Κεφάλαιο 6β

Περιστροφή στερεού σώματος γύρω από σταθερό άξονα

CENGAGE Learning™

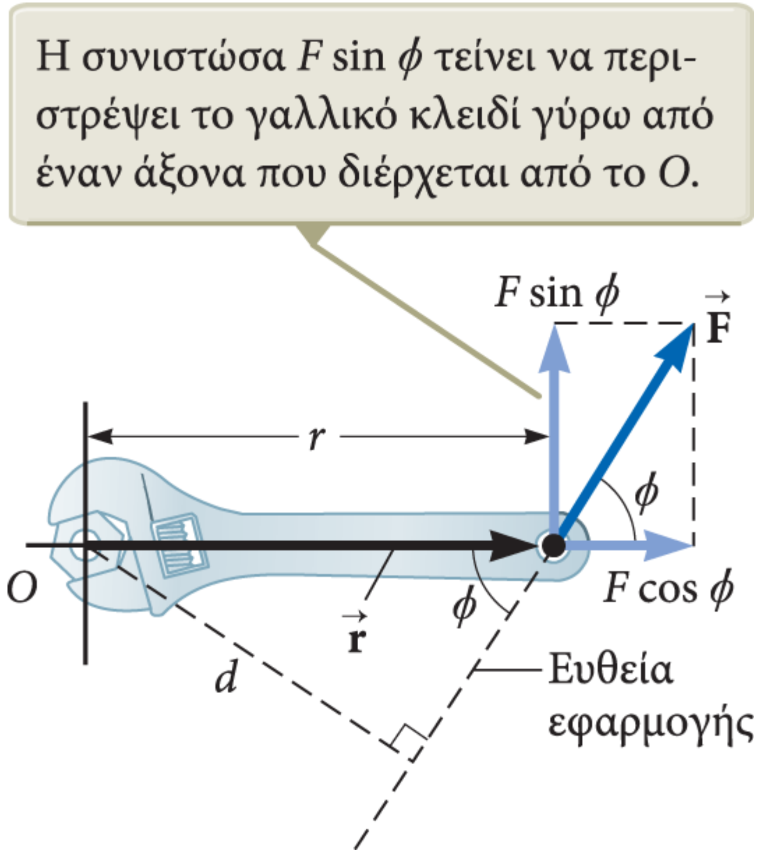
Ροπή

Ροπή (τ) είναι η τάση που έχει μια δύναμη να περιστρέψει ένα σώμα γύρω από κάποιον άξονα.

$$\tau = rF\sin\phi \quad \text{ή} \quad \tau = Fd$$

d είναι η *κάθετη* απόσταση του άξονα περιστροφής από το φορέα της δύναμης (ευθεία εφαρμογής της δύναμης) και συχνά ονομάζεται μοχλοβραχίονας.

- $d = r\sin\phi$
- Η συνιστώσα της δύναμης $F\cos\phi$ κατά τη διεύθυνση της απόστασης r δεν τείνει να προκαλέσει περιστροφή.



Η ροπή έχει κατεύθυνση.

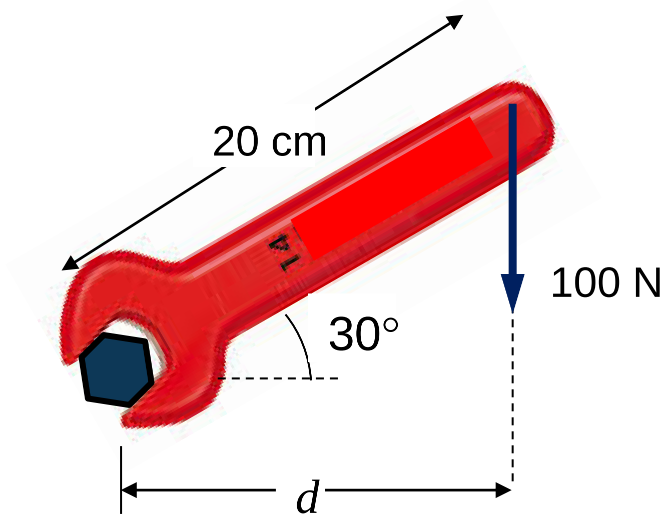
- Αν η δύναμη τείνει να περιστρέψει το σώμα αριστερόστροφα, η ροπή είναι θετική.
- Αν η δύναμη τείνει να περιστρέψει το σώμα δεξιόστροφα, η ροπή είναι αρνητική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.5 Εφαρμόζοντας μια ροπή

Χρησιμοποιούμε ένα γερμανικό κλειδί το οποίο έχει μήκος 20 cm για να στρίψουμε ένα παξιμάδι. Η χειρολαβή του κλειδιού είναι σε κλίση 30° πάνω από το οριζόντιο επίπεδο και εμείς, πιέχουμε κατακόρυφα προς τα κάτω με μια δύναμη 100 N. Πόση είναι η ροπή που ασκούμε στο παξιμάδι;

ΛΥΣΗ

Από τον ορισμό της, η ροπή της δύναμης των 100 N ως προς τον άξονα περιστροφής είναι



$$\tau = rF\sin\phi$$

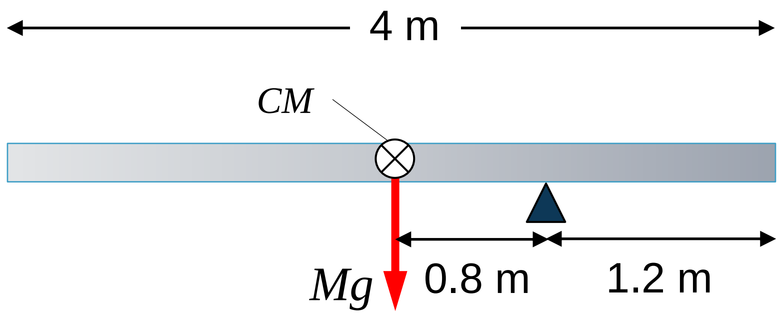
όπου, $\phi = 60°$ η γωνία που σχηματίζουν τα r και F

$$\tau = (0.2\text{ m})(100\text{ N})\sin(60°)$$

$$\tau = 17.3\text{ Nm}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.6 Η ροπή του βάρους σε μια ράβδο

Μια ατσάλινη ομογενής ράβδος μήκους 4.00 m και μάζας 0.500 kg στηρίζεται σε σημείο που απέχει 1.20 m από το δεξί άκρο της. Ποιά είναι η βαρυτική ροπή ως προς τη στήριξη;



ΛΥΣΗ

Επειδή η ράβδος είναι ομογενής, το κέντρο μάζας (βάρους) της (CM) είναι στο μέσο της, δηλαδή, σε απόσταση x_{CM} = 0.800 m από τη στήριξη.

Επομένως, η ροπή του βάρους της ως προς το σημείο στήριξης είναι

$$\tau = x_{\mathrm{CM}} Mg$$

$$= (0.800\ \mathrm{m})(0.500\ \mathrm{kg})(9.81\ \mathrm{m/s^2})$$

$$= 3.92\ \mathrm{Nm}$$

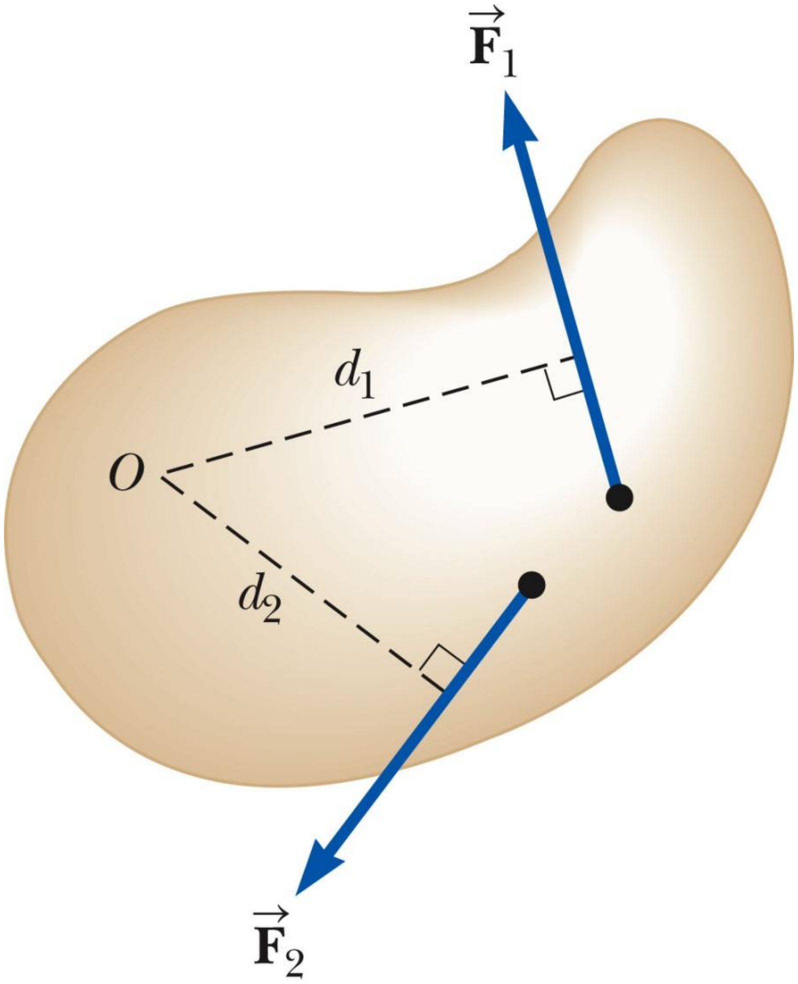
Συνισταμένη ροπή

Η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_1$ τείνει να περιστρέψει το σώμα αριστερόστροφα γύρω από το O.

