Κεφάλαιο 3

Κίνηση σε δύο διαστάσεις (επίπεδο)

Κινηματική σε δύο διαστάσεις

Θα περιγράψουμε τη διανυσματική φύση της θέσης, της ταχύτητας, και της επιτάχυνσης με περισσότερες λεπτομέρειες.

Σαν ειδικές περιπτώσεις, θα μελετήσουμε:

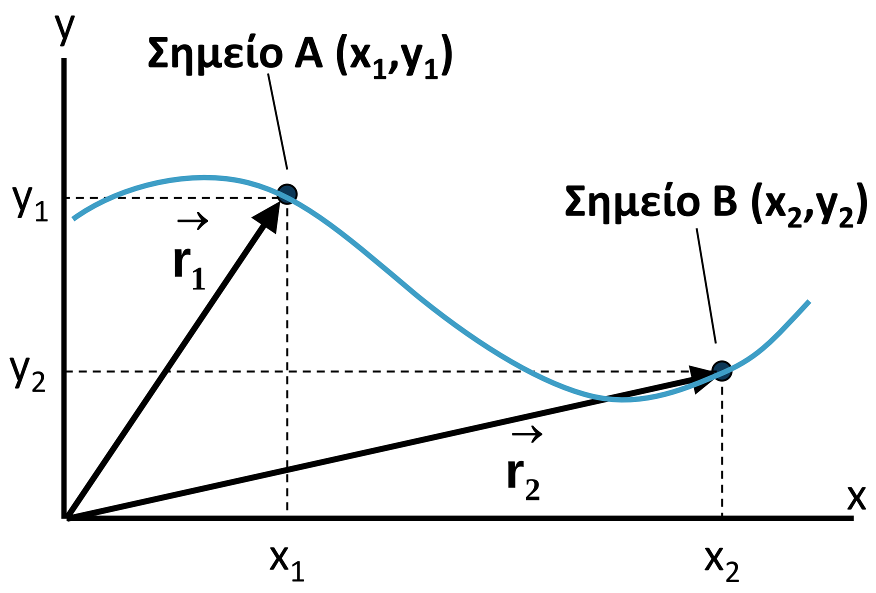
- την κίνηση των βλημάτων και
- την ομαλή κυκλική κίνηση

Θέση και μετατόπιση

Η **θέση** ενός σώματος περιγράφεται με το διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}$.

- Την αρχική χρονική στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στη σημείο A(x_1,y_1)
  με διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}_1 = x_1\,\hat{\mathbf{i}} + y_1\,\hat{\mathbf{j}}$

- Την τελική χρονική στιγμή $\boldsymbol{t_2}$ το σώμα βρίσκεται στη σημείο B(x_2,y_2)
  με διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}_2 = x_2\,\hat{\mathbf{i}} + y_2\,\hat{\mathbf{j}}$



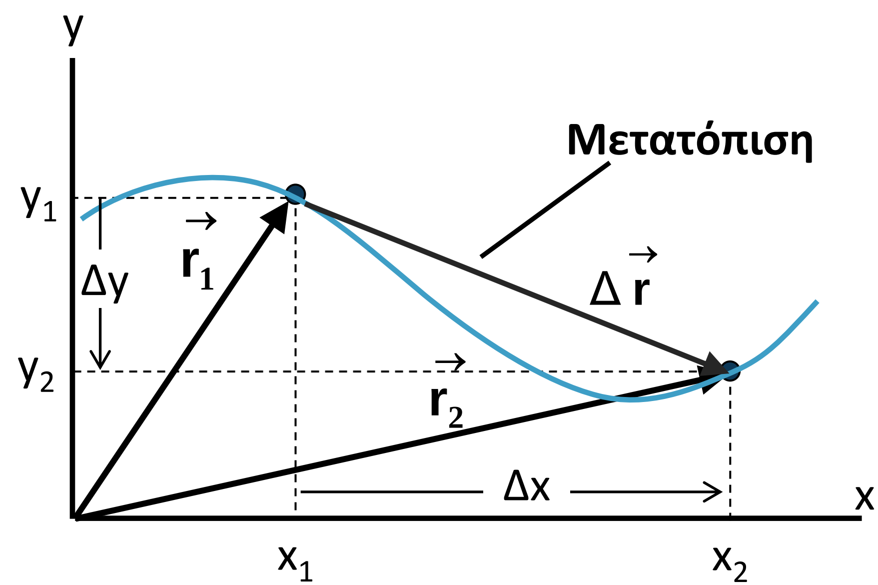
Μετατόπιση

Η **μετατόπιση** του σώματος ορίζεται ως η ***μεταβολή της θέσης του***

$$\Delta \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1$$

ή σε αλγεβρική μορφή

$$\Delta \vec{\mathbf{r}} = \Delta x\, \hat{\mathbf{i}} + \Delta y\, \hat{\mathbf{j}}$$



