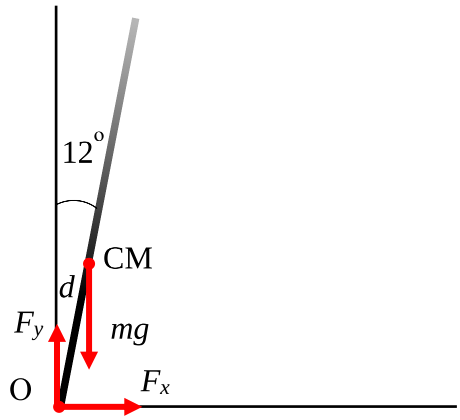
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2021-22

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ

Πέμπτη, 10 Φεβρουαρίου 2022 9-11 π.μ. αίθ. 1, 3, 5, 7, 109
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr) Α

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα και αξίας 2,5 μονάδων

ΘΕΜΑ 1.
Η λεπτή ευθύγραμμη μη ομογενής ράβδος του σχήματος, αφήνεται ελεύθερη από αρχική γωνία $\theta_0 = 12^{\mathrm{o}}$. Ο κατακόρυφος τοίχος και το οριζόντιο δάπεδο είναι λεία. Να βρείτε τη γωνία θ στην οποία η ράβδος θα χάσει την επαφή με τον τοίχο.



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
Όταν η ράβδος χάσει την επαφή με τον τοίχο η οριζόντια δύναμη F_y θα μηδενιστεί και μαζί της θα μηδενιστεί και η οριζόντια επιτάχυνση $\ddot{x}$ του CM. Θέτοντας $\ddot{x} = 0$ βρίσκουμε τη γωνία που χάνεται η επαφή.

$$x = d\sin\theta \Rightarrow \dot{x} = d\cos\theta \cdot \dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x} = d\cos\theta \cdot \ddot{\theta} - d\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2$$

Χρειαζόμαστε εκφράσεις για την γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$ και την γωνιακή επιτάχυνση $\ddot{\theta}$. Η ράβδος περιστρέφεται γύρω από το Ο. Τη γωνιακή επιτάχυνση την βρίσκουμε από την αρχή της στροφορμής και την γωνιακή επιτάχυνση από την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

$$\tau_{(\mathrm{O})} = I_{(\mathrm{O})}\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{mgd\sin\theta}{I_{(\mathrm{O})}} \quad , \qquad mgy_0 = mgy + \frac{1}{2}I_{(\mathrm{O})}\dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2mgd(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{I_{(\mathrm{O})}}$$

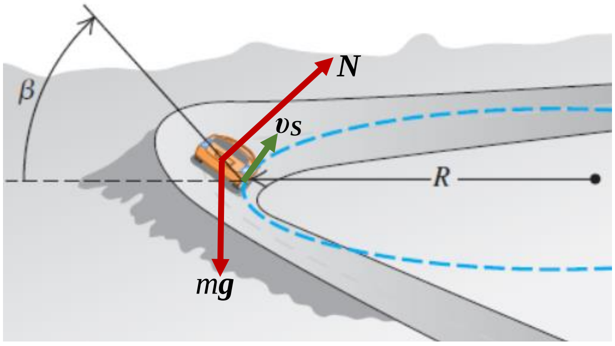
$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow d\cos\theta \cdot \ddot{\theta} - d\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 = 0 \Rightarrow d\cos\theta\frac{mgd\sin\theta}{I_{(\mathrm{O})}} - d\sin\theta\frac{2mgd(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{I_{(\mathrm{O})}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{mgd^2}{I_{(\mathrm{O})}}\sin\theta\left[\cos\theta - 2\cos\theta_0 + 2\cos\theta\right] = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}\cos\theta_0 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\cos 12^{\mathrm{o}}\right) \Rightarrow$$

$$\theta = \cos^{-1}(0,6520984) = 48,3000003^{\mathrm{o}} \simeq 48,3^{\mathrm{o}}$$

