Κεφάλαιο 6α

Περιστροφή στερεού σώματος γύρω από σταθερό άξονα

CENGAGE Learning™

Στερεό (ή άκαμπτο) σώμα

Τα μοντέλα ανάλυσης που παρουσιάσαμε μέχρι τώρα δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση όλων των κινήσεων.

Μπορούμε να αναλύσουμε την κίνηση ενός μη σημειακού σώματος (π.χ., ενός αυτοκινήτου ή μιας ρόδας) θεωρώντας το ως σύστημα πολλών σωματιδίων.

- Η ανάλυση απλοποιείται αν υποθέσουμε ότι το σώμα είναι **άκαμπτο**.

Ένα άκαμπτο σώμα δεν είναι παραμορφώσιμο.

- Οι σχετικές θέσεις όλων των σωματιδίων που αποτελούν το σώμα παραμένουν σταθερές.
- Όλα τα πραγματικά σώματα παραμορφώνονται σε κάποιο βαθμό, αλλά το μοντέλο του άκαμπτου σώματος είναι χρήσιμο σε πολλές περιπτώσεις όπου η παραμόρφωση είναι αμελητέα.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε μία νέα κατηγορία προβλημάτων, τα οποία βασίζονται στο μοντέλο του άκαμπτου σώματος και τα οποία αναλύονται με βάση τους νόμους του Νεύτωνα και τις έννοιες του έργου και της ενέργειας.

Γωνιακή θέση

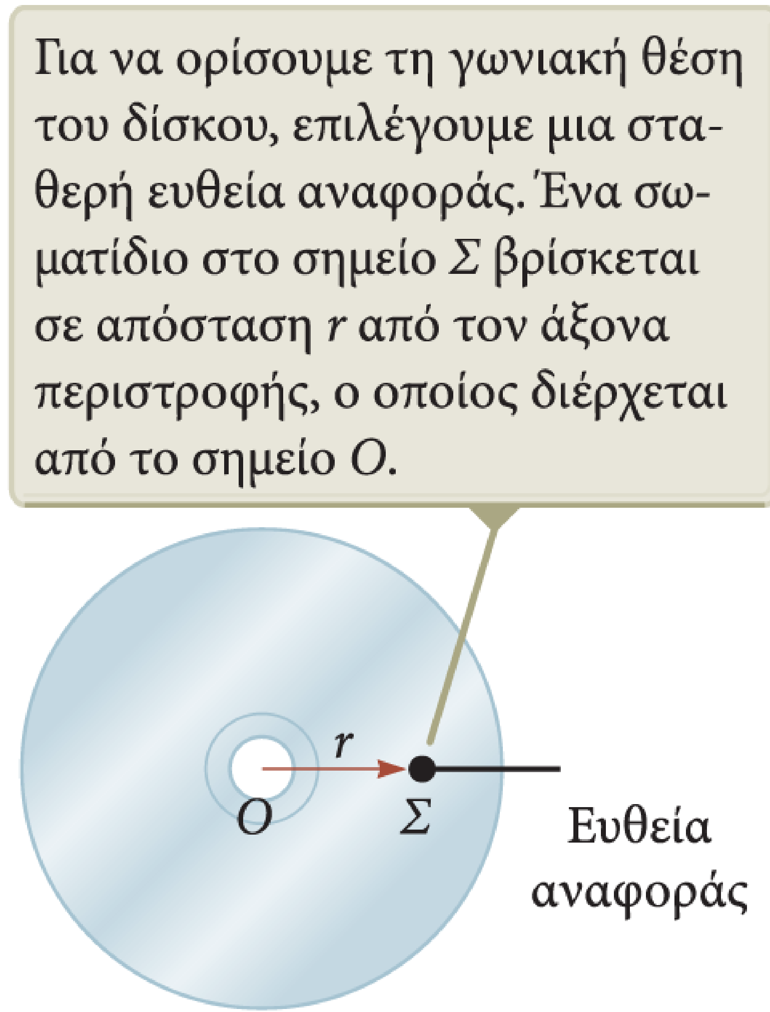
Ο **άξονας περιστροφής** είναι το κέντρο O του δίσκου.

Επιλέγουμε μια σταθερή **ευθεία αναφοράς**.

Το σημείο Σ βρίσκεται σε σταθερή απόσταση r από την αρχή των συντεταγμένων.

Μας διευκολύνει να προσδιορίσουμε τη θέση του Σ (ή οποιουδήποτε άλλου σημείου) χρησιμοποιώντας **πολικές συντεταγμένες**.

Το Σ έχει συντεταγμένες (r, θ), όπου r είναι η απόσταση του Σ από την αρχή των αξόνων και η γωνία θ μετριέται <u>αριστερόστροφα</u> από την ευθεία αναφοράς.



Γωνιακή θέση (*συνέχεια*)

Καθώς το σώμα κινείται, μεταβάλλεται μόνο η συντεταγμένη θ του σημείου Σ.

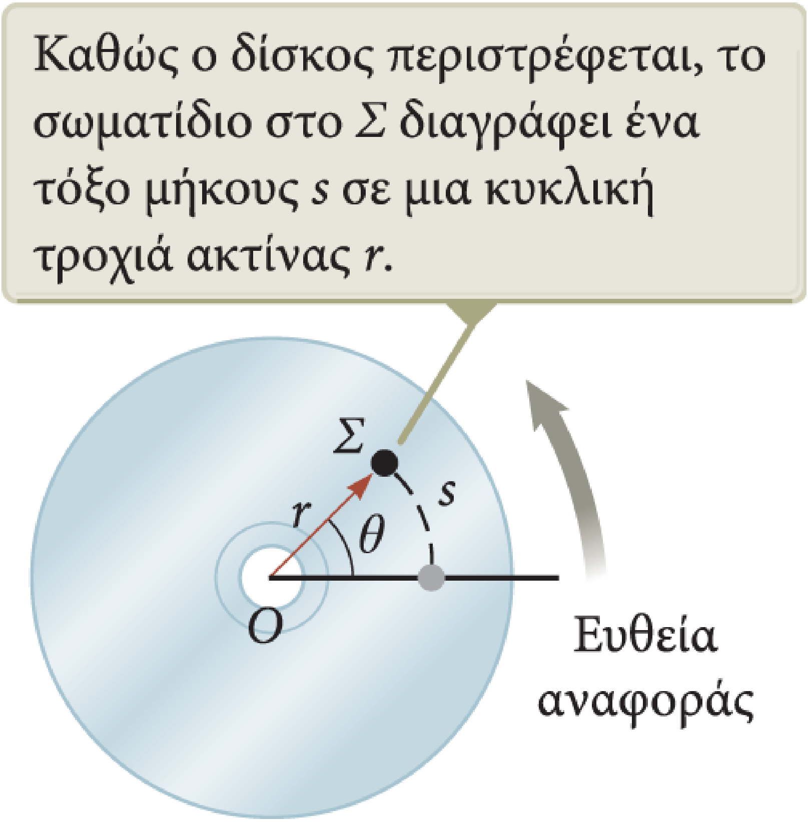
Καθώς το σημείο Σ κινείται κυκλικά σαρώνοντας γωνία θ, διαγράφει τόξο μήκους *s*.