όπου, $\Delta x = x_2 - x_1$ είναι η οριζόντια μετατόπιση και

$\Delta y = y_2 - y_1$ είναι η κατοκόρυφη μετατόπιση

Μέση ταχύτητα

Η **μέση ταχύτητα** είναι ο λόγος της μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα στο οποίο συμβαίνει η μετατόπιση.

$$\vec{\mathbf{v}}_{avg} = \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t}$$

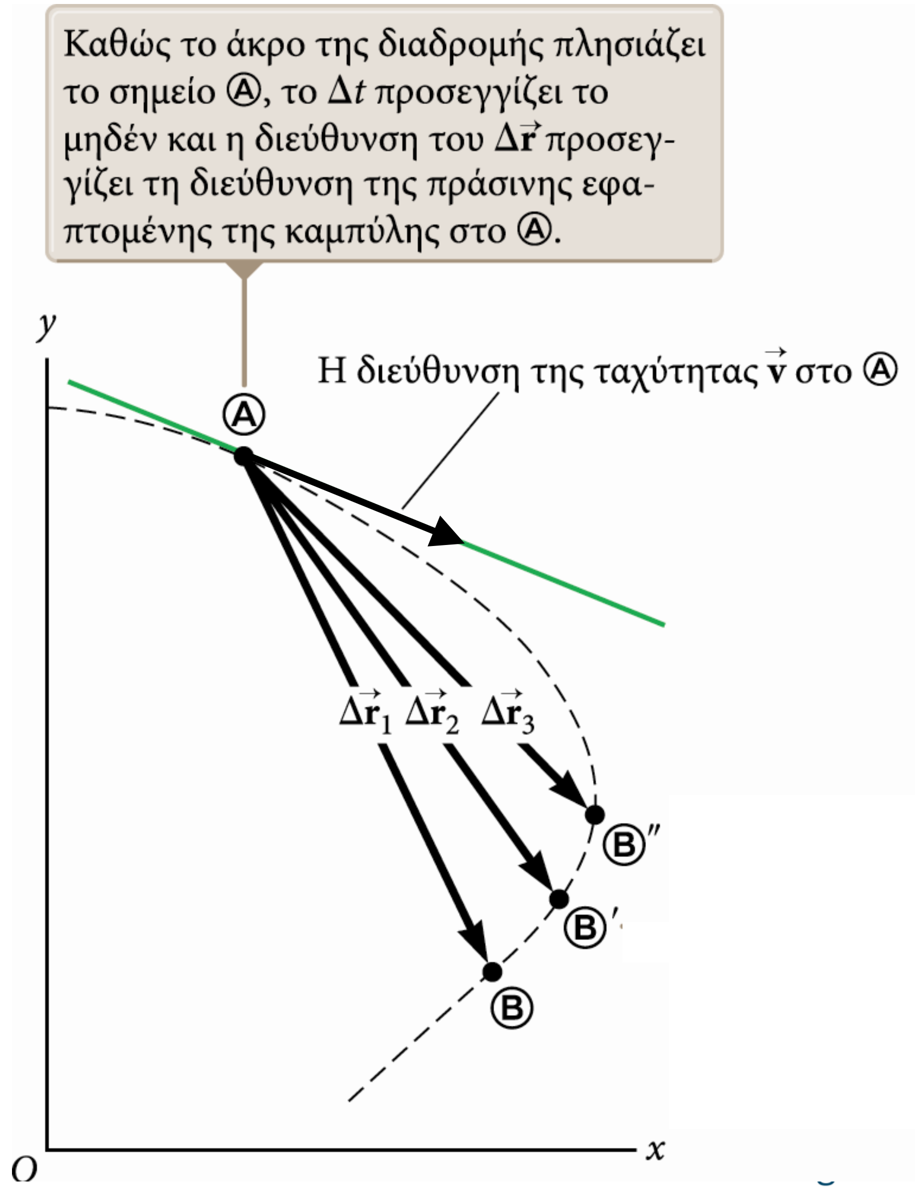
Η κατεύθυνση του διανύσματος της μέσης ταχύτητας είναι η κατεύθυνση του διανύσματος της μετατόπισης $\Delta \vec{\mathbf{r}}$.

Στιγμιαία ταχύτητα

Η **στιγμιαία ταχύτητα** είναι το όριο της μέσης ταχύτητας καθώς το Δt τείνει στο μηδέν.

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$$

- Καθώς το χρονικό διάστημα γίνεται μικρότερο, η κατεύθυνση του διανύσματος της μετατόπισης προσεγγίζει την κατεύθυνση της <u>εφαπτομένης</u> της καμπύλης.



