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**
**ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2021-22**

**ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ**

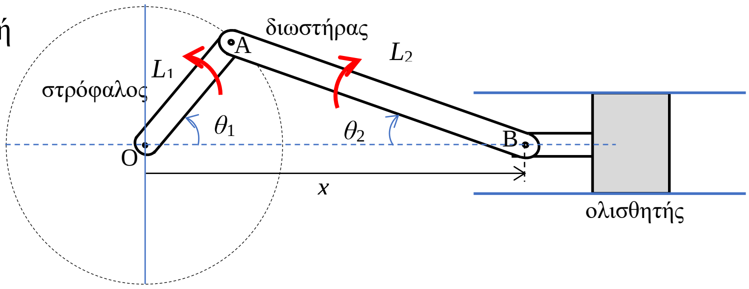
**Πέμπτη, 10 Φεβρουαρίου 2022 9-11 π.μ. αίθ. 1, 3, 5, 7, 109**
**Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr) Δ**

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα και αξίας 2,5 μονάδων

**ΘΕΜΑ 1.**

Ο στρόφαλος ΟΑ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}_1 = 100,0$ rad/s .

Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση $\ddot{\theta}_2$ του διωστήρα ΑΒ και την επιτάχυνση $\ddot{x}$ του ολισθητή όταν η γωνία $\theta_1 = 36,87^\circ$




$L_1$=100 mm, $L_2$=400 mm

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

Κρατάμε όσα σημαντικά ψηφία θέλουμε στους ενδιάμεσους υπολογισμούς (τουλάχιστον 5) όμως στρογγυλοποιούμε την τελική απάντηση σε 3 σημαντικά ψηφία, όσα και των δεδομένων.

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta_2 = \dfrac{L_1}{L_2}\sin\theta_1 & (1) \\ x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \sin\theta_2 = \dfrac{1}{4}0,6 = 0,15000 \Rightarrow \cos\theta_2 = 0,98869 \Rightarrow \theta_2 = 8,6269^\circ \\ x = \ldots \text{ δεν χρειάζεται} \end{array}$$

Παραγωγίζουμε για να βρούμε τις ταχύτητες

$$\begin{cases} \dot{\theta}_2 = \dfrac{L_1\cos\theta_1}{L_2\cos\theta_2}\dot{\theta}_1 & (3) \\ \dot{x} = -L_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - L_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{\theta}_2 = \dfrac{1\cdot\ 0,8}{4\cdot\ 0,988685997}100 = 20,2288695 \text{ rad/s} \\ \dot{x} = \ldots \text{ δεν χρειάζεται} \end{array}$$

Παραγωγίζουμε άλλη μια φορά για να βρούμε τις επιταχύνσεις ($\dot{\theta}_1 = \text{σταθ.} \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = 0$)

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{L_1\sin\theta_1}{L_2\cos\theta_2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{L_1\cos\theta_1}{L_2}\dot{\theta}_1(-1)\frac{(-\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2}\dot{\theta}_2 = \frac{L_1}{L_2}\frac{\dot{\theta}_1}{\cos\theta_2}\left(-\sin\theta_1\dot{\theta}_1 + \frac{\cos\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_2}\dot{\theta}_2\right)$$

$$\ddot{x} = -L_1\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1 - L_2\left(\ddot{\theta}_2\sin\theta_2 + \dot{\theta}_2^2\cos\theta_2\right)$$

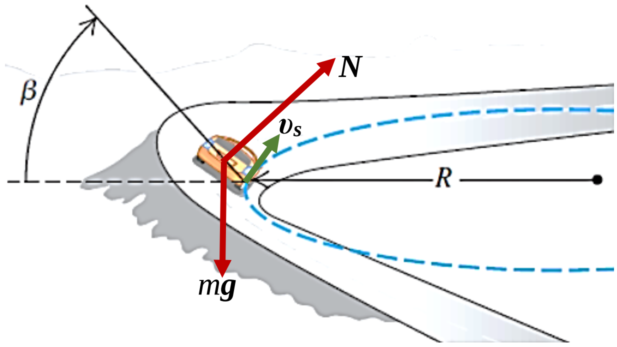
$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{4}\times\frac{100}{0,988685997}\left(-0,6\times100 + \frac{0,8\times0,15}{0,988685997}20,2288695\right) = -1.455,08172 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{x} = -0,1\times100^2\times0,8 - 0,4\left(-1.455,08172\times0,15 + 20,2288695^2\times0,988685997\right) = -874,526053 \text{ m/s}^2$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \ddot{\theta}_2 = -1460 \text{ rad/s} \\ \ddot{x} = -875 \text{ m/s}^2 \end{array}}$$