Το μήκος του τόξου *s* και η απόσταση *r* συνδέονται μέσω της σχέσης

$$s = \theta r$$

- Ως σταθερή ευθεία αναφοράς στον χώρο συχνά επιλέγεται ο άξονας *x*.

Η γωνία θ παίζει τον ίδιο ρόλο στην περιστροφική κίνηση όπως η θέση *x* στη μεταφορική κίνηση.



Ακτίνιο

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφτεί ως: $\theta = \dfrac{s}{r}$

Η γωνία θ είναι αδιάστατος αριθμός, αλλά συνηθίζουμε να τη μετράμε σε ακτίνια (radians, rad).

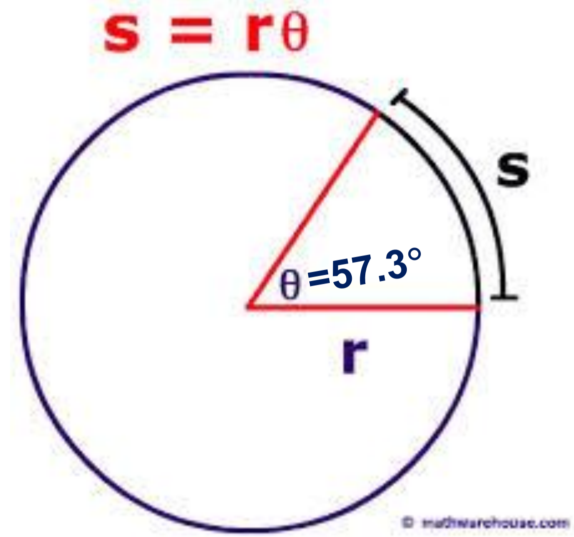
Το ένα ακτίνιο είναι η επίκεντρος γωνία που αντιστοιχεί σε ένα τόξο κύκλου το οποίο έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου.

Στις εξισώσεις της περιστροφικής κίνησης, πρέπει να χρησιμοποιείτε γωνίες μετρημένες σε ακτίνια (όχι σε μοίρες °).

Μετατροπές

Σύγκριση μοιρών με ακτίνια

$$1\,\text{rad} = \frac{360^{\circ}}{2\pi} = 57.3^{\circ}$$



Μετατροπή μοιρών σε ακτίνια

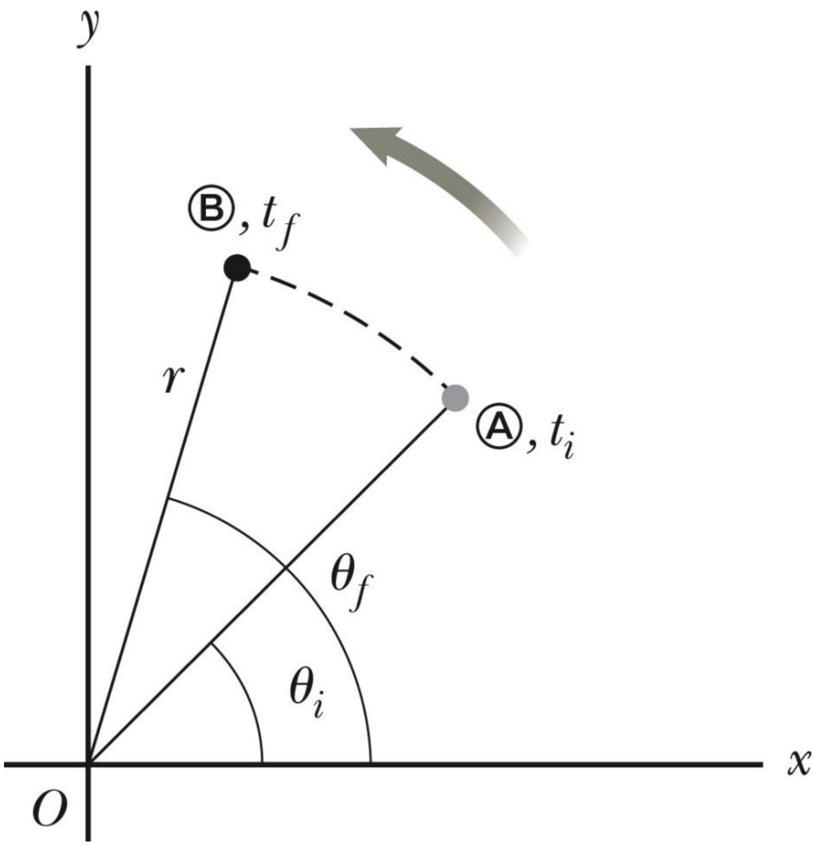
$$\theta\,(\text{rad}) = \frac{\pi}{180^{\circ}}\,\theta(^{\circ})$$

Γωνιακή μετατόπιση

Η γωνιακή μετατόπιση ορίζεται ως η γωνία που σαρώνει το σώμα κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος.

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

Αυτή τη γωνία σαρώνει και η ευθεία αναφοράς (r) που συνδέει οποιδήποτε σημείο του σώματος με τον άξονα περιστροφής O.



Μέτρο γωνιακής ταχύτητας

Η (στιγμιαία) γωνιακή ταχύτητα, ή μέτρο της γωνιακής ταχύτητας, είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής θέσης του σώματος, δηλαδή, ο ρυθμός με τον οποίο το σώμα περιστρέφεται

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι βαθμωτό μέγεθος. Είναι αντίστοιχο με το βαθμωτό μέγεθος της γραμμικής ταχύτητας (ή μέτρο ταχύτητας).

Οι μονάδες του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας είναι τα ακτίνια/δευτερόλεπτο (rad/s) ή s^{-1} (επειδή τα ακτίνια δεν έχουν διαστάσεις)

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι θετικό όταν η γωνία θ αυξάνεται (αριστερόστροφη περιστροφή).

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι αρνητικό όταν η γωνία θ μειώνεται (δεξιόστροφη περιστροφή).