Στιγμιαία ταχύτητα : Ανάλυση σε v_x και v_y

Η **στιγμιαία ταχύτητα** μπορεί να εκφραστεί σε αλγεβρική μορφή με τη βοήθεια των x και y συνιστωσών της

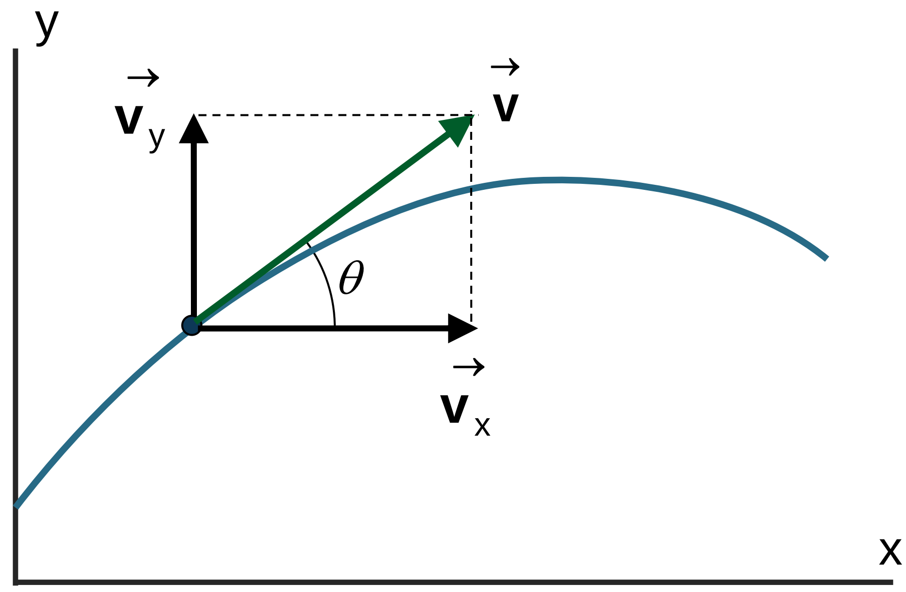
$$\vec{\mathbf{v}} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}}$$

Αν v είναι το μέτρο της ταχύτητας και θ η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x, οι x και y συνιστώσες της ταχύτητας είναι

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v\cos\theta$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v\sin\theta$$

όπου, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ και $tan\,\theta = \frac{v_y}{v_x}$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.1 Περιγραφή της κίνησης με γραφήματα

Η κίνηση ενός σωματιδίου περιγράφεται από τις δύο εξισώσεις $x = 2t^2$ **(m)** και **$y = (5t + 5)$ (m)**, όπου ο χρόνος t μετριέται σε s.

α. Να σχεδιάσετε ένα **γράφημα της τροχιάς** του σωματιδίου

β. Να σχεδιάσετε ένα **γράφημα της ταχύτητας** του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.

ΛΥΣΗ

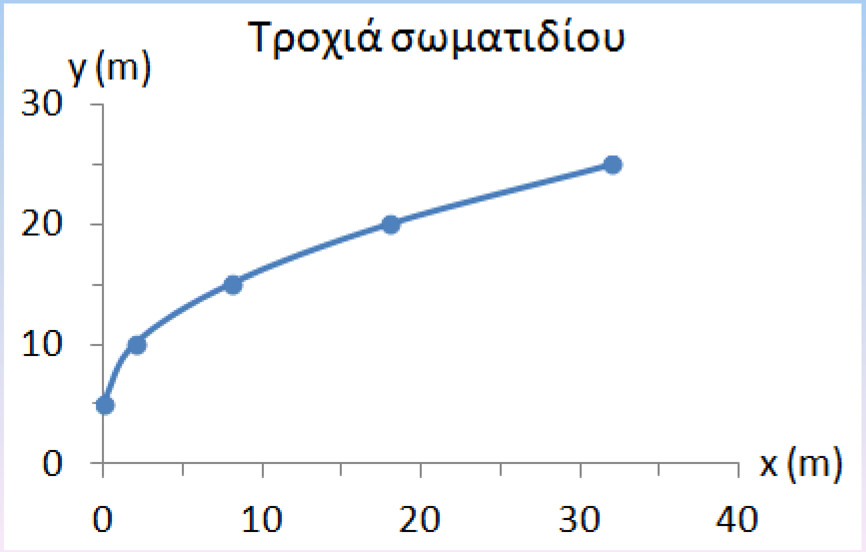
α. Η τροχιά είναι μια καμπύλη στο επίπεδο xy.

Υπολογίζουμε τις τιμές των συντεταγμένων x και y σε διάφορες χρονικές στιγμές

[π.χ.: για t = 3 s έχουμε $x = 2(3)^2$ m = 18 m και $y = (5 \cdot 3 + 5)$ m = 20 m]