Η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_2$ τείνει να περιστρέψει το σώμα δεξιόστροφα γύρω από το O.

Η συνισταμένη (συνολική) ροπή είναι

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$$



Ροπή *και* δύναμη

Οι δυνάμεις μπορούν να προκαλέσουν μεταβολή στη μεταφορική κίνηση ενός σώματος.

- Η μεταβολή αυτή περιγράφεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

Οι δυνάμεις μπορούν να προκαλέσουν, επίσης, μεταβολή στην περιστροφική κίνηση του σώματος.

- Ο βαθμός της μεταβολής της περιστροφικής κίνησης εξαρτάται από το μέτρο της δύναμης αλλά και από τον μοχλοβραχίονά της.
- Η μεταβολή της περιστροφικής κίνησης εξαρτάται από τη ροπή

Μονάδες μέτρησης της ροπής

Η μονάδα SI της ροπής είναι το N·m.

- Παρότι η ροπή είναι γινόμενο δύναμης επί απόσταση, διαφέρει σημαντικά από το έργο και την ενέργεια.
- Η ροπή μετριέται σε N·m. Οι μονάδες της δεν μετατρέπονται σε joule.

Ροπή και γωνιακή επιτάχυνση: Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφή

Η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού σώματος, κατά την περιστροφή του γύρω από άξονα, είναι ανάλογη προς τη συνολική ροπή των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό.

$$\alpha_\omega = \frac{\sum \tau}{I}$$

ή

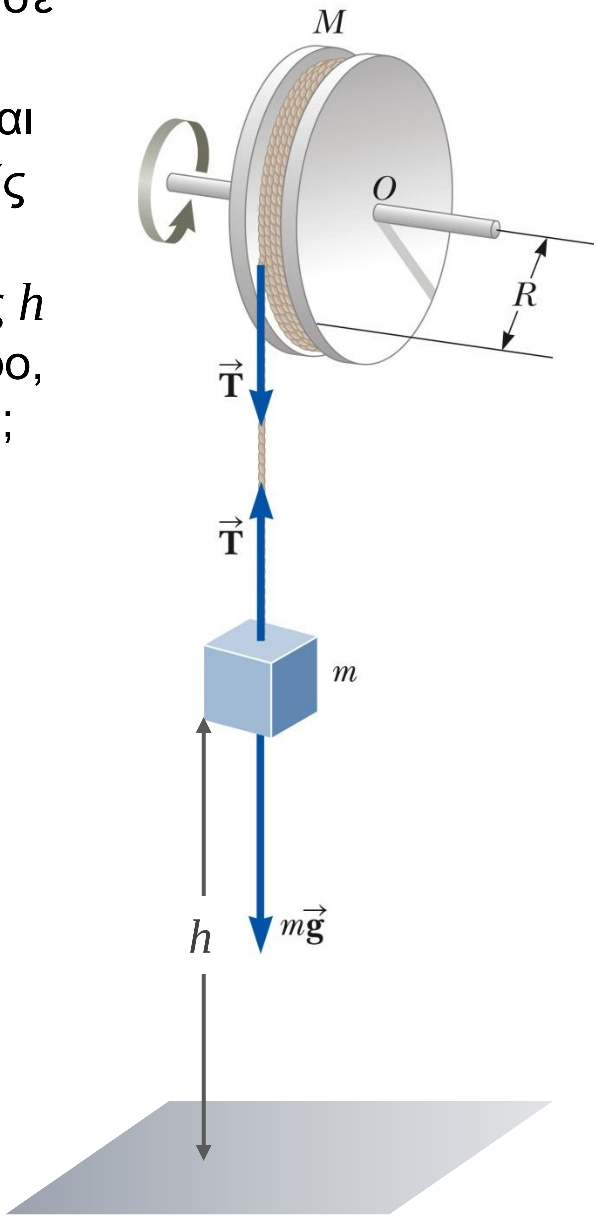
$$\boxed{\sum \tau = I\alpha_\omega}$$

Συγκρίνετε τη σχέση αυτή με το 2ο νόμου του Νεύτωνα για τη γραμμική κίνηση

$$\sum F = m\alpha$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.12 Κατεβάζοντας ένα αντικείμενο

Ένα αντικείμενο με μάζα m = 2.0 kg είναι δεμένο σε ένα αβαρές νήμα το οποίο είναι τυλιγμένο γύρω από μια τροχαλία η οποία έχει μάζα M = 1.0 kg και ακτίνα R = 2.0 cm. Η τροχαλία περιστέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονα συμμετρίας της. Το αντικείμενο είναι σε ηρεμία και βρίσκεται σε ύψος h = 1.0 m πάνω από το έδαφος. Αν αφεθεί ελεύθερο, πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει στο έδαφος;



ΛΥΣΗ 1η: Με δυνάμεις

Το σώμα μάζας m κινείται γραμμικά προς τα κάτω με επιτάχυνση α.

Στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις:

- η δύναμη βαρύτητας $m\vec{g}$ και
- η δύναμη (τάση) $\vec{T}$ από το σχοινί.

Εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για τη γραμμική κίνηση, παίρνουμε

$$\sum F = m\alpha \Rightarrow mg - T = m\alpha \Rightarrow T = mg - m\alpha$$

ΛΥΣΗ 1η: Με δυνάμεις (*συνέχεια*)

Εφόσον η τροχαλία περιστρέφεται, μπορούμε να εφαρμόσουμε 2ο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφή

$$\sum \tau = I\alpha_{\omega} \quad (1)$$

όπου, α_{ω} η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας, η οποία συνδέεται με τη γραμμική επιτάχυνση του σώματος με τη σχέση $\alpha = R\alpha_{\omega}$

Η τάση του σχοινιού παρέχει την εφαπτομενική δύναμη περιστροφής της τροχαλίας, άρα

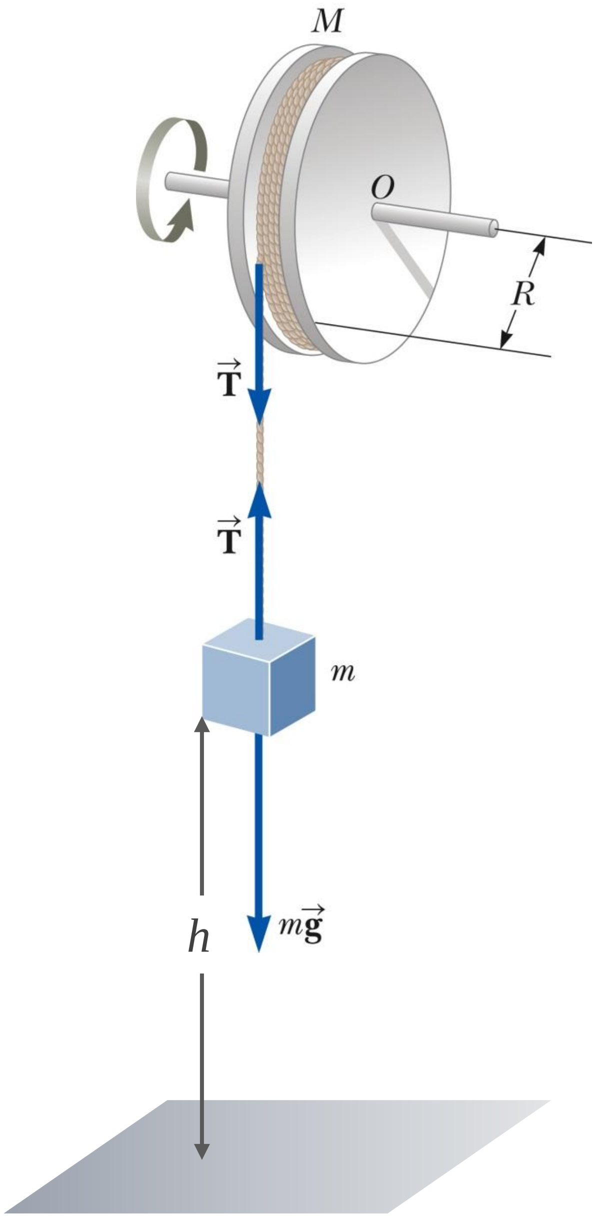
$$\sum \tau = T \cdot R$$

Αντικαθιστώντας στην (1), έχουμε

$$TR = I\frac{\alpha}{R} \quad \Rightarrow \quad T = I\frac{\alpha}{R^2}$$

όπου, $I = MR^2/2$ η ροπή αδράνειας τής τροχαλίας

$$T = \frac{MR^2}{2}\frac{\alpha}{R^2} = \frac{M}{2}\alpha$$



ΛΥΣΗ 1η: Με δυνάμεις (*συνέχεια*)