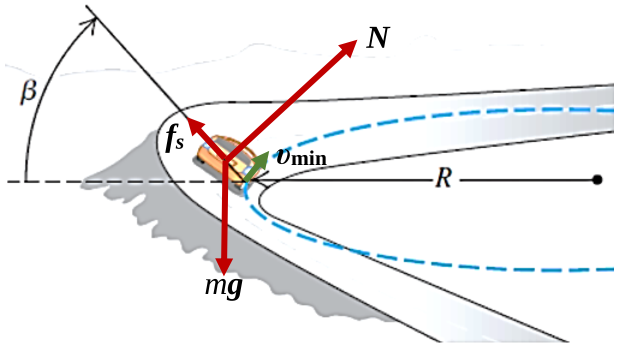
**ΘΕΜΑ 2.**

Ποια είναι η ταχύτητα ασφαλείας $\upsilon_s$ της κεκλιμένης στροφής; Δηλαδή η ταχύτητα που πρέπει να έχει το όχημα ώστε να καταφέρει τη στροφή χωρίς την ανάγκη στατικής τριβής $\boldsymbol{f_s}$ . [0,5]



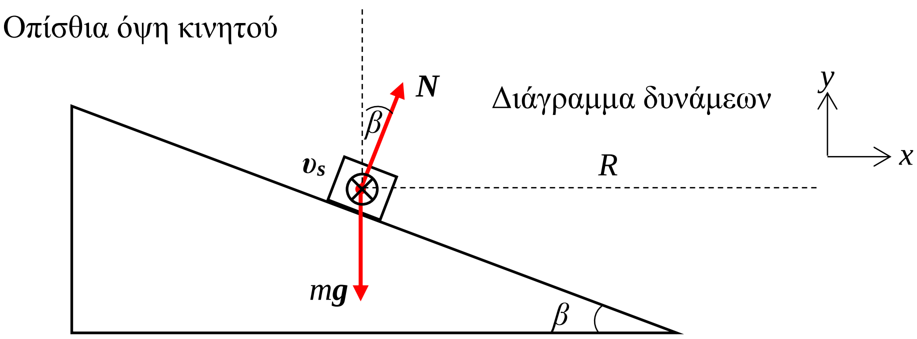

Ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα $\upsilon_{\min}$ με την οποία μπορεί το όχημα να πάρει τη στροφή ; [1,0]

Αν ταχύτητα $\upsilon$ του οχήματος βρίσκεται στο διάστημα $\upsilon_{\min} \le \upsilon \le \upsilon_s$ από ποια έκφραση δίνεται η στατική τριβή $\boldsymbol{f_s}$ ; [1,0]




**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**Ταχύτητα ασφαλείας**

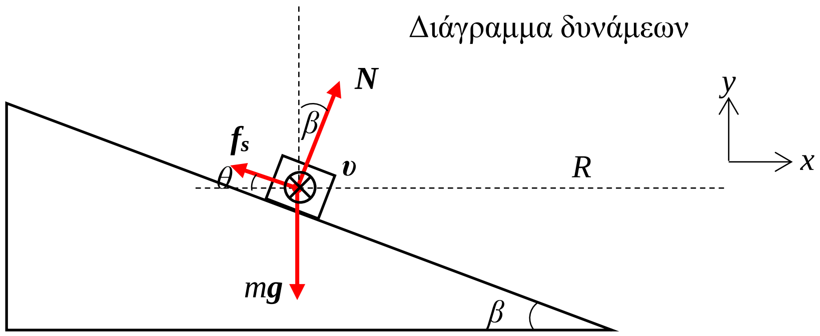



$$\sum F_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\beta = m\frac{\upsilon_s^2}{R} \quad (1) \qquad \sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\beta - mg = 0 \Rightarrow N\cos\beta = mg \quad (2)$$

Διαιρώντας την (1) με τη (2)

$$\frac{N\sin\beta}{N\cos\beta} = \frac{m\upsilon_s^2 / R}{mg} \Rightarrow \upsilon_s^2 = gR\tan\beta \Rightarrow \quad \upsilon_s = \sqrt{gR\tan\beta}$$