Μέτρο γωνιακής επιτάχυνσης

Η (στιγμιαία) γωνιακή επιτάχυνση, ή μέτρο γωνιακής επιτάχυνσης, είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του σώματος

$$\alpha_{\omega} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

Σημείωση: Για τη γωνιακή επιτάχυνση χρησιμοποιούμε το σύμβολο α_{ω} για να τη διακρίνουμε από τη γραμμική επιτάχυνση α.

Η γωνιακή επιτάχυνση είναι βαθμωτό μέγεθος.

Μέτρο γωνιακής επιτάχυνσης (*συνέχεια*)

Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης α_ω είναι ανάλογο με το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης α.

Οι μονάδες της γωνιακής επιτάχυνσης α_ω είναι τα rad/s^2 ή s^{-2} επειδή τα ακτίνια δεν έχουν διαστάσεις.

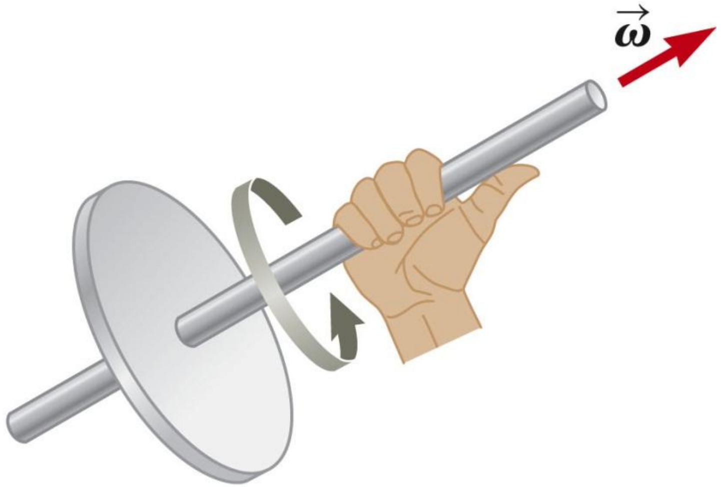
Η γωνιακή επιτάχυνση α_ω είναι θετική όταν ένα σώμα, που περιστρέφεται αριστερόστροφα, επιταχύνει.

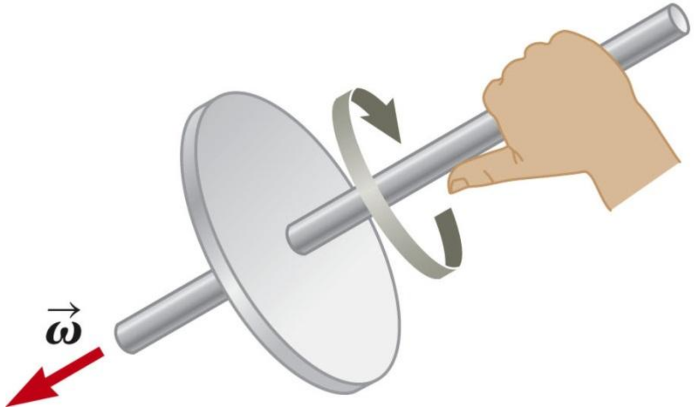
Η α_ω είναι επίσης θετική όταν ένα σώμα, που περιστρέφεται δεξιόστροφα, επιβραδύνει.

Οι κατευθύνσεις, λεπτομέρειες

Όπως προαναφέραμε, τα βαθμωτά μεγέθη ω και α_ω είναι τα μέτρα των διανυσμάτων της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης αντίστοιχα.

Οι κατευθύνσεις αυτών των διανυσμάτων δίνονται **από τον κανόνα του δεξιού χεριού**.





Οι εξισώσεις της περιστροφικής κινηματικής

Οι εξισώσεις της κινηματικής για το στερεό σώμα **με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση α_ω** έχουν την ίδια μαθηματική μορφή με τις εξισώσεις για το σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση.

Οι αντιστοιχίες των μεταβλητών μεταξύ των εξισώσεων της μεταφορικής κίνησης και των εξισώσεων της περιστροφικής κίνησης είναι

- $x \rightarrow \theta$
- $v \rightarrow \omega$
- $\alpha \rightarrow \alpha_\omega$

$$\omega_f = \omega_i + \alpha_\omega \Delta t$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i \Delta t + \frac{1}{2}\alpha_\omega (\Delta t)^2$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha_\omega(\theta_f - \theta_i)$$

Σύγκριση εξισώσεων περιστροφικής και μεταφορικής κίνησης

ΠΙΝΑΚΑΣ 13.1 Οι εξισώσεις της περιστροφικής και της γραμμικής κίνησης με σταθερή επιτάχυνση

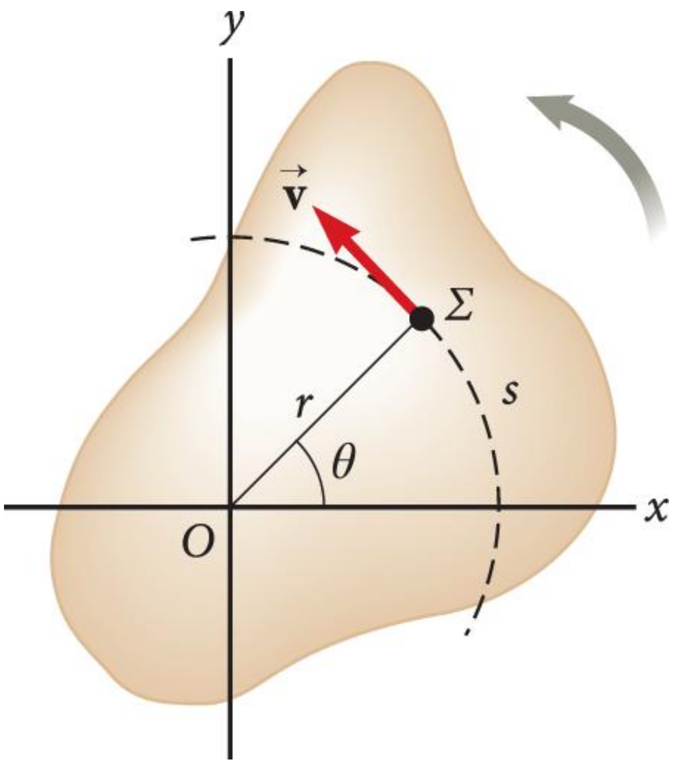
Περιστροφική κίνηση	Γραμμική κίνηση
Γωνιακή θέση θ	Θέση x
Γωνιακή ταχύτητα ω	Γραμμική ταχύτητα v
Γωνιακή επιτάχυνση α_ω	Γραμμική επιτάχυνση α
$\omega_f = \omega_i + \alpha_\omega \Delta t$	$v_f = v_i + \alpha \Delta t$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i \Delta t + \frac{1}{2}\alpha_\omega (\Delta t)^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}\alpha (\Delta t)^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha_\omega \Delta\theta$	$v_f^2 = v_i^2 + 2\alpha \Delta x$

Μέτρο ταχύτητας – Λεπτομέρειες

Η γραμμική ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$ είναι πάντα εφαπτομενική στην κυκλική τροχιά.