και φτιάχνουμε τον πίνακα

t (s)	x (m)	y (m)
0	0	5
1	2	10
2	8	15
3	18	20
4	32	25



ΛΥΣΗ *(συνέχεια)*

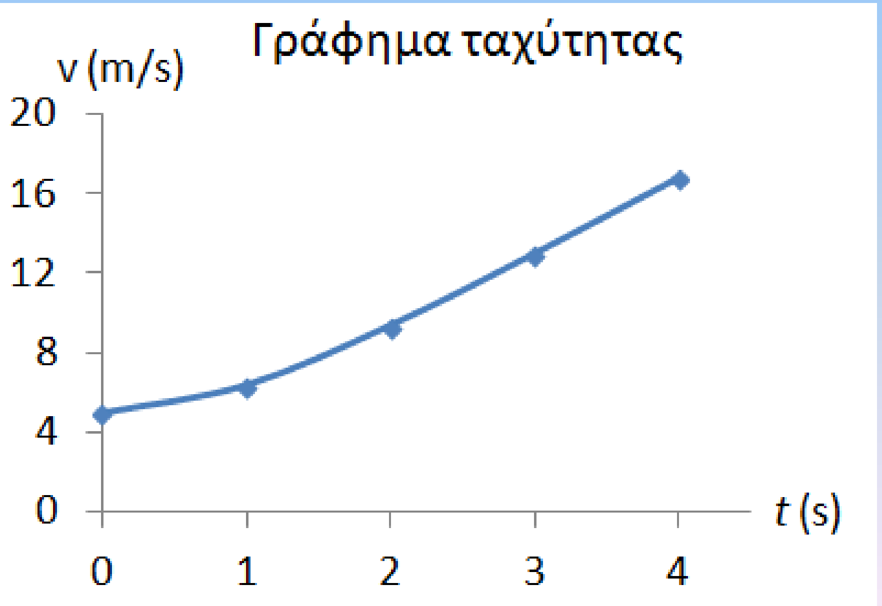
β. Το μέτρο της ταχύτητας δίνεται από την εξίσωση $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

όπου $v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(2t^2\right) = 4t$ m/s *(βλ. Παράρτημα Α, σελ. 619)*

και $v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(5t+5\right) = \dfrac{d}{dt}\left(5t\right) + \dfrac{d}{dt}\left(5\right) = 5$ m/s

Επομένως: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(4t)^2 + (5)^2}$ m/s $= \sqrt{16t^2 + 25}$ m/s

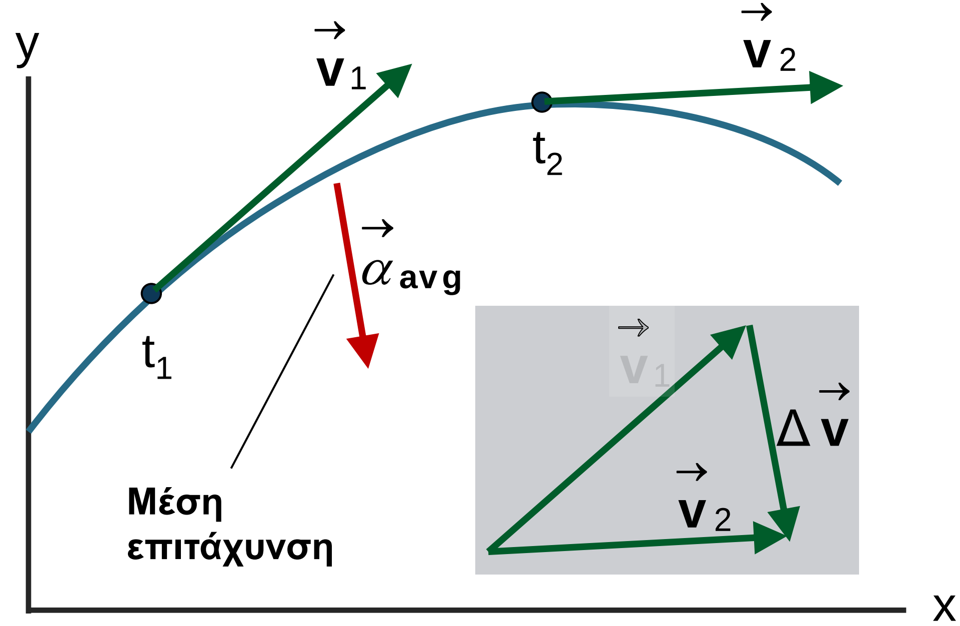
t (s)	v (m/s)
0	5.0
1	6.4
2	9.4
3	13.0
4	16.8



Μέση επιτάχυνση

Η **μέση επιτάχυνση** ενός σωματιδίου ορίζεται ως η μεταβολή του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας προς το χρονικό διάστημα στο οποίο συμβαίνει η μεταβολή αυτή.

$$\vec{\alpha}_{\mathbf{avg}} \equiv \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1}{(t_2 - t_1)}$$



Στιγμιαία επιτάχυνση

Η **στιγμιαία επιτάχυνση** είναι το όριο του λόγου της μέσης επιτάχυνσης καθώς το Δt τείνει στο μηδέν.