**Ελάχιστη ταχύτητα**




$$\sum F_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\beta - f_s\cos\beta = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad (1) \qquad \sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\beta + f_s\sin\beta - mg = 0 \quad (2)$$

Από την (2) βλέπουμε ότι η $f_s$ και η $N$ μεταβάλλονται αντίστροφα. Αν αυξηθεί η $f_s$ θα πρέπει να μειωθεί η $N$, αφού τα $m$, $g$, $\theta$ είναι σταθερά. Όταν μειώνεται η ταχύτητα του οχήματος, για να ισχύει η (1) πρέπει να μειωθεί η $N$ και να αυξηθεί η $f_s$. Η ταχύτητα θα φτάσει στην ελάχιστη τιμή της όταν η στατική τριβή θα φτάσει στη μέγιστη επιτρεπτή τιμή της $f_{s,\max} = \mu_s N$ σε σχέση με την $N$.

$$N\sin\beta - f_{s,\max}\cos\beta = m\frac{\upsilon_{\min}^2}{R} \Rightarrow N(\sin\beta - \mu_s\cos\beta) = m\frac{\upsilon_{\min}^2}{R} \qquad (1)$$

$$N\cos\beta + f_{s,\max}\sin\beta - mg = 0 \Rightarrow N(\cos\beta + \mu_s\sin\beta) = mg \qquad (2)$$

Διαιρώντας : $\dfrac{m\frac{\upsilon_{\min}^2}{R}}{mg} = \dfrac{\sin\beta - \mu_s\cos\beta}{\cos\beta + \mu_s\sin\beta} \Rightarrow \upsilon_{\min}^2 = gR\dfrac{\sin\beta - \mu_s\cos\beta}{\cos\beta + \mu_s\sin\beta} \Rightarrow$

$$\boxed{\upsilon_{\min} = \sqrt{gR\frac{\tan\beta - \mu}{1 + \mu\tan\beta}}}$$

**Μέτρο της στατικής τριβής** όταν $f_s < \mu_s N$ και $\upsilon_{\min} < \upsilon < \upsilon_s$

$$\sum F_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\beta - f_s\cos\beta = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad (1) \qquad \sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\beta + f_s\sin\beta = mg \quad (2)$$

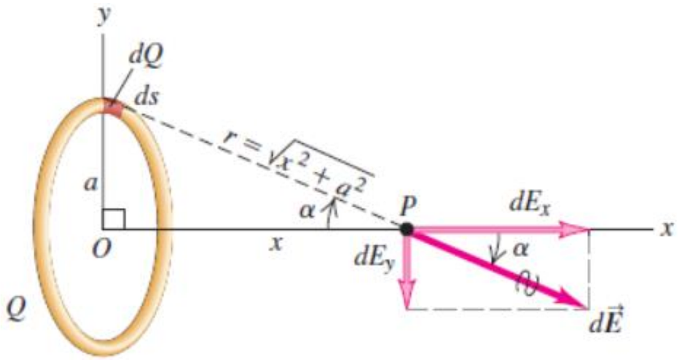
$$D = \begin{vmatrix} \sin\beta & -\cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix} = \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$D_f = \begin{vmatrix} \sin\beta & m\upsilon^2/R \\ \cos\beta & mg \end{vmatrix} = mg\sin\beta - m\frac{\upsilon^2}{R}\cos\beta = \frac{m\cos\beta}{R}\left(gR\frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \upsilon^2\right) = \frac{m\cos\beta}{R}\left(gR\tan\beta - \upsilon^2\right)$$

$$\boxed{f_s = \frac{D_f}{D} = \frac{m\cos\beta}{R}(\upsilon_s^2 - \upsilon^2)}$$

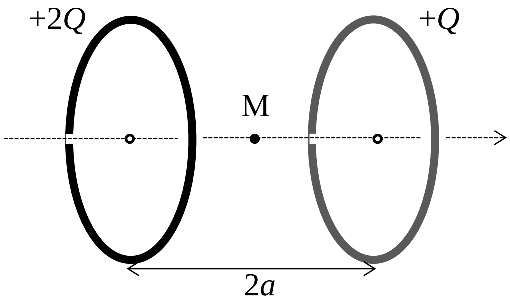
**ΘΕΜΑ 3.**

Να βρείτε την έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί, λεπτό ομοιόμορφα θετικά φορτισμένο δακτυλίδι πάνω στον άξονά του. [1,0]