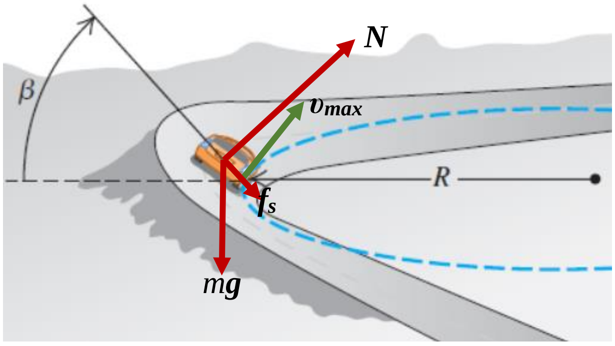
ΘΕΜΑ 2.

Ποια είναι η ταχύτητα ασφαλείας υ_S της κεκλιμένης στροφής; Δηλαδή η ταχύτητα που πρέπει να έχει το όχημα ώστε να καταφέρει τη στροφή χωρίς την ανάγκη στατικής τριβής $\boldsymbol{f}_s$. [0,5]



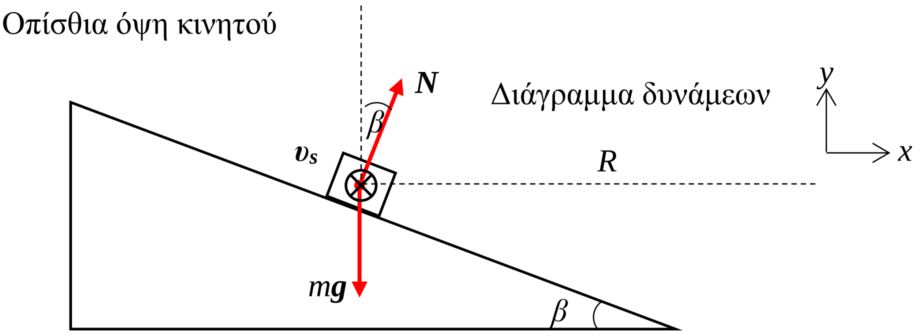
Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_{\max}$ με την οποία μπορεί το όχημα να πάρει τη στροφή ; [1,0]

Αν ταχύτητα υ του οχήματος βρίσκεται στο διάστημα $\upsilon_S \le \upsilon \le \upsilon_{\max}$ από ποια έκφραση δίνεται η στατική τριβή $\boldsymbol{f}_s$; [1,0]



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ταχύτητα ασφαλείας



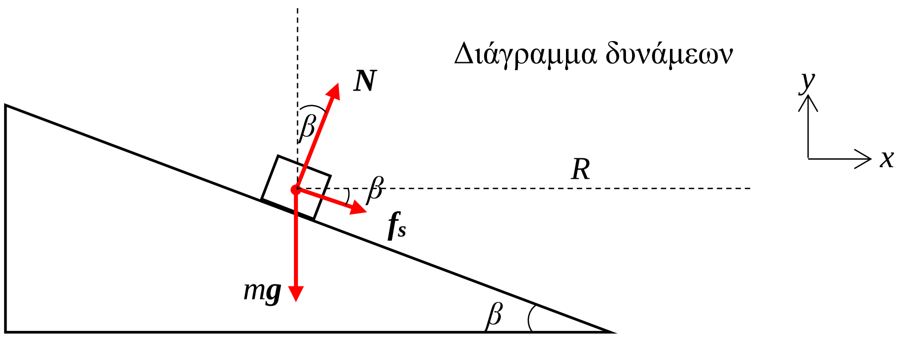
$$\sum F_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\beta = m\frac{\upsilon_s^2}{R} \qquad (1) \qquad\qquad \sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\beta - mg = 0 \Rightarrow N\cos\beta = mg \qquad (2)$$

Διαιρώντας την (1) με τη (2)

$$\frac{N\sin\theta}{N\cos\theta} = \frac{m\upsilon_s^2 / R}{mg} \Rightarrow \upsilon_s^2 = gR\tan\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_s = \sqrt{gR\tan\theta}}$$

Μέγιστη ταχύτητα



$$\sum F_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\beta + f_s\cos\beta = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad (1) \qquad \sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\beta - f_s\sin\beta - mg = 0 \quad (2)$$