Από τις σχέσεις $T = mg - m\alpha$

και $T = \dfrac{M}{2}\alpha$

εξισώνοντας, έχουμε $\dfrac{M}{2}\alpha = mg - m\alpha$

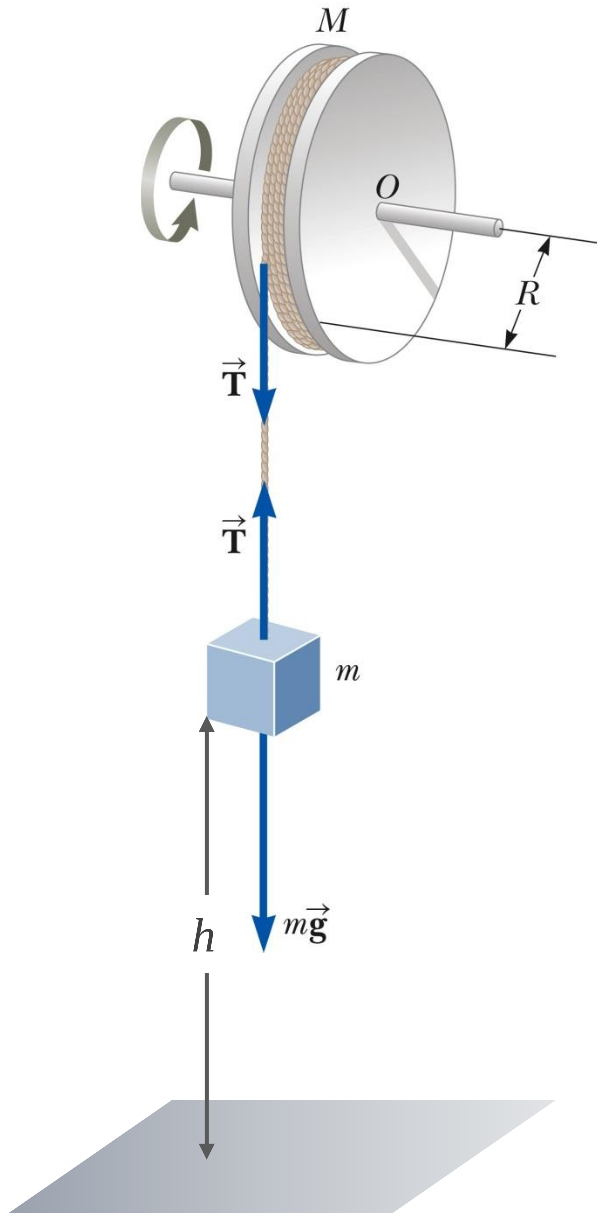
$$\Rightarrow \quad \frac{M}{2}\alpha + m\alpha = mg$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{M}{2} + m\right)\alpha = mg$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{mg}{\left(\dfrac{M}{2} + m\right)}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές βρίσκουμε την επιτάχυνση

$$\alpha = \frac{(2.0\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)}{\left(\dfrac{1.0\,\text{kg}}{2} + 2.0\,\text{kg}\right)} = 7.8\,\text{m/s}^2$$



ΛΥΣΗ 1η: Με δυνάμεις (*συνέχεια*)

Ο χρόνος Δt για να φτάσει στο έδαφος βρίσκεται από την κινηματική

$$y = y_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2$$

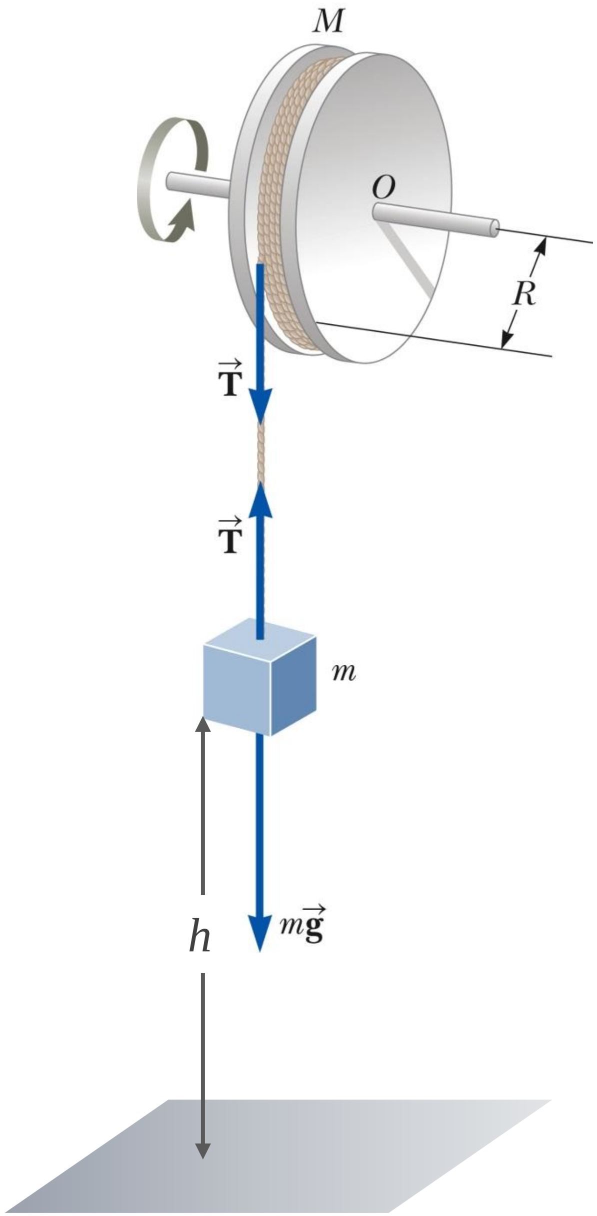
$$0 = (1.0\,\mathrm{m}) + 0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2}(7.8\,\mathrm{m/s^2})(\Delta t)^2$$