Το μέτρο της εφαπτομενικης ταχύτητας ενός σημείου Σ του σώματος που βρίσκεται σε ακτίνα r από τον άξονα περιστροφής O είναι

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\,\omega$$



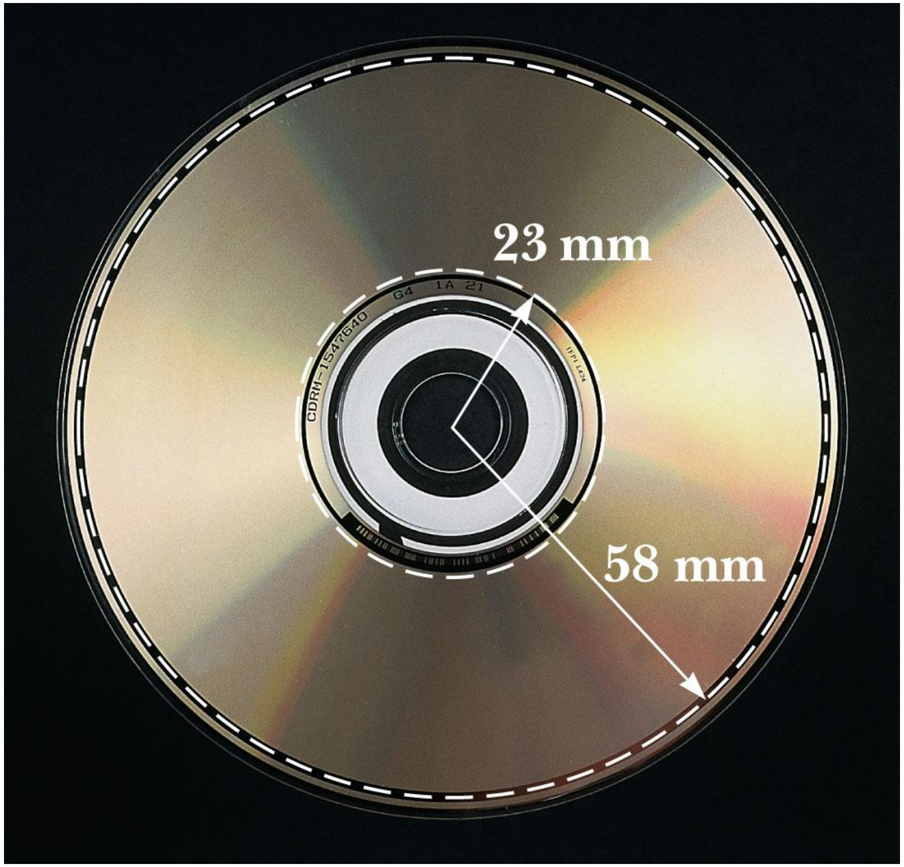
Επειδή το r δεν είναι ίδιο για όλα τα σημεία του σώματος, το μέτρο της εφαπτομενικής ταχύτητας κάθε σημείου δεν είναι ίδιο.

Το μέτρο της εφαπτομενικής ταχύτητας αυξάνεται όσο αυξάνεται η απόσταση από το κέντρο περιστροφής.

Παράδειγμα περιστροφικής κίνησης

Για να «διαβάσει» μια συσκευή αναπαραγωγής έναν ψηφιακό δίσκο (CD), η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου πρέπει να μεταβάλλεται έτσι ώστε η γραμμική ταχύτητα να παραμένει σταθερό $\mathrm{v} = r\omega$.

- Τυπικά, το μέτρο ταχύτητας της επιφάνειας του δίσκου στο σημείο του συστήματος λέιζερ-φακού είναι 1.3 m/s.



Στα εσωτερικά τμήματα του δίσκου, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι μεγαλύτερο από ό,τι στα εξωτερικά.

$$\omega = \frac{\mathrm{v}}{r} \Rightarrow \omega_{\varepsilon\sigma\omega\tau} = \frac{1.3\ \mathrm{m/s}}{23\times10^{-3}\ \mathrm{m}} = 56.5\ \mathrm{rad/s} \quad \text{και}\ \omega_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \frac{1.33\ \mathrm{m/s}}{58\times10^{-3}\ \mathrm{m}} = 22.4\ \mathrm{rad/s}$$

Επιτάχυνση – Λεπτομέρειες

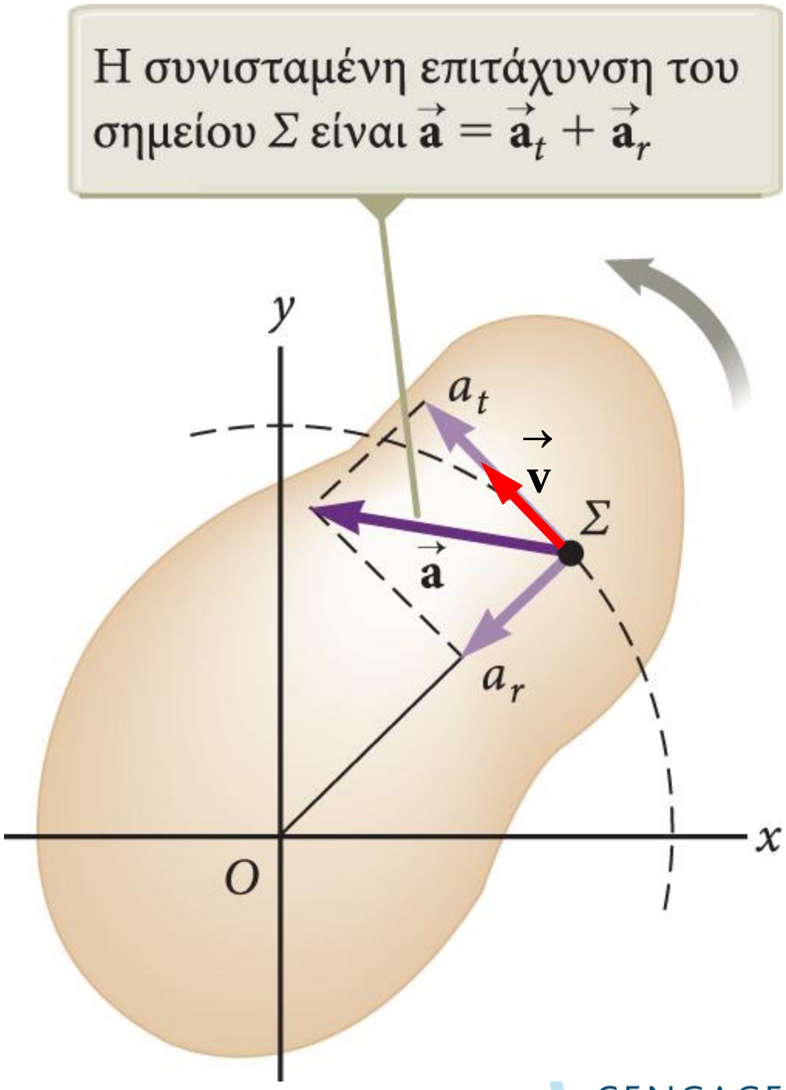
Η **εφαπτομενική επιτάχυνση** α_t είναι ο ρυθμός μεταβολής της (εφαπτομενικής) ταχύτητας v.