Να δείξετε ότι για πολύ μικρά $x$ ($x \ll a$) η δύναμη που ασκεί ο δακτύλιος σε ένα αρνητικό σημειακό φορτίο $-q$ είναι δύναμη επαναφοράς. [0,5]

Να σχεδιάσετε την κατεύθυνση και να υπολογίσετε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργούν δύο ίδιας ακτίνας, λεπτά, ομοιόμορφα θετικά φορτισμένα δακτυλίδια στο μέσο Μ του κοινού τους άξονα. Η ακτίνα των δακτυλιδιών είναι $a$ και η απόσταση μεταξύ τους $2a$. Το ένα δακτυλίδι έχει διπλάσιο φορτίο από το άλλο.
$1/4\pi\varepsilon_0 = 9\times10^9$ NC$^2$/m$^2$, $a = 2$ mm, $Q = 5{,}66$ pC. [1,0]




**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

Βρίσκουμε το δυναμικό στον άξονα του δακτυλιδιού χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας, δηλαδή χωρίζοντας το δαχτυλίδι σε σημειακά στοιχειώδη φορτία $dq$ και αθροίζοντας τις συνεισφορές τους. Κάθε στοιχείο $dq$ της κυκλικής κατανομής απέχει την ίδια απόσταση $\sqrt{x^2+a^2}$ από το σημείο $x$. Παίρνουμε ως αρχή των αξόνων το κέντρο του δακτυλιδιού και τον άξονά του να είναι ο άξονας $x$.

$$V(x,0,0) = \int_0^Q dV = \int_0^Q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\int_0^Q dq \Rightarrow V(x,0,0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Από το δυναμικό βρίσκουμε το πεδίο:

$$\vec{E}(x,0,0) = -\vec{\nabla}V(x,0,0) = -\frac{\partial V(x,0,0)}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V(x,0,0)}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V(x,0,0)}{\partial z}\hat{z} =$$

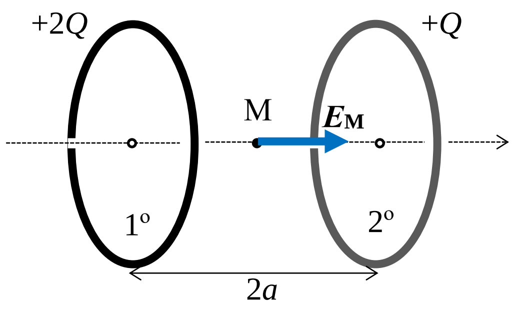
$$= -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\hat{x} - 0 - 0 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)\left(x^2+a^2\right)^{-3/2}\hat{x} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E}(x,0,0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\hat{x}}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο του 1ου δακτυλιδιού ($+2Q$) έχει μέτρο διπλάσιο από αυτό του πεδίου του 2ου δακτυλιδιού ($+Q$) και δείχνει προς τα δεξιά ενώ το πεδίο του 2ου δακτυλιδιού δείχνει προς τα αριστερά.

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Qa}{\left(a^2+a^2\right)^{3/2}}\hat{x} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qa}{\left(a^2+a^2\right)^{3/2}}\hat{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2\sqrt{8}}\hat{x}$$

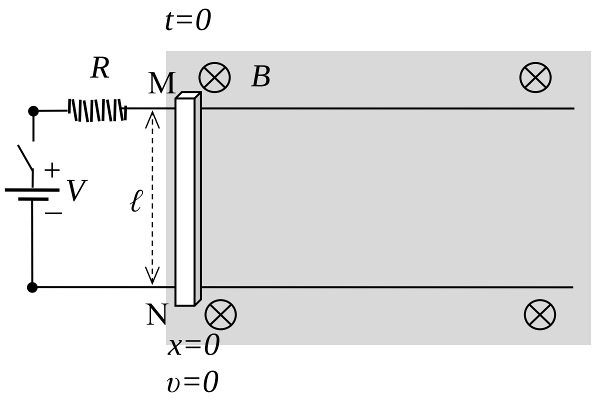
$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2\sqrt{8}} = 9\times10^9\frac{5{,}66\times10^{-12}}{(2\times10^{-3})^2\sqrt{8}} = \frac{9\times5{,}66}{4\sqrt{8}}\times10^3 = 4{,}50\times10^3 \text{ N/C}$$

**ΘΕΜΑ 4.**

Η αγώγιμη ράβδος ΜΝ μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές στις οριζόντιες αγώγιμες ράγες που βρίσκονται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο όπως στο σχήμα. Το όλο κύκλωμα της διάταξης θεωρούμε ότι παρουσιάζει ωμική αντίσταση $R$. Τη χρονική στιγμή μηδέν εφαρμόζουμε στους ακροδέκτες της διάταξης ηλεκτρική τάση, κλείνοντας τον διακόπτη, ώστε να επιταχύνουμε τη ράβδο προς τα δεξιά μέσω της δύναμης Laplace.