$$1.0\,\mathrm{m} = \frac{1}{2}(7.8\,\mathrm{m/s^2})(\Delta t)^2$$

$$\frac{2(1.0\,\mathrm{m})}{7.8\,\mathrm{m/s^2}} = (\Delta t)^2$$

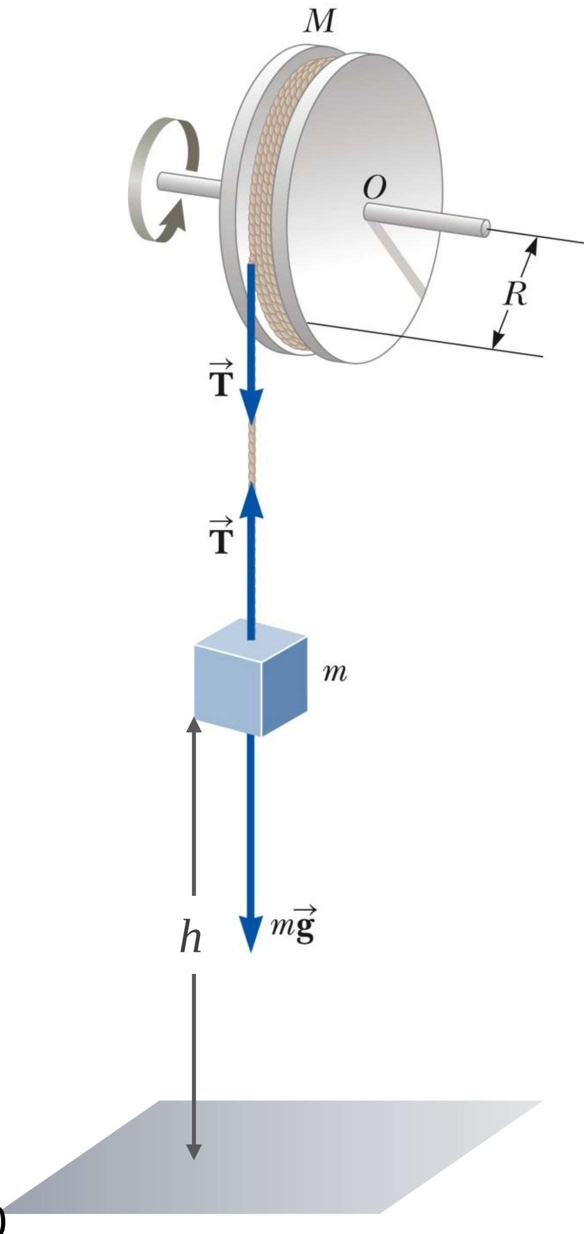
$$(\Delta t)^2 = 0.26\,\mathrm{s}^2$$

$$\Delta t = \sqrt{0.26\,\mathrm{s}^2} = 0.51\mathrm{s}$$



ΛΥΣΗ 2η : Με ενέργειες

Το σώμα και η τροχαλία αποτελούν ένα σύστημα του οποίου η ολική μηχανική ενέργεια διατηρείται μιας και δεν υπάρχουν τριβές (ούτε στον άξονα της τροχαλίας ούτε από την αντίσταση του αέρα στο σώμα)



$$\mathrm{K_i} + \mathrm{U_i} = \mathrm{K_f} + \mathrm{U_f}$$

Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$\mathrm{K_i} = \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} I \omega_i^2 = \frac{1}{2} m 0 + \frac{1}{2} I 0 = 0$$

και η αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια

$$\mathrm{U_i} = mgy_i = mgh^2$$

Η τελική κινητική του ενέργεια είναι

$$\mathrm{K_f} = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

όπου, v η ταχύτητα που έχει το σώμα όταν φτάνει στο έδαφος και ω η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας.

Η τελική βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι $\mathrm{U_f} = mgy_f = 0$

ΛΥΣΗ 2η : Με ενέργειες (*συνέχεια*)

Εξισώνοντας, παίρνουμε:

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Επειδή, $v = \omega R$ ή $\omega = \dfrac{v}{R}$ και παίρνοντας από τους πίνακες τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας ($I = MR^2/2$) η εξίσωση γίνεται

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

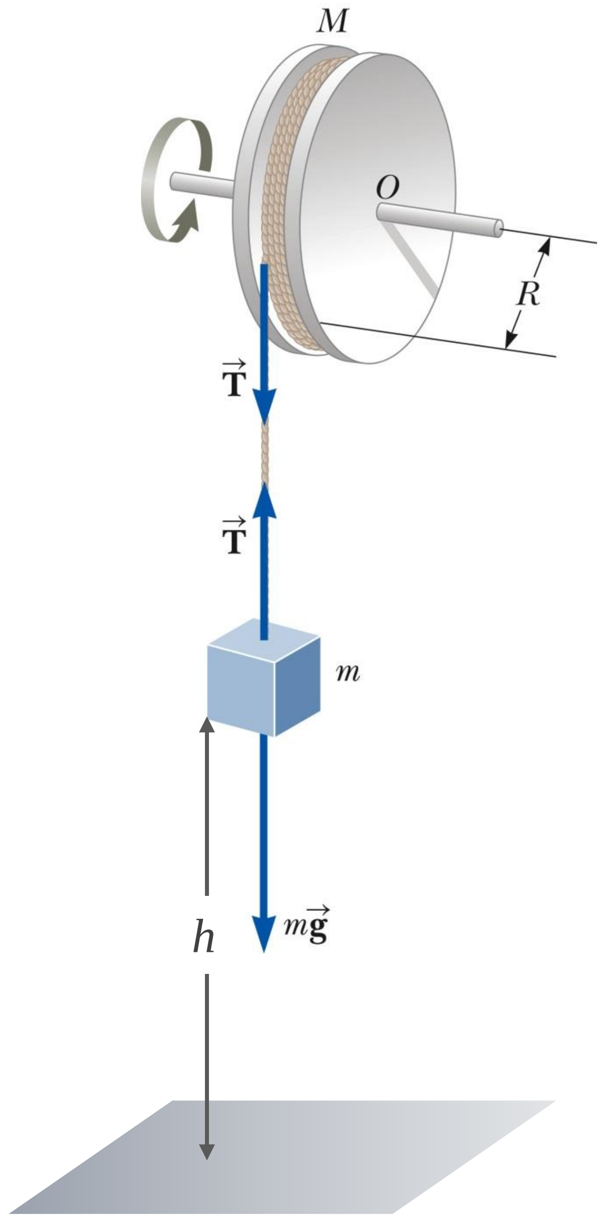
$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\frac{v^2}{R^2}$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2$$

$$4mgh = 2mv^2 + Mv^2$$

$$4mgh = (2m + M)v^2$$

$$v^2 = \frac{4mgh}{(2m + M)} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4mgh}{(2m + M)}}$$



ΛΥΣΗ 2η : Με ενέργειες (*συνέχεια*)

$$\Rightarrow \; v = \sqrt{\frac{4mgh}{(2m+M)}} = \sqrt{\frac{4(2\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2})(1\mathrm{m})}{2(2\,\mathrm{kg})+1\mathrm{kg}}} = 3.96\,\mathrm{m/s}$$

Το σώμα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση (γιατι;).

Χρησιμοποιώντας, από τις εξισώσεις της κινηματικής, την εξίσωση

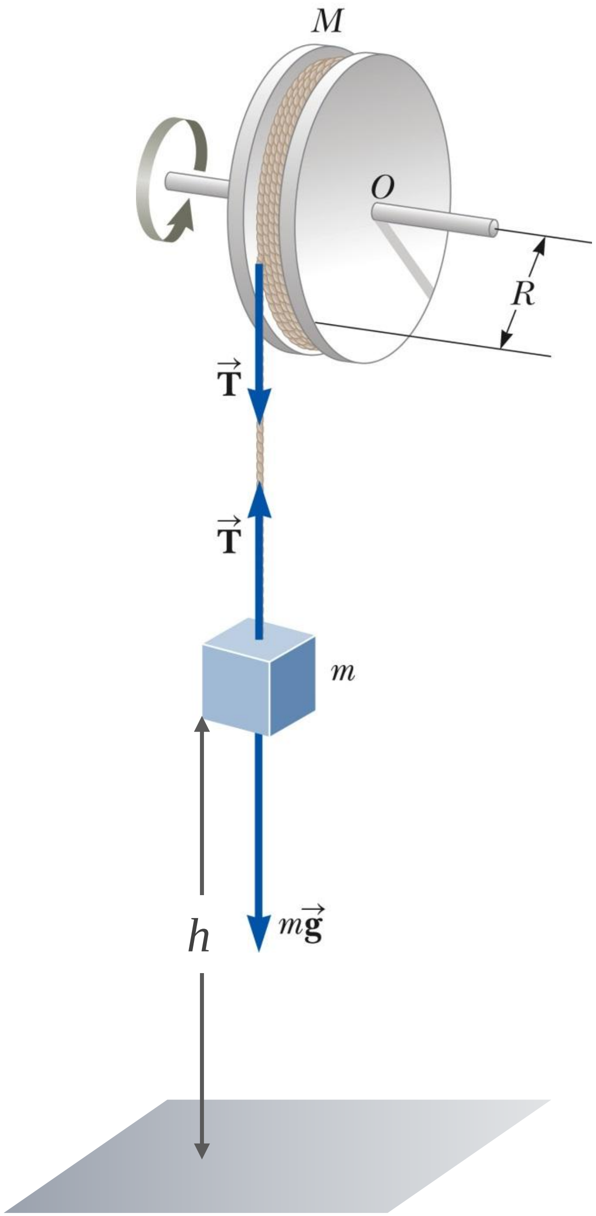
$$y_f = y_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$$