$$\alpha_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\,\alpha_\omega$$

Ένα σώμα που κάνει κυκλική κίνηση με ταχύτητα σταθερού μέτρου v έχει πάντοτε **κεντρομόλο επιτάχυνση** α_r.

- Επομένως, όλα τα σημεία ενός περιστρεφόμενου στερεού σώματος έχουν κεντρομόλο επιτάχυνση.

$$\alpha_r = \frac{v^2}{r} = r\,\omega^2$$



CENGAGE Learning

Επιτάχυνση – Λεπτομέρειες

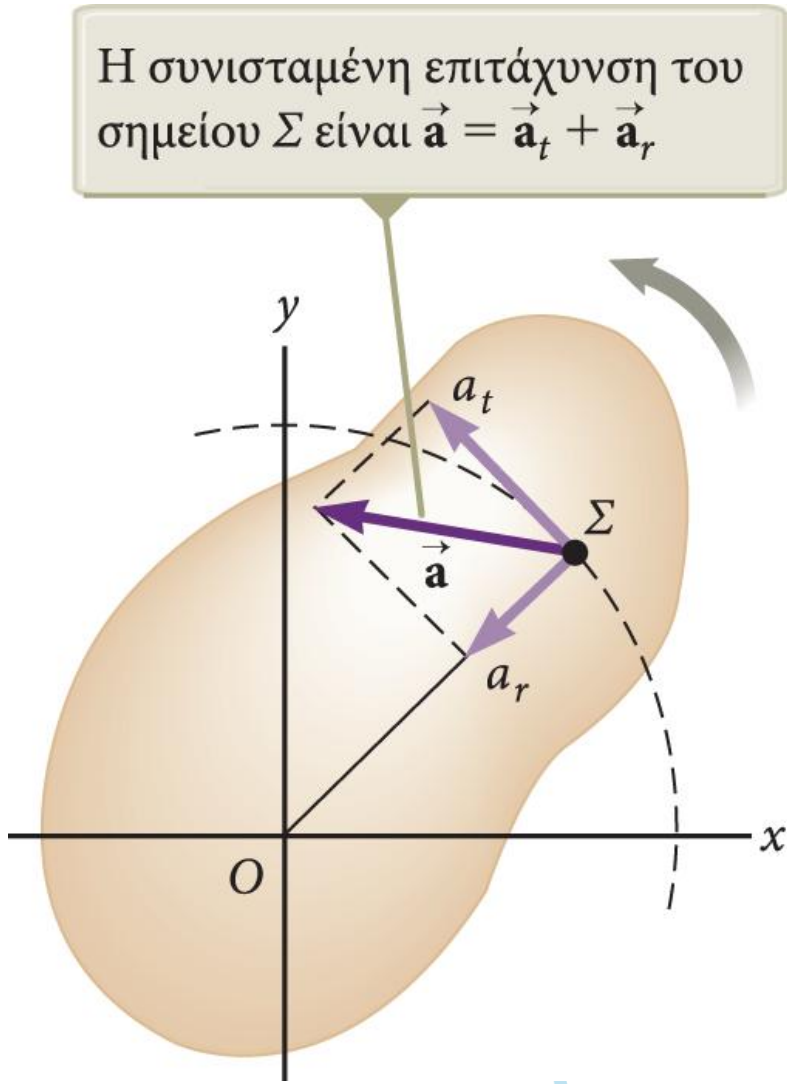
- Η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης α_t προκαλείται από τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας.
- Η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης α_r προκαλείται από τη μεταβολή της κατεύθυνσης.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνολική επιτάχυνση ενός περιστρεφόμενου σώματος από αυτές τις συνιστώσες:

$$\alpha = \sqrt{\alpha_t^2 + \alpha_r^2}$$

$$\alpha = \sqrt{r^2\alpha_\omega^2 + r^2\omega^2}$$

$$\alpha = r\sqrt{\alpha_\omega^2 + r\omega^2}$$

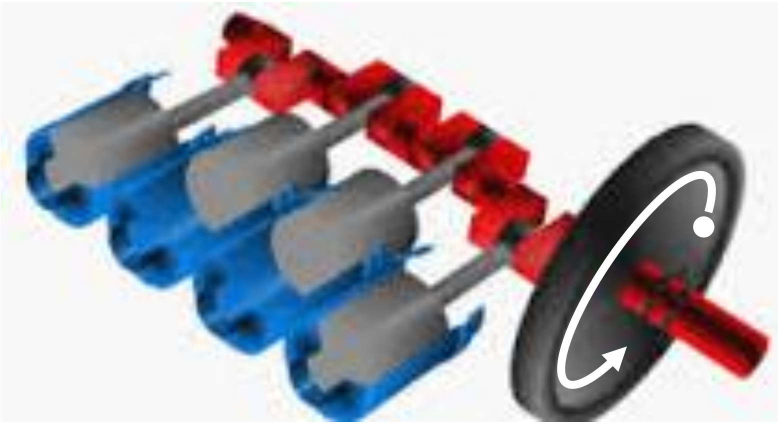


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.2 Ένας περιστρεφόμενος στροφαλογόρος άξονας

Το ταχύμετρο ενός αυτοκινήτου καταγράφει τη συχνότητα περιστροφής του στροφαλοφόρου άξονα του κινητήρα. Στο ρελαντί, η μηχανή του αυτοκινήτου γυριζει με 700 rpm. Όταν το φανάρι γίνεται πράσινο, η περιστροφή του άξονα αυξάνεται στις 2500 rpm μέσα σε 3.0 s με σταθερό ρυθμό. Πόσες περιστροφές κάνει ο στροφαλοφόρος άξονας σε αυτά τα 3 s;

ΛΥΣΗ

Φανταστείτε ότι σχεδιάζετε μια κουκίδα πάνω στο στροφαλοφόρο.