Όσο αυξάνεται η ταχύτητα αυξάνονται και οι δυνάμεις που παρέχουν την κεντρομόλο δύναμη, δηλαδή η N και η f_s . Η ταχύτητα θα φτάσει στη μέγιστη τιμή της όταν η στατική τριβή θα φτάσει στη μέγιστη επιτρεπτή τιμή της $f_{s,\max} = \mu_s N$

$$N\sin\beta + \mu_s N\cos\beta = m\frac{\upsilon_{\max}^2}{R} \Rightarrow N(\sin\beta + \mu_s\cos\beta) = m\frac{\upsilon_{\max}^2}{R} \qquad (1)$$

$$N\cos\beta - \mu_s N\sin\beta - mg = 0 \Rightarrow N(\cos\beta - \mu_s\sin\beta) = mg \qquad (2)$$

Διαιρώντας την (1) με την (2))

$$\frac{m\frac{\upsilon_{\max}^2}{R}}{mg} = \frac{\sin\beta + \mu_s\cos\beta}{\cos\beta - \mu_s\sin\beta} \Rightarrow \upsilon_{\max}^2 = gR\frac{\sin\beta + \mu_s\cos\beta}{\cos\beta - \mu_s\sin\beta} = gR\frac{\tan\beta + \mu_s}{1 - \mu_s\tan\beta}$$

$$\boxed{\upsilon_{\max} = \sqrt{gR\frac{\tan\beta + \mu_s}{1 - \mu_s\tan\beta}}}$$

Τιμή μέτρου στατικής τριβής όταν $f_s < \mu_s N$ και $\upsilon_S < \upsilon < \upsilon_{\max}$

$$\sum F_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\beta + f\cos\beta = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\beta = m\frac{\upsilon^2}{R} - f\cos\beta \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\beta - f\sin\beta - mg = 0 \Rightarrow N\cos\beta = mg + f\sin\beta \qquad (2)$$

Διαιρώ (1) δια (2)

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{m\frac{\upsilon^2}{R} - f\cos\beta}{mg + f\sin\beta} \Rightarrow mg\sin\beta + f\sin^2\beta = m\frac{\upsilon^2}{R}\cos\beta - f\cos^2\beta \Rightarrow$$

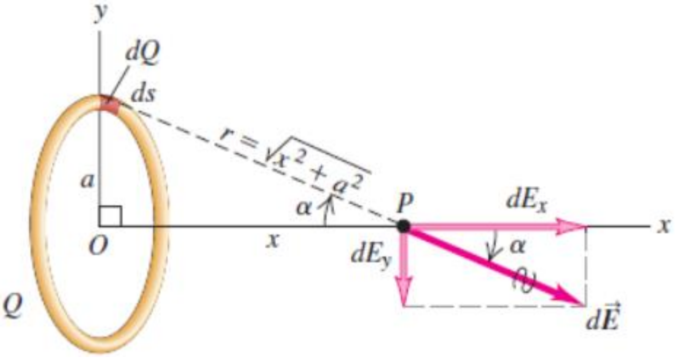
$$f(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = m\frac{\upsilon^2}{R}\cos\beta - mg\frac{R}{R}\sin\beta \Rightarrow f = \frac{m\cos\beta}{R}(\upsilon^2 - gR\tan\beta) \Rightarrow$$

$$\boxed{f = \frac{m\cos\beta}{R}(\upsilon^2 - \upsilon_s^2)}$$

ΘΕΜΑ 3.