$$\vec{\alpha} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$

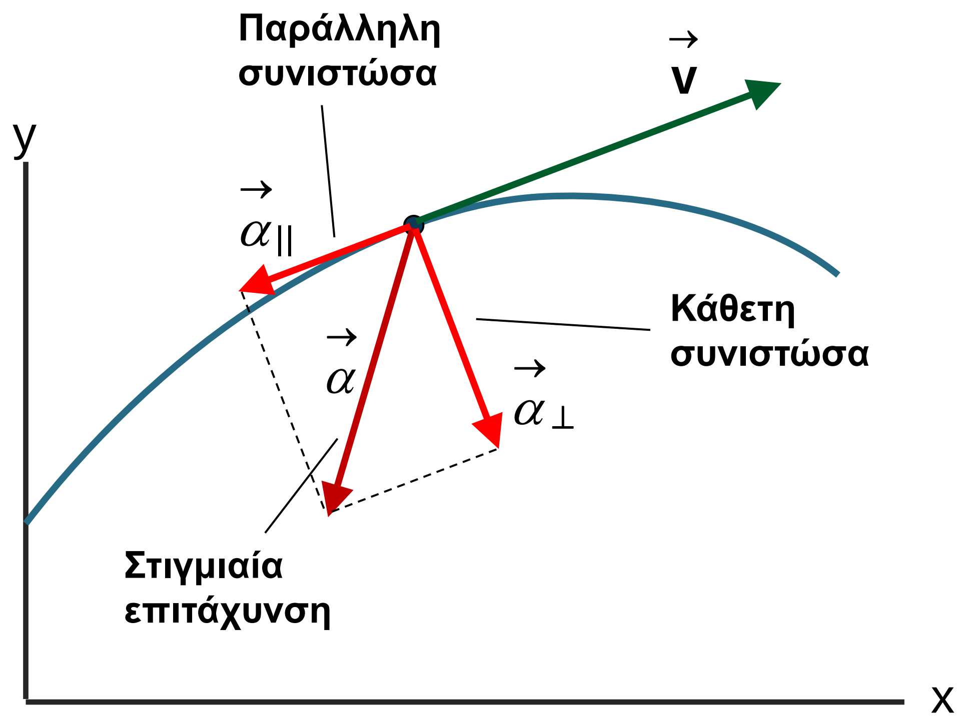
- Η στιγμιαία επιτάχυνση ισούται με την παράγωγο του διανύσματος της ταχύτητας ως προς τον χρόνο.
- Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ της επιτάχυνσης είναι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$ ενός κινητού σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Στιγμιαία επιτάχυνση: Ανάλυση σε $\alpha_{||}$ και $\alpha_{\perp}$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης μπορεί να αναλυθεί σε εφαπτομενική (παράλληλη) και κάθετη συνιστώσα, $\vec{\alpha}_{||}$ και $\vec{\alpha}_{\perp}$

- Η **παράλληλη** συνιστώσα $\vec{\alpha}_{||}$ σχετίζεται με τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας
- Η **κάθετη** συνιστώσα $\vec{\alpha}_{\perp}$ σχετίζεται με τη μεταβολή της διεύθυνσης της ταχύτητας.

$$\alpha = \sqrt{\alpha_{||}^2 + \alpha_{\perp}^2}$$



- Οι συνιστώσες $\vec{\alpha}_{||}$ και $\vec{\alpha}_{\perp}$ μεταφέρουν χρήσιμες πληροφορίες αλλά <u>η χρήση τους είναι δύσκολη διότι οι διευθύνσεις του αλλάζουν συνεχώς.</u>

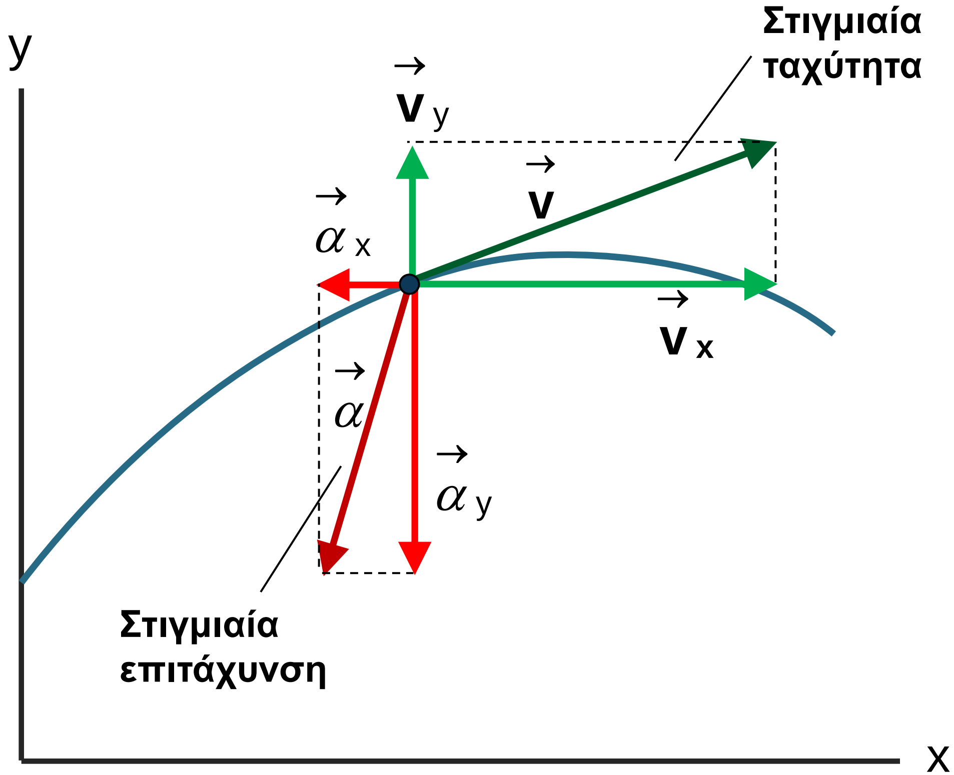
Στιγμιαία επιτάχυνση: Ανάλυση σε α_x και α_y

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες $\vec{\alpha}_{\mathbf{x}}$ και $\vec{\alpha}_y$ παράλληλες προς τους άξονες x και y.