Ας θεωρήσουμε την αρχικη χρονική στιγμή $t_i = 0$ τη γωνιακή θέση της κουκίδας $\theta_i = 0$.

Μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = 3.0$ s, η κουκίδα θα έχει γυρίσει σε γωνία θ_f που δίνεται από την εξίσωση:

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i \Delta t + \frac{1}{2}\alpha_\omega (\Delta t)^2$$

Η αρχική γωνιακή ταχύτητα βρίσκεται αν μετατρέψουμε τα rpm σε rad/s.

$$\omega_i = 700 \frac{\text{rev}}{\text{min}} = 700 \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 73.3 \text{ rad/s}$$

ΛΥΣΗ (*συνέχεια*)

Ομοίως, η τελική γωνιακή ταχύτητα σε rad/s είναι

$$\omega_f = 2500\frac{\text{rev}}{\text{min}} = 2500\frac{2\pi\ \text{rad}}{60\ \text{s}} = 262\ \text{rad/s}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση μπορεί να υπολογιστεί από την αρχική και την ταλική γωνιακή ταχύτητα.

$$\alpha_\omega = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t} = \frac{(262\ \text{rad/s}) - (73.3\ \text{rad/s})}{3.0\ \text{s}} = 62.9\ \text{rad/s}^2$$

Επομένως, στη διάρκεια των 3 s η κουκίδα (δηλαδή, ο στροφαλοφόρος άξονας) θα περιστραφεί κατά γωνία

$$\theta_f = 0 + (73.3\ \text{rad/s})(3.0\ \text{s}) + \frac{1}{2}(62.9\ \text{rad/s}^2)(3.0\ \text{s})^2 = 503\ \text{rad}$$

Επειδή, 503 / 2π = 80, βρίσκουμε ότι ο στροφαλοφόρος άξονας, μέχρι να φτάσει τις 2500 rpm, κάνει 80 περιστροφές

Κινητική ενέργεια περιστροφής

Ένα σώμα που περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω έχει κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής, παρά το γεγονός ότι μπορεί να μην έχει καθόλου γραμμική κινητική ενέργεια.

Η κινητική ενέργεια περιστροφής ενός στερεού σώματος δίνεται από τον τύπο

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Το μέγεθος I ονομάζεται ροπή αδράνειας του σώματος και είναι για την περι-στροφή ότι είναι η μάζα m για τη γραμμική κίνηση του σώματος.

Αντιστοιχία περιστροφικής και γραμμικής κινητικής ενέργειας

Υπάρχει αντιστοιχία ανάμεσα στην κινητική ενέργεια λόγω γραμμικής κίνησης $K = \frac{1}{2}mv^2$ και στην κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης $K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$

Η κινητική ενέργεια περιστροφής δεν είναι κάποιο νέο είδος ενέργειας. Η εξίσωσή της έχει διαφορετική μορφή, επειδή η ενέργεια αυτή σχετίζεται με την περιστροφική κίνηση των σωμάτων.

Οι μονάδες της κινητικής ενέργειας περιστροφής είναι τα joule (J).

Ροπή αδράνειας

Η ροπή αδράνειας ενός συστήματος μεμονωμένων σωματιδίων ως προς έναν άξονα ορίζεται ως

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

όπου, m_i η μάζα κάθε σωματιδίου και
r_i η απόστασή του από τον άξονα περιστροφής.

Η μονάδα της της ροπής αδράνειας στο SI είναι το $kg \cdot m^2$.

- Η ροπή αδράνειας ενός σώματος είναι ένα μέτρο της τάσης που έχει το σώμα να αντιστέκεται στις μεταβολές της περιστροφικής κίνησής του, ακριβώς όπως η μάζα ενός σώματος είναι ένα μέτρο της τάσης που έχει το σώμα να αντιστέκεται στις μεταβολές της μεταφορικής κίνησής του.
- Προσέξτε: ενώ κάθε σώμα έχει μια μονανική μάζα m, η ροπή αδράνειας του ίδιου σώματος εξαρτάται από την επιλογή του άξονα περιστροφής.
- Η ροπή αδράνειας εξαρτάται από τη μάζα, αλλά και από την κατανομή της μάζας γύρω από τον άξονα περιστροφής.

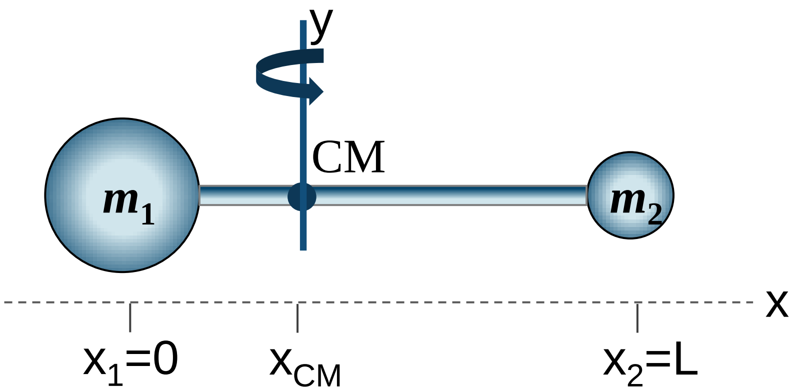
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.3 Το κέντρο βάρους (και ροπή αδράνειας)

Μια μπάλα που έχει μάζα m_1 = 2.0 kg και μια μπάλα που έχει μάζα m_2 = 0.50 kg συνδέονται με μια βέργα χωρίς μάζα που έχει μήκος L = 0.50 m.

A. Που βρίσκεται το κέντρο μάζας (κέντρο βάρους);

B. Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας.

ΛΥΣΗ



A. Ας πούμε $x_1 = 0$ και $x_2 = L = 0.50$ m τις θέσεις των δύο μπαλών στον άξονα x και x_{CM} τη ζητούμενη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος.

Έχουμε $$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_{CM} = \frac{(2.0\,\text{kg})(0\,\text{m}) + (0.50\,\text{kg})(0.50\,\text{m})}{(2.0\,\text{kg} + 0.50\,\text{kg})} = 0.10\,\text{m}$$

B. Για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας ως προς έναν άξονα (όπως ο y) που περνάει από το CM, έχουμε

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = (2.0\,\text{kg})_1(0.10\,\text{m})^2 + (0.50\,\text{kg})_1(0.40\,\text{m})^2$$

$$= 0.10\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Ροπή αδράνειας (*συνέχεια*)

Για ένα συνεχές στερεό σώμα, θεωρούμε ότι το σώμα απαρτίζεται από πολλά μικρά στοιχεία (απειροστά), καθένα με μάζα dm.