Να υπολογίσετε τη διεύθυνση και το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί λεπτό ομοιόμορφα θετικά φορτισμένο δακτυλίδι πάνω στον άξονά του. [1,0]

Να δείξετε ότι για πολύ μικρά x ($x \ll a$) η δύναμη που ασκεί ο δακτύλιος σε ένα αρνητικό σημειακό φορτίο $-q$ είναι δύναμη επαναφοράς. [0,5]



Να γράψετε στο SI την χρονική εξίσωση της ταχύτητας υ ενός αρνητικού σημειακού φορτίου $-q$ και μάζας m, το οποίο τη χρονική στιγμή μηδέν αφήνεται ελεύθερο στη θέση + 1,5 mm του άξονα του δακτυλιδιού. [1,0]

$1/4\pi\varepsilon_0 = 9\times10^9$ NC^2/m^2, a = 3 cm, Q = 24 μC, q = 1 μC, m = 20 mg

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Βρίσκουμε το δυναμικό στον άξονα του δακτυλιδιού χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας, δηλαδή χωρίζοντας το δαχτυλίδι σε σημειακά στοιχειώδη φορτία dq και αθροίζοντας τις συνεισφορές τους. Κάθε στοιχείο dq της κυκλικής κατανομής απέχει την ίδια απόσταση $\sqrt{x^2+a^2}$ από το σημείο x. Παίρνουμε ως αρχή των αξόνων το κέντρο του δακτυλιδιού και τον άξονά του να είναι ο άξονας x.

$$V(x,0,0)=\int_0^Q dV=\int_0^Q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\int_0^Q dq \Rightarrow V(x,0,0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Από το δυναμικό βρίσκουμε το πεδίο:

$$\vec{E}(x,0,0)=-\vec{\nabla}V(x,0,0)=-\frac{\partial V(x,0,0)}{\partial x}\hat{x}-\frac{\partial V(x,0,0)}{\partial y}\hat{y}-\frac{\partial V(x,0,0)}{\partial z}\hat{z}=$$

$$=-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\hat{x}-0-0=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)\left(x^2+a^2\right)^{-3/2}\hat{x}\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E}(x,0,0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\hat{x}}$$

$$\boxed{\vec{E}(x,0,0)\xrightarrow{x<<a}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{a^3}\hat{x}}$$

Δύναμη σε αρνητικό φορτίο σε απόσταση $x<<a$

$$\boxed{\vec{F}=-q\vec{E}=-\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\right)x\hat{x}\quad \text{δύναμη επαναφοράς με}\quad k=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^3}}$$

Το φορτίο θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^3 m}}=\sqrt{9\times10^9\,\frac{10^{-6}\cdot\ 24\times10^{-6}}{(3\times10^{-2})^3\cdot\ 20\times10^{-6}}}=\sqrt{10^9\,\frac{24}{3\cdot\ 20}}=\sqrt{10^8\cdot\ 4}\Rightarrow$$

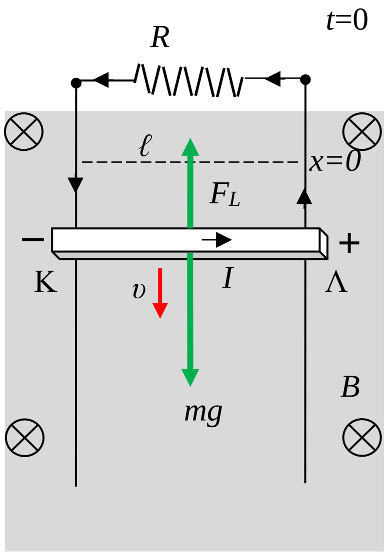
$$\boxed{\omega=2\times10^4\ \text{rad/s}}$$

A = 1,5 mm, $\varphi_0=\pi/2$, $a=-\omega^2 x=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0)=-1{,}5\times10^{-3}\cdot\left(2\times10^4\right)^2\sin(2\times10^4 t+\pi/2)$

$$\boxed{a=-6\times10^5\sin\left(2\times10^4 t+\frac{\pi}{2}\right)\quad \text{(SI)}}$$

ΘΕΜΑ 4.

Η λεπτή αγώγιμη ράβδος ΚΛ αφήνεται να πέσει λόγω του βάρους της, μέσα σε οριζόντιο σταθερό μαγνητικό πεδίο, όντας συνεχώς σε επαφή με τις κατακόρυφες αγώγιμες ράγες.