$V$=100 V, $R$=2,5 Ω, $B$=2 T, $m$= 400g, $\ell$= 0,5m




Υπολογίστε το αρχικό ρεύμα $I_0$ που θα διατρέξει το κύκλωμα όταν κλείσουμε το διακόπτη, την αρχική δύναμη Laplace $F_{L0}$ που θα ασκηθεί στη ράβδο και την αρχική της επιτάχυνση $a_0$. [0,3]

Σχεδιάστε την πολικότητα της επαγωγικής τάσης όταν η ράβδος αρχίσει να κινείται. Πόση είναι η επαγωγική τάση και το ρεύμα στο κύκλωμα όταν η ράβδος φτάσει στην οριακή ταχύτητα και κινείται πλέον ομαλά; Υπολογίστε την οριακή ταχύτητα $\upsilon_{op}$ που θα αποκτήσει η ράβδος. [0,4]

Αν $\tau = mR/B^2\ell^2$ δείξτε ότι $\upsilon_{op} = a_0\tau$. Δείξτε ότι η σταθερά $\tau$ έχει μονάδες χρόνου και υπολογίστε την τιμή της. [0,4]

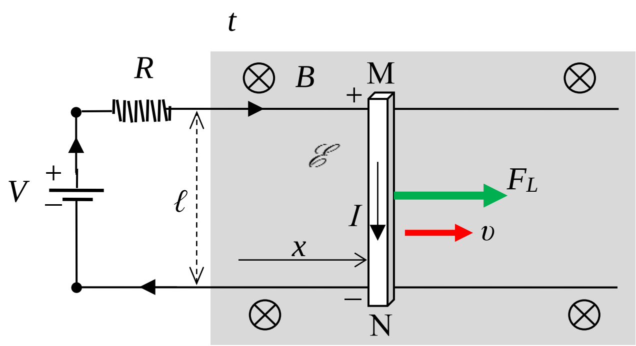
Βρείτε τις χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της ράβδου. [1,2]

Τι επιτάχυνση έχει και με τι ταχύτητα κινείται η ράβδος μετά από τρεις σταθερές χρόνου $t = 3\tau$ [0,2]

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

Αποτελέσματα σε 3 σημαντικά ψηφία

$$\mathscr{E} = B\upsilon\ell$$
$$I = \frac{V-\mathscr{E}}{R}$$
$$F_L = BI\ell$$




**Αρχικές τιμές**

$$V = I_0 R \Rightarrow I_0 = \frac{V}{R} = \frac{100}{2,5} = 40 \text{ A}$$

$$F_{L0} = BI_0\ell = 2\cdot 40\cdot 0,5 = 40 \text{ N}$$

$$a_0 = \frac{\sum F}{m} = \frac{F_{L0}}{m} = \frac{40}{0,4} = 100 \text{ m/s}^2$$

$$a_0 = \frac{F_{L0}}{m} = \frac{BI_0\ell}{m} = \frac{BV\ell}{mR}$$

**Τελικές τιμές**

Με το κλείσιμο του διακόπτη θα διατρέξει τη ράβδο ηλεκτρικό ρεύμα $I_0 = \dfrac{V}{R}$ και όντας μέσα σε μαγνητικό πεδίο θα της ασκηθεί δύναμη Laplace που θα την επιταχύνει. Αποκτώντας η ράβδος ταχύτητα, θα αναπτυχθεί στα άκρα της επαγωγική τάση $\mathscr{E} = B\upsilon\ell$, **με πολικότητα αντίθετη της πηγής (M+ N-).** Για το λόγο αυτό θα αντιτίθεται στην κίνησή της αφού έτσι μειώνεται το ρεύμα στο κύκλωμα $V = IR + \mathscr{E}$ (Kirchhoff) $\Rightarrow I = \dfrac{V-\mathscr{E}}{R}$ και άρα η δύναμη Laplace $F_L = BI\ell$ που επιταχύνει τη ράβδο (Lenz). Η ταχύτητα θα σταματήσει να αυξάνεται όταν η δύναμη Laplace μηδενιστεί και στη συνέχεια η ράβδος θα κινείται με σταθερή ταχύτητα (ορική).