$$0 = 1\mathrm{m} + \frac{1}{2}(0 - 2.0\,\mathrm{m/s})t$$

$$0 = 1\mathrm{m} + \frac{1}{2}(0 - 3.96\,\mathrm{m/s})t$$

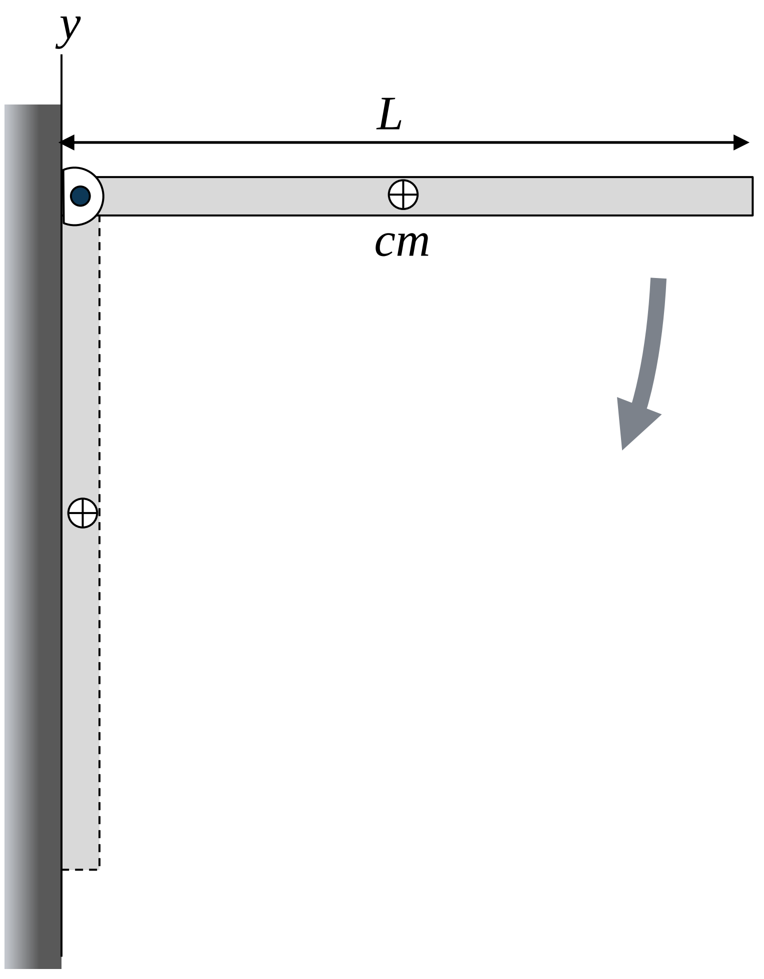
$$-(1\mathrm{m}) = \frac{1}{2}(0 - 3.96\,\mathrm{m/s})t$$

$$-2\,\mathrm{m} = (-3.96\,\mathrm{m/s})t \quad \Rightarrow t = \frac{-2\,\mathrm{m}}{-3.96\,\mathrm{m/s}} = 0.51\mathrm{s}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.14 Ταχύτητα μιας περιστρεφόμενης βέργας

Μια ράβδος μήκους L = 1.0 m και μάζας m = 0.20 kg είναι αρθρωμένη στο ένα άκρο της και συνδεδεμένη με τον τοίχο. Είναι σε οριζόντια θέση και ύστερα αφήνεται ελεύθερη. Ποιά είναι η ταχύτητα του κάτω άκρου της ράβδου καθώς κτυπάει στον τοίχο;



ΛΥΣΗ

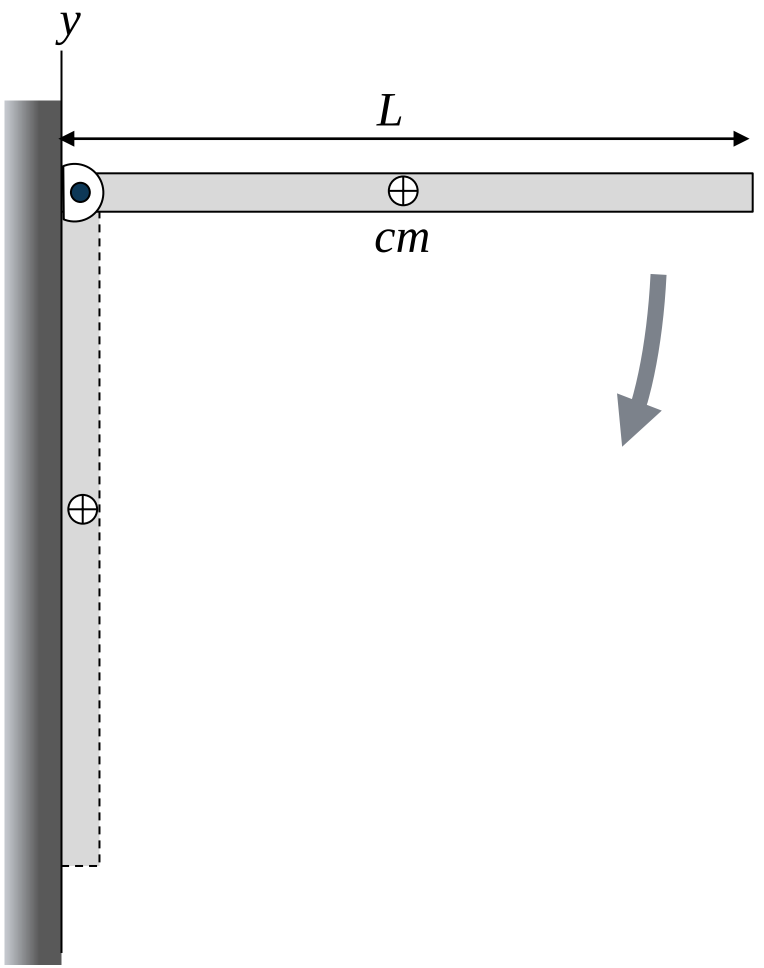
Το πρόβλημα αυτό, όπως και το προηγούμενο Παράδειγμα 13.12, μπορεί να λυθεί τόσο με δυνάμεις όσο και με ενέργειες

Εδώ, θα το λύσουμε με ενέργειες.

Εφόσον δεν έχουμε τριβές (από την άρθρωση ή την αντίσταση του αέρα), η μηχανική ενέργεια της ράβδου διατηρείται.

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

ΛΥΣΗ (*συνέχεια*)



Η αρχική κινητική ενέργεια της ράβδου είναι

$$K_i = \frac{1}{2} I\omega_i^2 = \frac{1}{2} I\, 0 = 0$$

και η αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια

$$U_i = Mgy_i$$

όπου, y_i είναι η κατακόρυφη θέση του κέντρου μάζας cm της ράβδου.

Παίρνοντας την αρχή του άξονα y στην άρθρωση, είναι $y_i = 0$, επομένως,

$$U_i = Mg\,0 = 0$$

Η τελική κινητική της ράβδου είναι

$$K_f = \frac{1}{2} I\omega_f^2$$

όπου, ω_f η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν κτυπάει στον τοίχο.

Η τελική βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι $U_f = Mgy_f = Mg(-\frac{L}{2}) = -Mg\frac{L}{2}$

ΛΥΣΗ (*συνέχεια*)

Εξισώνοντας, παίρνουμε:

$$0 + 0 = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - Mg\frac{L}{2}$$

$$I\omega_f^2 = MgL$$

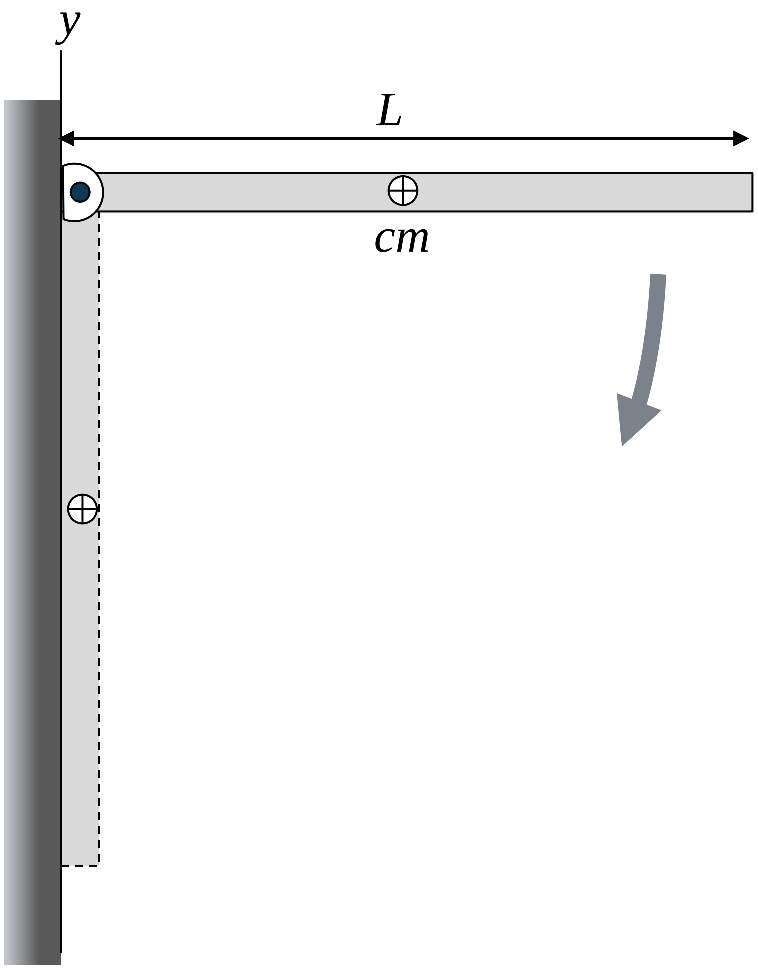
Παίρνοντας από τους πίνακες τη ροπή αδράνειας της ράβδου για περιστροφή γύρω από το άκρο της ($I = ML^2/3$) η εξίσωση γίνεται

$$\frac{1}{3} ML^2 \omega_f^2 = MgL$$

$$\frac{1}{3} L\omega_f^2 = g$$

$$\omega_f^2 = \frac{3g}{L}$$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$