- Επειδή $\vec{\mathbf{v}} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}}$ βρίσκουμε

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} = \alpha_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{i}} + \alpha_y \hat{\mathbf{j}}$$

όπου $\alpha_{\mathbf{x}} = \dfrac{dv_x}{dt}$ και $\alpha_y = \dfrac{dv_y}{dt}$



Εξισώσεις της κινηματικής σε δύο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση

Όταν η επιτάχυνση είναι **σταθερή** στην κίνηση σε δύο διαστάσεις, μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση με μια σειρά εξισώσεων.

Οι εξισώσεις αυτές είναι παρόμοιες με τις εξισώσεις της κινηματικής σε μία διάσταση.

Η κίνηση σε δύο διαστάσεις μπορεί να αναλυθεί σε δύο *ανεξάρτητες* κινήσεις σε καθεμία από τις δύο κάθετες διευθύνσεις που συνδέονται με τους άξονες x και y.

- Οποιαδήποτε επίδραση στη διεύθυνση του άξονα y δεν επηρεάζει την κίνηση στη διεύθυνση του άξονα x.

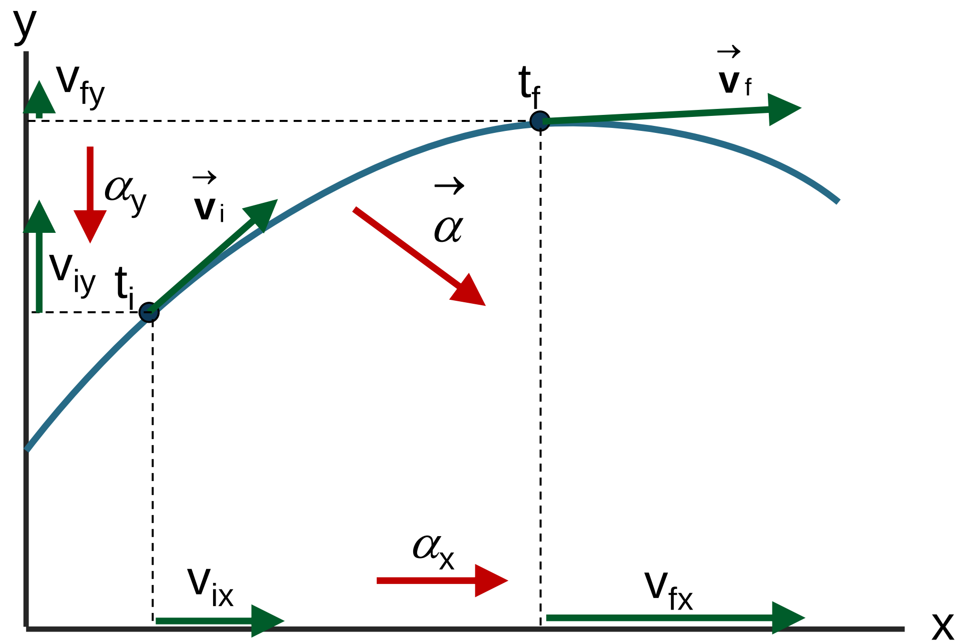
Εξισώσεις της κινηματικής σε δύο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση (2)

Όταν η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ είναι σταθερή, η σχέση της ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου είναι

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}} + \vec{\alpha}\, t$$

και μπορεί να αναλυθεί σε δύο ανεξάρτητες κινήσεις κατά τους άξονες x και y

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}} + \vec{\alpha}\, t \quad \begin{cases} v_{fx} = v_{ix} + \alpha_x t \\ v_{fy} = v_{iy} + \alpha_y t \end{cases}$$