Άρα $F_{Lf} = 0 \Rightarrow BI_f\ell = 0 \Rightarrow I_f = 0 \Rightarrow \dfrac{V-\mathscr{E}_f}{R} = 0 \Rightarrow \mathscr{E}_f = V \Rightarrow V = B\upsilon_{o\rho}\ell \Rightarrow \upsilon_{o\rho} = \dfrac{V}{B\ell}$

| |
|---|
| Οπότε: $F_{Lf} = 0$, $I_f = 0$, $\mathscr{E}_f = V = 100\ \text{V}$, $\upsilon_{o\rho} = \dfrac{V}{B\ell} = \dfrac{100}{2\cdot 0,5} = 100\ \text{m/s}$ |

**ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ:** Το κύκλωμα αποτελείται από ένα και μοναδικό βρόχο και άρα θα διαρρέεται από ένα και μοναδικό ρεύμα παντού. Από τις δύο πηγές που υπάρχουν στο κύκλωμα η μία ($V$) δημιουργεί αρχικά και υποστηρίζει αυτό το ρεύμα ενώ η δεύτερη ($\mathscr{E}$), αφού εμφανιστεί, του αντιτίθεται και το εξασθενεί. Οι δύο πηγές παρέχουν ηλεκτρικά φορτία που κατανέμονται στις επιφάνειες των αγωγών και δημιουργούν ένα και μοναδικό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ μέσα στους αγωγούς το οποίο προκαλεί μια και μοναδική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J} = \sigma\vec{E}$. Το ηλεκτρικό πεδίο κινεί τους ελεύθερους φορείς ηλεκτρικού φορτίου προς την κατεύθυνσή του $\vec{J} \equiv nq\vec{\upsilon}_{o\lambda\iota\sigma\theta}$ αν είναι θετικοί ή προς την αντίθετη $\vec{J} \equiv n(-q)(-\vec{\upsilon}_{o\lambda\iota\sigma\theta})$ αν είναι αρνητικοί. Αλλά η φορά αυτού του φυσικού μεγέθους που ονομάζουμε ηλεκτρικό ρεύμα *I=J/A* και μπαίνει σε όλους τους τύπους, είναι μία και μοναδική και ταυτίζεται με τη φορά της πυκνότητας ρεύματος $\vec{J}$ που ταυτίζεται με τη φορά του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$. Δεν μπορούν να υπάρξουν δύο ρεύματα με αντίθετες φορές καθώς δεν μπορεί σε ένα σημείο του αγωγού κάποιοι θετικοί φορείς να κινούνται προς μια κατεύθυνση και κάποιοι άλλοι, επίσης θετικοί, να κινούνται προς την αντίθετη, αφού τους κινεί το ίδιο ηλεκτρικό πεδίο σε εκείνο το σημείο! Η έννοια ενός δεύτερου ξεχωριστού επαγωγικού ρεύματος $I_{\varepsilon\pi}$ είναι λάθος από φυσική άποψη. Υπάρχει ένα και μοναδικό ρεύμα *I* και άρα μια και μοναδική δύναμη Laplace, $BI\ell$.

$$a_0\tau = \frac{VB\ell}{mR}\frac{mR}{B^2\ell^2} = \frac{V}{B\ell} = \upsilon_{o\rho}$$

$$[\tau] = \left[\frac{mR}{B^2\ell^2}\right] = \frac{\text{kg}\cdot\ \Omega}{\text{T}^2\text{m}^2} = \frac{\text{kg}\cdot\ \dfrac{\text{V}}{\text{A}}}{\dfrac{\text{N}^2}{\text{A}^2\text{m}^2}\cdot\ \text{m}^2} = \frac{\text{kg}\cdot\ \text{V}\cdot\ \text{A}}{\text{N}^2} = \frac{\text{kg}\cdot\ \dfrac{\text{J}}{\text{C}}\cdot\ \dfrac{\text{C}}{\text{s}}}{\text{N}^2} = \frac{\text{kg}\cdot\ \text{N}\cdot\ \text{m}}{\text{N}\cdot\ \text{N}\cdot\ \text{s}} = \frac{\text{kg}\cdot\ \text{m}}{\text{kg}\cdot\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\ \text{s}} = \text{s}$$

$$\boxed{\tau = \frac{mR}{B^2\ell^2} = \frac{0,4\cdot\ 2,5}{2^2\cdot\ 0,5^2} = 1,00\ \text{s}}$$