Υπολογίστε την οριακή ταχύτητα που θα αποκτήσει η ράβδος. [0,2]

Πόση ισχύς καταναλώνεται στην ωμική αντίσταση στη μόνιμη κατάσταση; [0,2]

Σχεδιάστε την πολικότητα της επαγωγικής τάσης και τη φορά του ρεύματος στο κύκλωμα και υπολογίστε τις τιμές τους στη μόνιμη κατάσταση. [0,3]

Αν $\tau = mR/B^2\ell^2$ δείξτε ότι $\upsilon_{op} = g\tau$. Δείξτε ότι η σταθερά τ έχει μονάδες χρόνου και υπολογίστε την τιμή της [0,4]

$$\mathscr{E} = B\upsilon\ell$$
$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}$$
$$F_L = BI\ell$$

Βρείτε τις χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και του διαστήματος που διανύει η ράβδος. [1,2]

Τι διάστημα έχει διανύσει η ράβδος και με τι ταχύτητα κινείται μετά από τρεις σταθερές χρόνου $t = 3\tau$ [0,2]

R=2,50 Ω, m=400 g, ℓ = 50,0 cm, B=2,00 T, g=9,80 N/kg

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια της ράβδου που κινείται, προς τα κάτω, μέσα στο μαγνητικό πεδίο δέχονται δύναμη Lorenz $F = -e\vec{\upsilon} \times \vec{B}$ που τα ωθεί προς το άκρο Κ της ράβδου. Άρα η πολικότητα της επαγωγικής τάσης είναι Κ(-) και Λ(+). Το ηλεκτρικό ρεύμα ορίζεται να έχει φορά αντίθετη από τη φορά κίνησης των ηλεκτρονίων.

Με διαφορετικό τρόπο. Το ρεύμα πρέπει να έχει τη φορά του σχήματος ώστε η δύναμη Laplace να είναι προς τα πάνω (Lenz). Η ράβδος αποτελεί πηγή για το κύκλωμα. Μέσα στην πηγή το ρεύμα κατευθύνεται από τον αρνητικό (–) προς το θετικό (+) πόλο. Αυτή η μετακίνηση φορτίων και η συγκέντρωση τους στα άκρα της ράβδου δημιουργεί τους πόλους της πηγής. Τα θετικά φορτία πρέπει να πάνε προς το θετικό πόλο για να τον φτιάξουν τον θετικό πόλο και αντίστοιχα τα αρνητικά. Άρα η πολικότητα της επαγωγικής τάσης είναι Κ(-) και Λ(+).

Οριακή ταχύτητα όταν

$$\sum F = 0 \Rightarrow W - F_{L,\tau\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow \quad BI_{\tau\varepsilon\lambda}\ell = mg \Rightarrow B\frac{B\upsilon_{op}\ell}{R}\ell = mg \Rightarrow \upsilon_{op} = \frac{mgR}{B^2\ell^2} = \frac{0,4 \cdot 9,8 \cdot 2,5}{2^2 \cdot 0,5^2}$$

$$\boxed{\upsilon_{op} = 9,80 \text{ m/s}}$$

Καταναλώνεται όση παράγεται από τη δύναμη του βάρους

$$P_{out} = P_{in} = W\upsilon_{op} = mg\frac{mgR}{B^2\ell^2} = \frac{0,4^2 \cdot 9,8^2 \cdot 2,5}{2^2 \cdot 0,5^2} = 0,4 \cdot 9,8^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{P_{out} = 38,416 \simeq 38,4 \text{ W}}$$

$$BI_{\tau\varepsilon\lambda}\ell = mg \Rightarrow I_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{mg}{B\ell} = \frac{0,4 \cdot 9,8}{2 \cdot 0,5} \Rightarrow$$