Η σχέση για τη ροπή αδράνειας I γράφεται σαν το ολοκλήρωμα

$$\boxed{I = \int r^2\, dm}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της πυκνότητας ρ του σώματος (πυκνότητα = μάζα / όγκος), $\rho = \dfrac{dm}{dV}$, η ροπή αδράνειας του στερεού σώματος γράφεται

$$I = \int \rho r^2\, dV$$

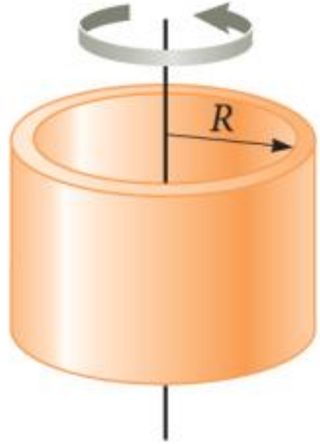
Όταν η πυκνότητα είναι σταθερή (ομογενές σώμα), η ροπή αδράνειας γράφεται:

$$\boxed{I = \rho \int r^2\, dV}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 13.3 Ροπές αδράνειας αντικειμένων με ομοιόμορφη πυκνότητα

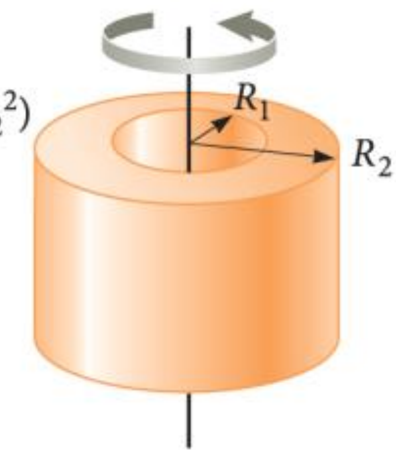
Δακτύλιος ή λεπτό κυλινδρικό κέλυφος

$I_{KM} = MR^2$



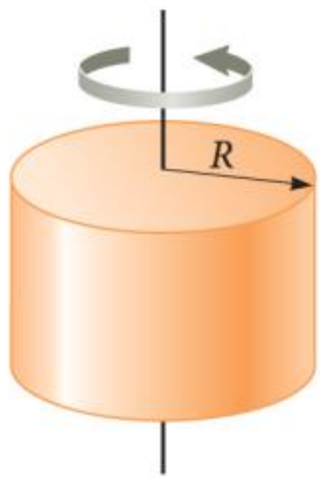
Κοίλος κύλινδρος

$I_{KM} = \frac{1}{2}M(R_1{}^2 + R_2{}^2)$



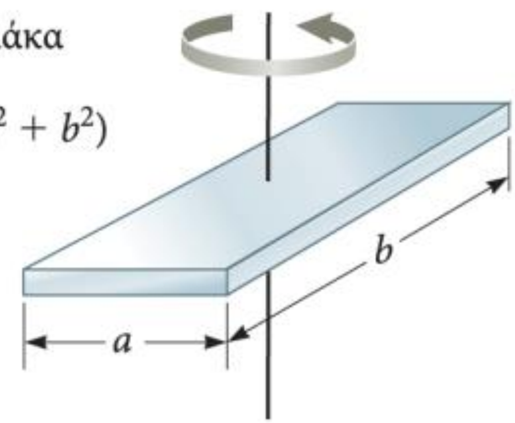
Συμπαγής κύλινδρος ή δίσκος

$I_{KM} = \frac{1}{2}MR^2$



Ορθογώνια πλάκα

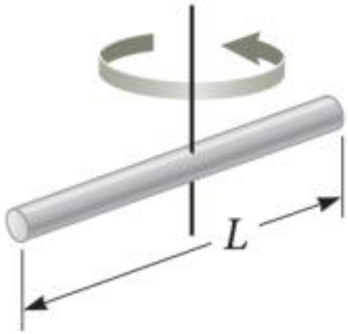
$I_{KM} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$



ΠΙΝΑΚΑΣ 13.3 Ροπές αδράνειας αντικειμένων με ομοιόμορφη πυκνότητα (συνέχεια)

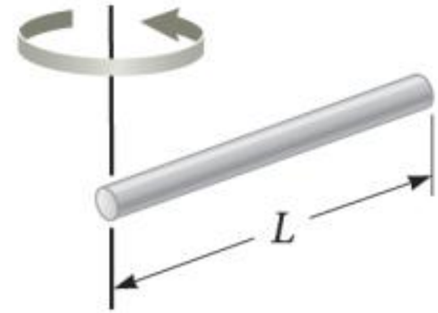
Επιμήκης λεπτή ράβδος με άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο της

$$I_{KM} = \frac{1}{12}ML^2$$



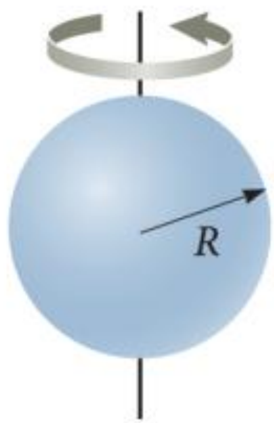
Επιμήκης λεπτή ράβδος με άξονα περιστροφής που διέρχεται από το άκρο της