CENGAGE Learning

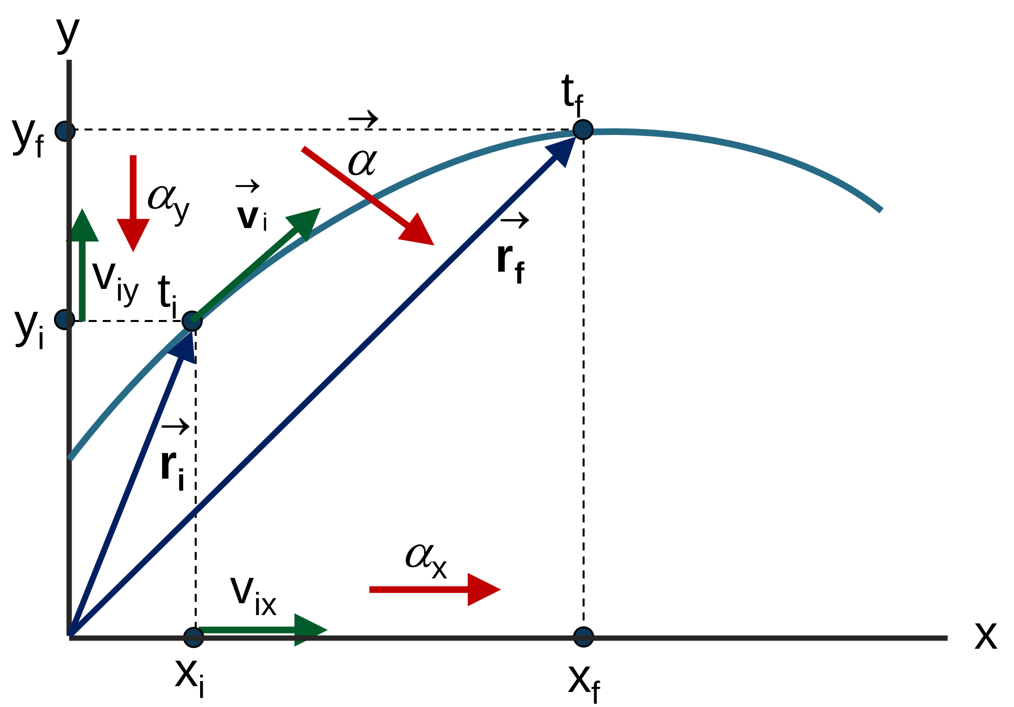
Εξισώσεις της κινηματικής σε δύο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση (3)

Το διάνυσμα θέσης μπορεί επίσης να εκφραστεί ως συνάρτηση του χρόνου:

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i \Delta t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}(\Delta t)^2$$

και μπορεί να αναλυθεί σε δύο ανεξάρτητες συνιστώσες κατά τους άξονες x και y

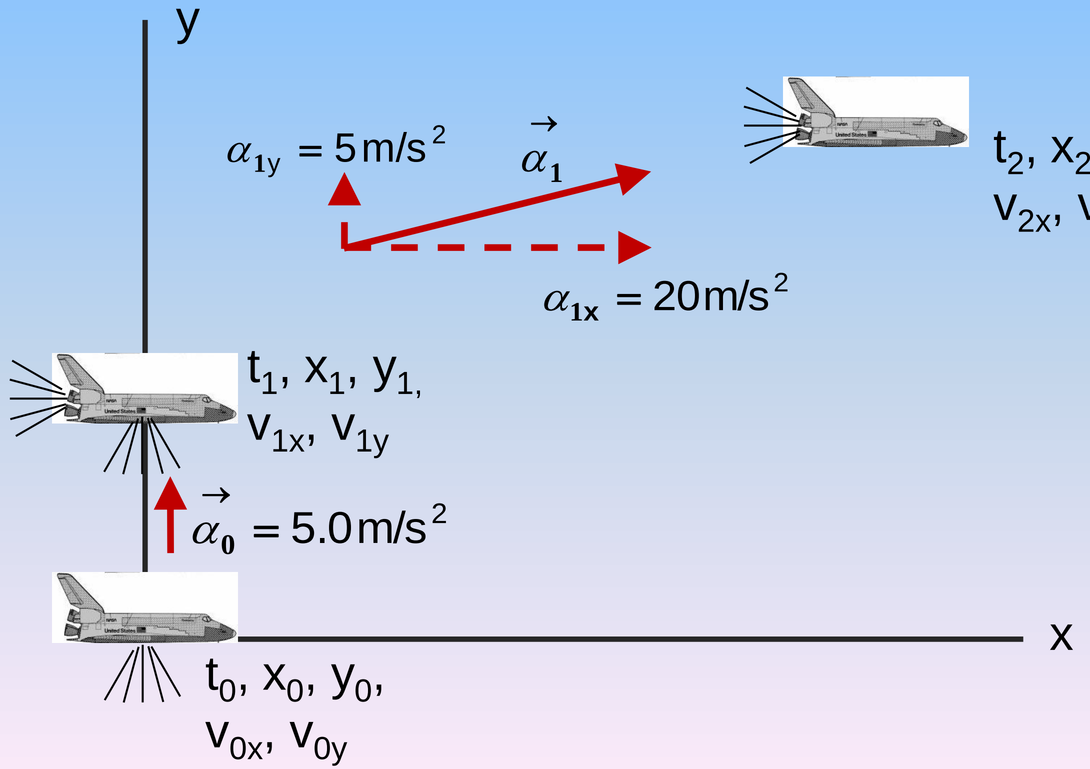
$$\begin{cases} x_f = x_i + v_{ix}\Delta t + \frac{1}{2}\alpha_x(\Delta t)^2 \\ y_f = y_i + v_{iy}\Delta t + \frac{1}{2}\alpha_y(\Delta t)^2 \end{cases}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.2 Σχεδιασμός της τροχιάς μιας διαστημικής ακάτου

Οι κατακόρυφοι προωθητήρες της διαστημικής ακάτου του διαστημοπλοίου Enterprise, της δίνουν επιτάχυνση **5.0 m/s²** προς τα πάνω. Οι οριζόντιοι προωθητήρες δίνουν επιτάχυνση **20 m/s²** προς τα εμπρός. Καθώς ξεκινά την κίνησή του το Enterprise, η άκατος ανάβει μόνο τους κατακόρυφους προωθητήρες. Σε χρόνο **t_1 = 3 s** μετά την εκτόξευση, η άκατος θέτει σε λειτουργία και τους οριζόντιους προωθητήρες. Να σχεδιάσετε την τροχιά της ακάτου για τα πρώτα **6 s** της πτήσης της.