**Χρονικές εξισώσεις**

$$a = \frac{\sum F}{m} = \frac{F_L}{m} = \frac{BI\ell}{m} = \frac{B(V-\mathscr{E})\ell}{mR} = \frac{B(V-B\upsilon\ell)\ell}{mR} = \frac{VB\ell}{mR} - \frac{B^2\ell^2}{mR}\upsilon = \frac{B^2\ell^2}{mR}\left(\frac{VB\ell}{mR}\frac{mR}{B^2\ell^2} - \upsilon\right) = \frac{B^2\ell^2}{mR}\left(\frac{V}{B\ell} - \upsilon\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\upsilon_{o\rho}-\upsilon}{\tau} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon_{o\rho}-\upsilon} = \frac{dt}{\tau} \Rightarrow \int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon_{o\rho}-\upsilon} = \frac{1}{\tau}\int_0^t dt$$

Αλλάζουμε μεταβλητή στο πρώτο ολοκλήρωμα : $u = \upsilon_{o\rho} - \upsilon \Rightarrow du = -d\upsilon$

$$-\int_{\upsilon_{o\rho}}^{\upsilon_{o\rho}-\upsilon}\frac{du}{u} = \frac{1}{\tau}\int_0^t dt \Rightarrow \ln u\Big|_{\upsilon_{o\rho}}^{\upsilon_{o\rho}-\upsilon} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \ln(\upsilon_{o\rho}-\upsilon) - \ln\upsilon_{o\rho} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \ln\left(\frac{\upsilon_{o\rho}-\upsilon}{\upsilon_{o\rho}}\right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \frac{\upsilon_{o\rho}-\upsilon}{\upsilon_{o\rho}} = e^{-t/\tau} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t) = \upsilon_{o\rho}\left(1-e^{-t/\tau}\right)}$$

Παραγωγίζοντας βρίσκουμε την επιτάχυνση

$$a(t) = \frac{d\upsilon(t)}{dt} = \upsilon_{o\rho}\frac{d}{dt}\left(1-e^{-t/\tau}\right) = \frac{\upsilon_{o\rho}}{\tau}e^{-t/\tau} \Rightarrow$$

$$\boxed{a(t) = a_0 e^{-t/\tau}}$$

και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τη θέση

$$x(t) = \int_0^t \upsilon(t)dt = \upsilon_{o\rho}\int_0^t \left(1-e^{-t/\tau}\right)dt = \upsilon_{o\rho}t - \upsilon_{o\rho}\int_0^t e^{-t/\tau}dt = \upsilon_{o\rho}t + \upsilon_{o\rho}\tau \int_0^{-t/\tau} e^u du = \upsilon_{o\rho}t + \upsilon_{o\rho}\tau\left[\, e^u \,\right]_0^{-t/\tau} =$$

$$= \upsilon_{o\rho}t + \upsilon_{o\rho}\tau(e^{-t/\tau} - 1) \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = \upsilon_{o\rho}(t-\tau) + \upsilon_{o\rho}\tau e^{-t/\tau}}$$

με την αλλαγή μεταβλητής: $u = -t/\tau \Rightarrow du = -dt/\tau$ .

Για $t = 3\tau = 3$ s

$$\upsilon(3\tau) = \upsilon_{o\rho}\left(1-e^{-3\tau/\tau}\right) = 100(1-e^{-3}) = 95{,}0 \text{ m/s}$$

$$a(3\tau) = a_0 e^{-3\tau/\tau} = 100e^{-3} = 4{,}98 \text{ m/s}^2$$

$$x(3\tau) = \upsilon_{o\rho}(3\tau-\tau) + \upsilon_{o\rho}\tau e^{-3\tau/\tau} = \upsilon_{o\rho}\tau(2+e^{-3}) = 100\cdot\ 1\cdot\ \left(2+e^{-3}\right) = 204{,}978707 \simeq 205 \text{ m}$$

# ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