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$



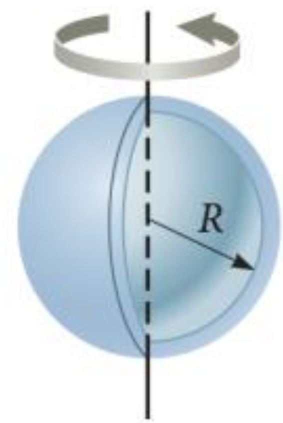
Συμπαγής σφαίρα

$$I_{KM} = \frac{2}{5}MR^2$$



Λεπτό σφαιρικό κέλυφος

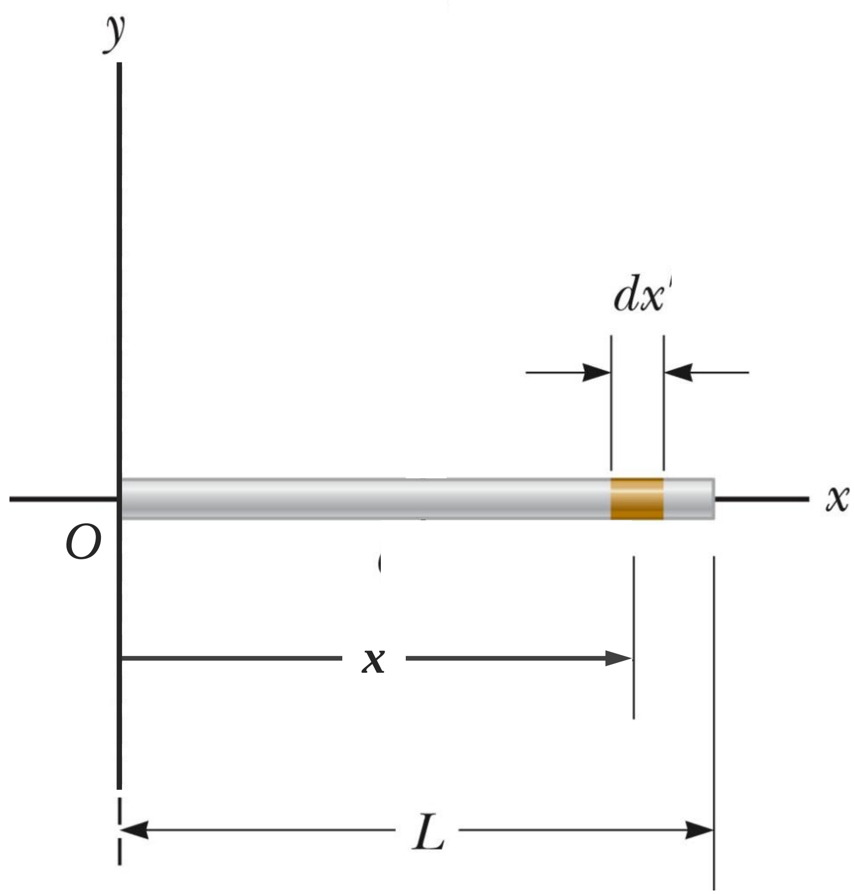
$$I_{KM} = \frac{2}{3}MR^2$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.8 Ροπή αδράνειας μιας βέργας ως προς τη μια άκρη της

Βρείτε τη ροπή αδράνειας μιας λεπτής, ομοιόμορφης βέργας μήκους L και μάζας M η οποία περιστρέφεται ως προς το ένα άκρο της.

ΛΥΣΗ



Θέλουμε να βρούμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς έναν άξονα που περνάει από το άκρο της O (άξονας y)

Χωρίζουμε τη βέργα σε μικρά κοματάκια μήκους dx (απειροστά).

Ας φανταστούμε ένα τέτοιο κοματάκι σε απόσταση x από τον άξονα περιστροφής. Εφ’όσον η ράβδος έχει μάζα M σε μήκος L, το κοματάκι dx θα έχει μάζα

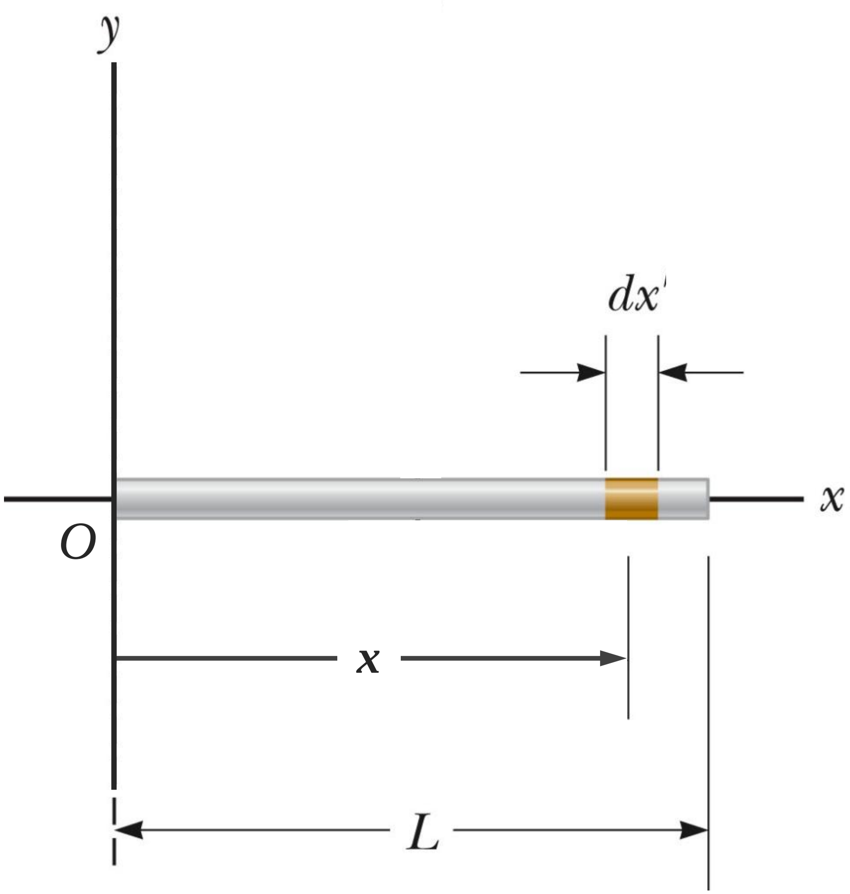
$$dm = \frac{M}{L} dx$$

(βρείτε το με απλή μέθοδο των τριών)

ΛΥΣΗ *(Συνέχεια)*

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y είναι: $I = \int_M x^2 \, dm$

$$= \int_{x=0}^{x=L} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{x=0}^{x=L} x^2 dx$$



Από το Παράρτημα Α, σελ. 620, βλέπουμε ότι $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

από όπου, για n = 2, παίρνουμε:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Επομένως:

$$I = \frac{M}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=L} = \frac{M}{3L}\left[x^3\right]_{x=0}^{x=L} = \frac{M}{3L}(L^3 - 0^3) = \frac{M}{3L}L^3 = \frac{ML^2}{3}$$

Το θεώρημα των παράλληλων αξόνων

Αν γνωρίζουμε τη ροπή αδράνειας ενός στερεού σχήματος ως προς το κέντρο μάζας (βάρους) του, είναι εύκολο να την υπολογίσουμε ως προς έναν τυχαίο άξονα χρησιμοποιώντας το θεώρημα των παράλληλων αξόνων.

Σύμφωνα με το θεώρημα των παράλληλων αξόνων:

$$I = I_{CM} + Md^2$$

- I είναι η ροπή αδράνειας ως προς οποιονδήποτε άξονα παράλληλο προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος.
- I_{CM} είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας.
- d είναι η απόσταση του τυχαίου άξονα από τον άξονα του κέντρου μάζας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Από την τιμή $I=ML^2/3$ της ροπής αδράνειας της βέργας του Παραδείγματος 13.8 ως προς το άκρο της, βρείτε τη ροπή αδράνειάς της ως προς το κέντρο της και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με τον Πίνακα 13.3