ΛΥΣΗ (*συνέχεια*)

$$\omega_f = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

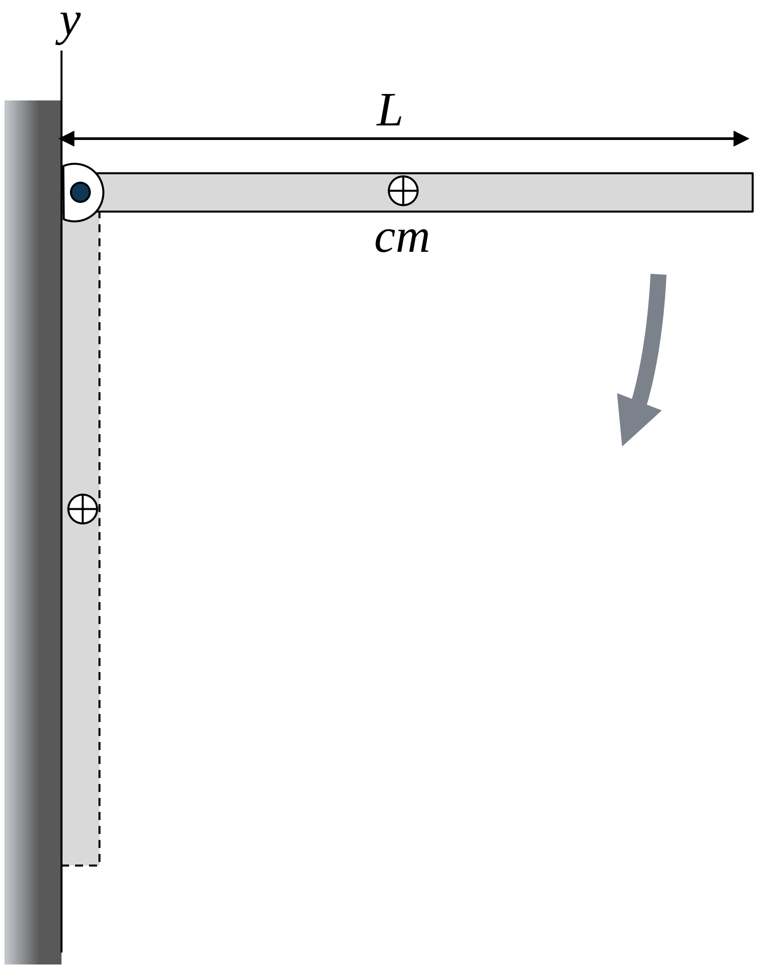
Το κάτω άκρο της ράβδου κινείται σε ένα κύκλο ακτίνας L. Επομένως, η τελική γραμμική του ταχύτητα (όταν πέφτει στον τοίχο) είναι

$$v_f = \omega_f L$$

$$v_f = \sqrt{\frac{3g}{L}} L$$

$$v_f = \sqrt{3gL}$$

$$v_f = \sqrt{3(9.8\ \text{m/s}^2)(1.0\ \text{m})} = 5.4\ \text{m/s}$$



Ισορροπία στερεού σώματος

Τώρα έχουμε δύο εκδόσεις του 2ου νόμου του Νεύτωνα:

- $\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ για τη μεταφορική κίνηση και
- $\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = I\vec{\boldsymbol{\alpha}}_{\omega}$ για την περιστροφική κίνηση.

Η συνθήκη για ένα στερεό σώμα να είναι σε ολική ισορροπία (μεταφορική και περιστροφική) είναι να ισχύουν οι σχέσεις

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = 0 \quad \text{και} \quad \sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = 0$$

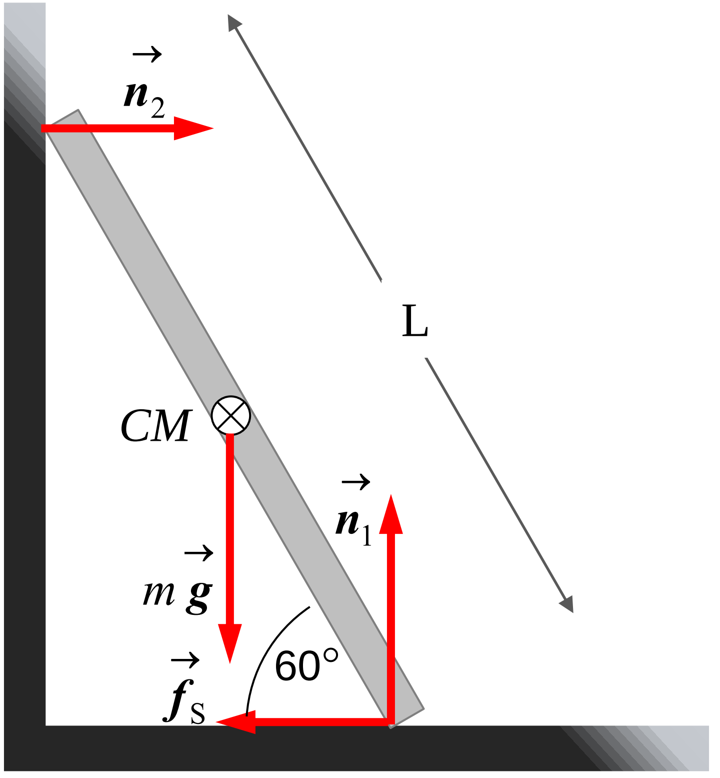
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.13 Θα γλυστρίσει η σκάλα;

Μια σκάλα με μήκος L = 3.0 m στηρίζεται σε έναν κατακόρυφο τοίχο χωρίς τριβή σε γωνία $\theta = 60°$. Ποιά πρέπει να είναι η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μ_S με το δάπεδο, ώστε η σκάλα να μη γλυστρίσει;

ΛΥΣΗ

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σκάλα είναι:

- Η βαρυτική δύναμη $m\vec{g}$ στο κέντρο μάζας της CM το οποίο είναι στο κέντρο της διότι η σκάλα είναι ομογενής,
- Η κάθετη δύναμη $\vec{n}_1$ από το δάπεδο
- Η δύναμη στατικής τριβής $\vec{f}_S$ από το δάπεδο και
- Η κάθετη δύναμη $\vec{n}_2$ από το λείο τοίχο.



Για να ισορροπεί η σκάλα, η συνισταμένη των δυνάμεων και η συνισταμένη των ροπών πρέπει να είναι ίσες με μηδέν $\sum \vec{F} = 0$ και $\sum \vec{\tau} = 0$

ΛΥΣΗ *(συνέχεια)*

Στον οριζόντιο άξονα (άξονα x), έχουμε

$$n_2 - f_S = 0 \;\Rightarrow\; f_S = n_2$$

που από το νόμο της τριβής ($f_S = \mu_S n_1$), γίνεται:

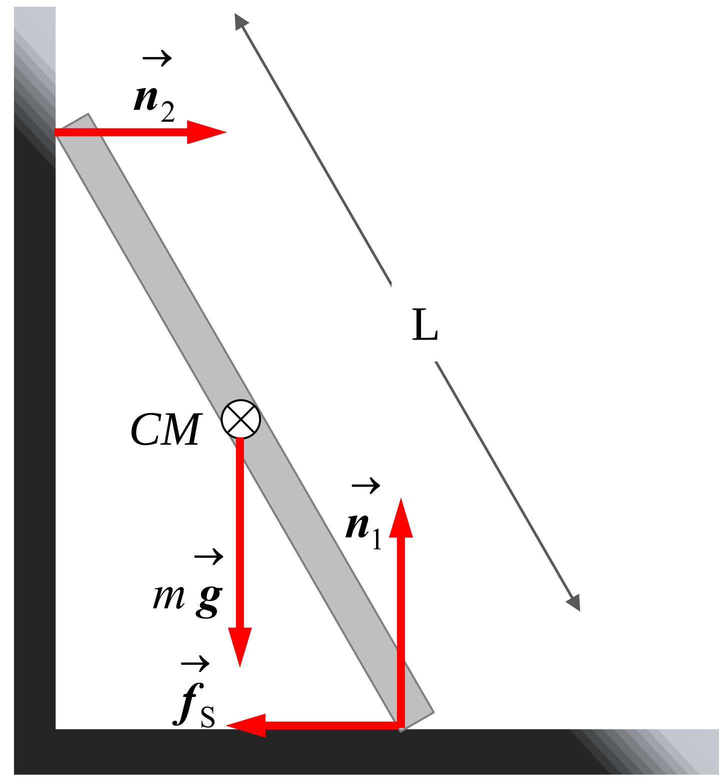
$$\mu_S n_1 = n_2 \;\Rightarrow\; \mu_S = \frac{n_2}{n_1} \qquad (1)$$

Στον κατακόρυφο άξονα (άξονας y), έχουμε:

$$n_1 - mg = 0 \;\Rightarrow mg = n_1 \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας το n_1 από την εξίσωση (2), η εξίσωση (1) γίνεται

$$\mu_S = \frac{n_2}{mg} \qquad (3)$$



ΛΥΣΗ *(συνέχεια)*

Τέλος, από την ισορροπία των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο (π.χ., το σημείο Ο), έχουμε:

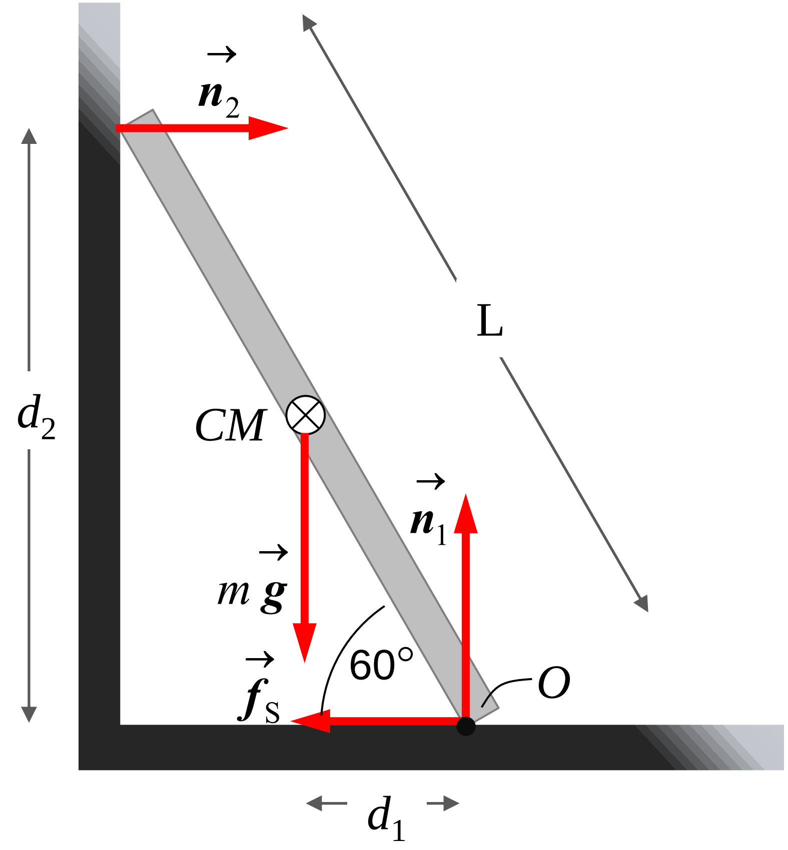
$$n_2 d_2 - mgd_1 = 0 \;\Rightarrow n_2 d_2 = mgd_1$$

$$\Rightarrow \quad n_2 = \frac{mgd_1}{d_2}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3), παίρνουμε

$$\mu_S = \frac{\frac{mgd_1}{d_2}}{mg} \Rightarrow \mu_S = \frac{\frac{mgd_1}{d_2}}{\frac{mg}{1}} \Rightarrow \mu_S = \frac{mgd_1}{mgd_2}$$

$$\Rightarrow \mu_S = \frac{d_1}{d_2} \qquad (4)$$



Από το ορθογώνιο τρίγωνο, που σχηματίζει η σκάλα, έχουμε:

$d_2 = L\sin 60^\circ$ = (3.0 m) $\sin 60^\circ$ = 2.6 m και $2d_1 = L\cos 60^\circ$ = 1.5 m $\Rightarrow d_1$ = 0.75 m

Οπότε, η εξίσωση (4) μας δίνει για το συντελεστή τριβής: μ_S = 0.75/2.6 = **0.29**

Κυλιόμενο σώμα

Η κόκκινη καμπύλη δείχνει την τροχιά που διαγράφει ένα σημείο που βρίσκεται στην περιφέρεια του σώματος.

- Η τροχιά αυτή ονομάζεται ***κυκλοειδής καμπύλη***.

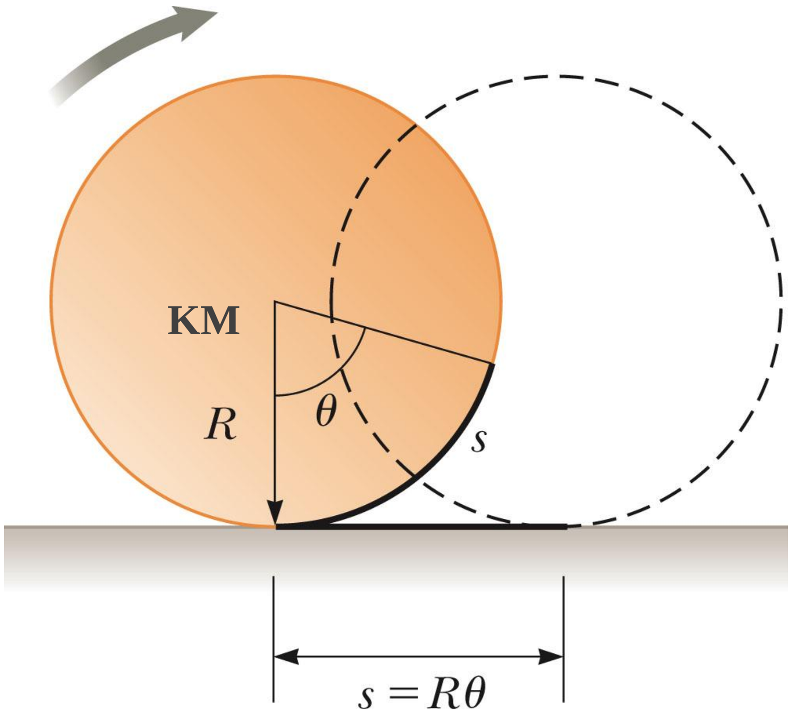
Η πράσινη ευθεία δείχνει την τροχιά που ακολουθεί το κέντρο μάζας του σώματος.

Στην περίπτωση που το σώμα εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση, η περιστροφική και τη μεταφορική κίνησή του συνδέονται με μια απλή σχέση.

Κύλιση χωρίς ολίσθηση

Το μέτρο της μεταφορικής ταχύτητας του κέντρου μάζας (v_{KM} ή v_{CM}) και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω της περιστροφής ενός κυλιόμενου σώματος συνδέονται με τη σχέση

$$v_{\mathrm{KM}} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{\mathrm{KM}} = R\omega}$$