$$\boxed{I_{τελ} = 3{,}92\ \mathrm{A}}$$

$\mathscr{E}_{τελ} = B\upsilon_{ορ}\ell = 2\cdot\ 9{,}8\cdot\ 0{,}5 \Rightarrow$

$$\boxed{\mathscr{E}_{τελ} = 9{,}80\ \mathrm{V}}$$

$$g\tau = g\cdot\ \frac{mR}{B^2\ell^2} = \upsilon_{ορ}$$

$$[\tau] = \left[\frac{mR}{B^2\ell^2}\right] = \frac{\mathrm{kg}\cdot\ \Omega}{\mathrm{T^2m^2}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}}{\frac{\mathrm{N^2}}{\mathrm{A^2m^2}}\cdot\ \mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\ \mathrm{V}\cdot\ \mathrm{A}}{\mathrm{N^2}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\cdot\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{N^2}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\ \mathrm{N}\cdot\ \mathrm{m}}{\mathrm{N}\cdot\ \mathrm{N}\cdot\ \mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\ \mathrm{m}}{\mathrm{kg}\cdot\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\cdot\ \mathrm{s}} = \mathrm{s}$$

$$\boxed{\tau = \frac{mR}{B^2\ell^2} = \frac{0{,}4\cdot\ 2{,}5}{2^2\cdot\ 0{,}5^2} = 1{,}00\ \mathrm{s}}$$

$$\sum F = ma \Rightarrow W - F_L = ma \Rightarrow mg - \frac{B^2\ell^2}{R}\upsilon = ma \Rightarrow a = g - \frac{B^2\ell^2}{mR}\upsilon \Rightarrow a = \frac{B^2\ell^2}{mR}\left(\frac{gmR}{B^2\ell^2} - \upsilon\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(\upsilon_{ορ} - \upsilon\right) \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon_{ορ} - \upsilon} = \frac{dt}{\tau} \Rightarrow \int_0^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\upsilon_{ορ} - \upsilon} = \frac{1}{\tau}\int_0^t dt \Rightarrow$$

Αλλάζουμε μεταβλητή στο πρώτο ολοκλήρωμα : $u = \upsilon_{ορ} - \upsilon \Rightarrow du = -d\upsilon$

$$-\int_{\upsilon_{ορ}}^{\upsilon_{ορ}-\upsilon} \frac{du}{u} = \frac{1}{\tau}\int_0^t dt \Rightarrow\ \ln u\Big|_{\upsilon_{ορ}}^{\upsilon_{ορ}-\upsilon} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow\ \ln(\upsilon_{ορ} - \upsilon) - \ln\upsilon_{ορ} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow\ \ln\left(\frac{\upsilon_{ορ} - \upsilon}{\upsilon_{ορ}}\right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \frac{\upsilon_{ορ} - \upsilon}{\upsilon_{ορ}} = e^{-t/\tau} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t) = \upsilon_{ορ}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Παραγωγίζοντας βρίσκουμε την επιτάχυνση

$$a(t) = \frac{d\upsilon(t)}{dt} = \upsilon_{ορ}\frac{d}{dt}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{\upsilon_{ορ}}{\tau}e^{-t/\tau} \Rightarrow$$

$$\boxed{a(t) = ge^{-t/\tau}}$$

και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τη θέση

$$x(t) = \int_0^t \upsilon(t)dt = \upsilon_{ορ}\int_0^t \left(1 - e^{-t/\tau}\right)dt = \upsilon_{ορ}t - \upsilon_{ορ}\int_0^t e^{-t/\tau}dt = \upsilon_{ορ}t + \upsilon_{ορ}\tau\ \int_0^{-t/\tau} e^u du = \upsilon_{ορ}t + \upsilon_{ορ}\tau\left[\ e^u\ \right]_0^{-t/\tau} =$$

$$= \upsilon_{ορ}t + \upsilon_{ορ}\tau(e^{-t/\tau} - 1) \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = \upsilon_{ορ}(t - \tau) + \upsilon_{ορ}\tau e^{-t/\tau}}$$

Για $t = 3\tau = 3$ s

$\upsilon(3\tau) = 9{,}8\left(1 - e^{-3}\right) = 9{,}8\left(1 - 0{,}049787\right) = 9{,}31\ \mathrm{m/s}$

$a(3\tau) = 9{,}8e^{-3} = 0{,}488\ \mathrm{m/s^2}$

$x(3\tau) = 9{,}80(3-1) + 9{,}80e^{-3} = 9{,}8(2 + 0{,}049787) = 20{,}1\ \mathrm{m}$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