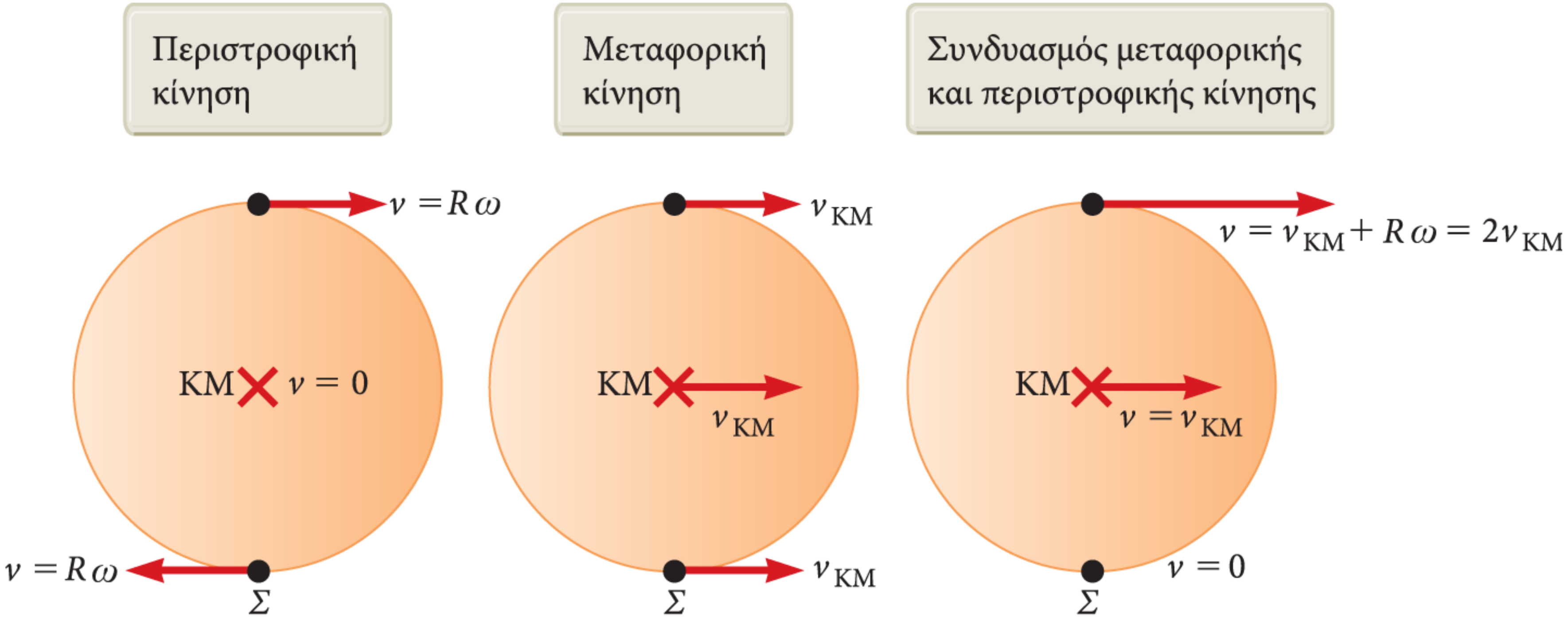
Αντίστοιχα, το μέτρο της μεταφορικής επιτάχυνσης του κέντρου μάζας (α_{KM} ή α_{CM}) και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης α_ω συνδέονται με τη σχέση

$$\alpha_{\mathrm{KM}} = \frac{dv_{KM}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{\mathrm{KM}} = R\alpha_\omega}$$

Κύλιση *(συνέχεια)*

Η **κύλιση** ενός σώματος μπορεί να θεωρηθεί ως ένας **συνδυασμός μετατόπισης και περιστροφής**.

Το σημείο επαφής μεταξύ της επιφάνειας και του κυλίνδρου (σημείο Σ) έχει μηδενική γραμμική ταχύτητα ($v = 0$).



Συνολική κινητική ενέργεια ενός κυλιόμενου σώματος

Η συνολική κινητική ενέργεια ενός κυλιόμενου σώματος ισούται με την κινητική ενέργεια της μετατόπισης του κέντρου μάζας του συν την κινητική ενέργεια της περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας του.

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{KM}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\mathrm{KM}}^2$$

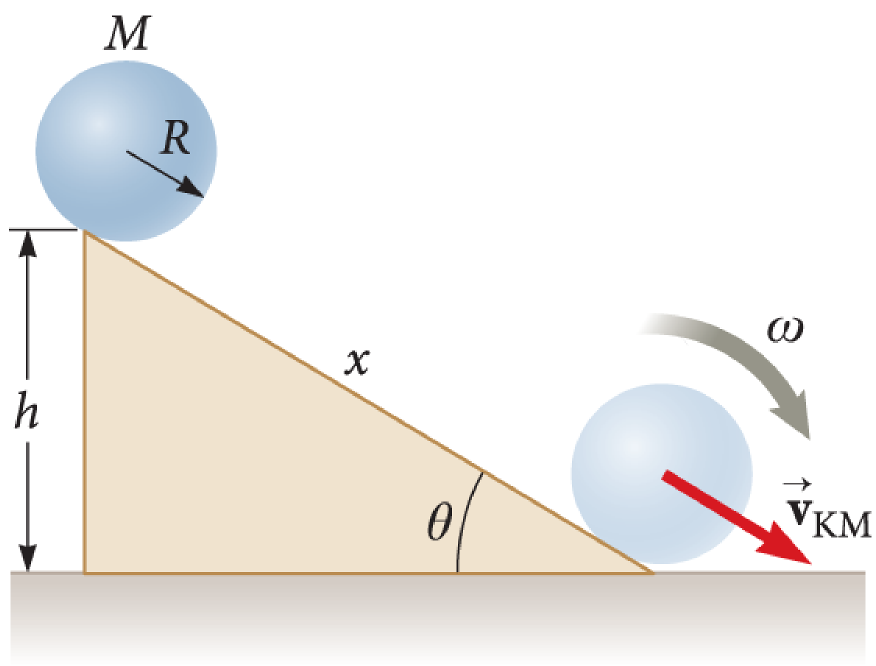
- Ο όρος $\frac{1}{2} I_{\mathrm{KM}} \omega^2$ αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια του κυλίνδρου λόγω της περιστροφικής κίνησής του γύρω από το κέντρο μάζας του.

- Ο όρος $\frac{1}{2} M v_{\mathrm{KM}}^2$ αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια του κυλίνδρου λόγω της μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας του.

Συνολική κινητική ενέργεια – Παράδειγμα

Η επιταχυνόμενη κύλιση είναι εφικτή μόνο αν υπάρχει δύναμη τριβής μεταξύ της σφαίρας και του επιπέδου.

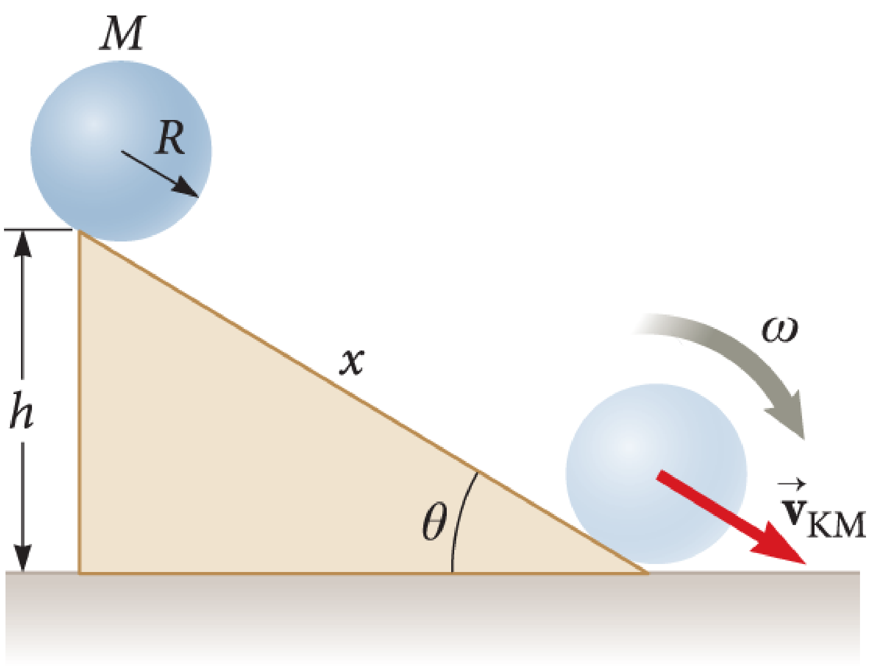
- Η τριβή παράγει την απαιτούμενη ροπή για την περιστροφή.
- Δεν υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας επειδή το σημείο επαφής είναι ακίνητο ως προς την επιφάνεια σε κάθε χρονική στιγμή.
  - Η τριβή κύλισης προκαλείται από τις παραμορφώσεις της επιφάνειας και του κυλιόμενου σώματος.



Συνολική κινητική ενέργεια – Παράδειγμα (*συνέχεια*)

Εφαρμόστε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$



- $K_f = \frac{1}{2} I_{KM}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{KM}^2$

  $K_f = \frac{1}{2} I_{KM}\frac{v_{KM}^2}{R^2} + \frac{1}{2} M v_{KM}^2$

  $K_f = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{KM}}{R^2} + M\right) v_{KM}^2$
- $U_i = Mgh$
- $U_f = K_i = 0$
- Λύστε ως προς v_{KM}, $\quad v_{KM} = \sqrt{\dfrac{2gh}{\left(1+\dfrac{I_{KM}}{MR^2}\right)}}$