ΛΥΣΗ



Δεδομένα

$t_0, x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y} = 0$
$\alpha_{0x} = 0$, $\alpha_{0y} = 5.0\ \mathrm{m/s^2}$

$t_1 = 3.0$ s, $\alpha_{1x} = 20\ \mathrm{m/s^2}$, $\alpha_{1y} = 5.0\ \mathrm{m/s^2}$

$t_2 = 6.0$ s

Ζητούνται

x και y κάθε χρονική στιγμή t

ΛΥΣΗ *(συνέχεια)*

Δεδομένα

t_0, x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y} = 0

α_{0x} = 0, α_{0y} = 5.0 m/s^2

t_1=3.0 s, α_{1x} = 20 m/s^2, α_{1y} = 5.0 m/s^2

t_2=6.0 s

Ζητούνται

x και y κάθε χρονική στιγμή t

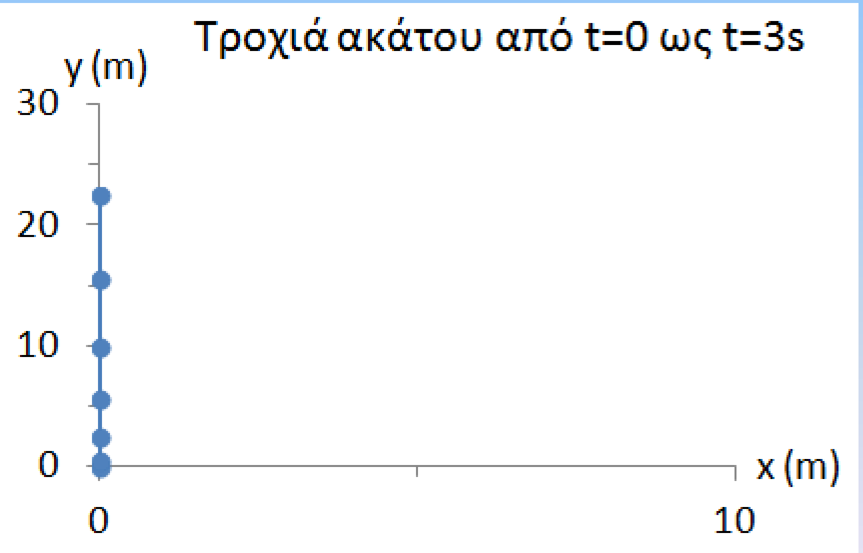
Κατά τη διάρκεια της πρώτης φάσης της κίνησης, από t_0 = 0 ώς t_1 = 3.0 s, έχουμε:

στον x-άξονα: $x = x_0 = 0$

στον y-άξονα: $y = y_0 + v_{0y}\Delta t + \frac{1}{2}\alpha_{0y}(\Delta t)^2 \Rightarrow$

$$y = 0 + 0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha_{0y}(t - t_0)^2 \Rightarrow$$

$$y = 2.5\,t^2 \text{ (m)}$$



Τη χρονική στιγμή t_1 = 3.0 s η άκατος έχει φτάσε σε ύψος **y_1 = 22,5 m** και έχει πιάσει ταχύτητα $v_{1y} = v_{0y} + \alpha_{0y}(\Delta t) = 0 + 5.0(3.0\text{-}0) \Rightarrow$ **v_{1y} = 15 m/s**

ΛΥΣΗ (*συνέχεια*)

Δεδομένα

$t_0, x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y} = 0$

$\alpha_{0x} = 0,\ \alpha_{0y} = 5.0\ m/s^2$

$t_1 = 3.0$ s, **$y_1 = 22,5$ m , $v_{1y} = 15$ m/s**

$\alpha_{1x} = 20\ m/s^2,\ \alpha_{1y} = 5.0\ m/s^2$

$t_2 = 6.0$ s

Κατά τη διάρκεια των επόμενων 3 s, δηλαδή, από $t_1 = 3.0$ s ώς $t_2 = 6.0$ s, έχουμε:

στον x-άξονα:

$$x = x_1 + v_{1x}\Delta t + \frac{1}{2}\alpha_{1x}(\Delta t)^2 \Rightarrow$$

$$x = 0 + 0(t - t_1) + \frac{1}{2}\alpha_{1x}(t - t_1)^2 \Rightarrow$$

$$x = 10(t - 3.0)^2 \text{ (m)}$$

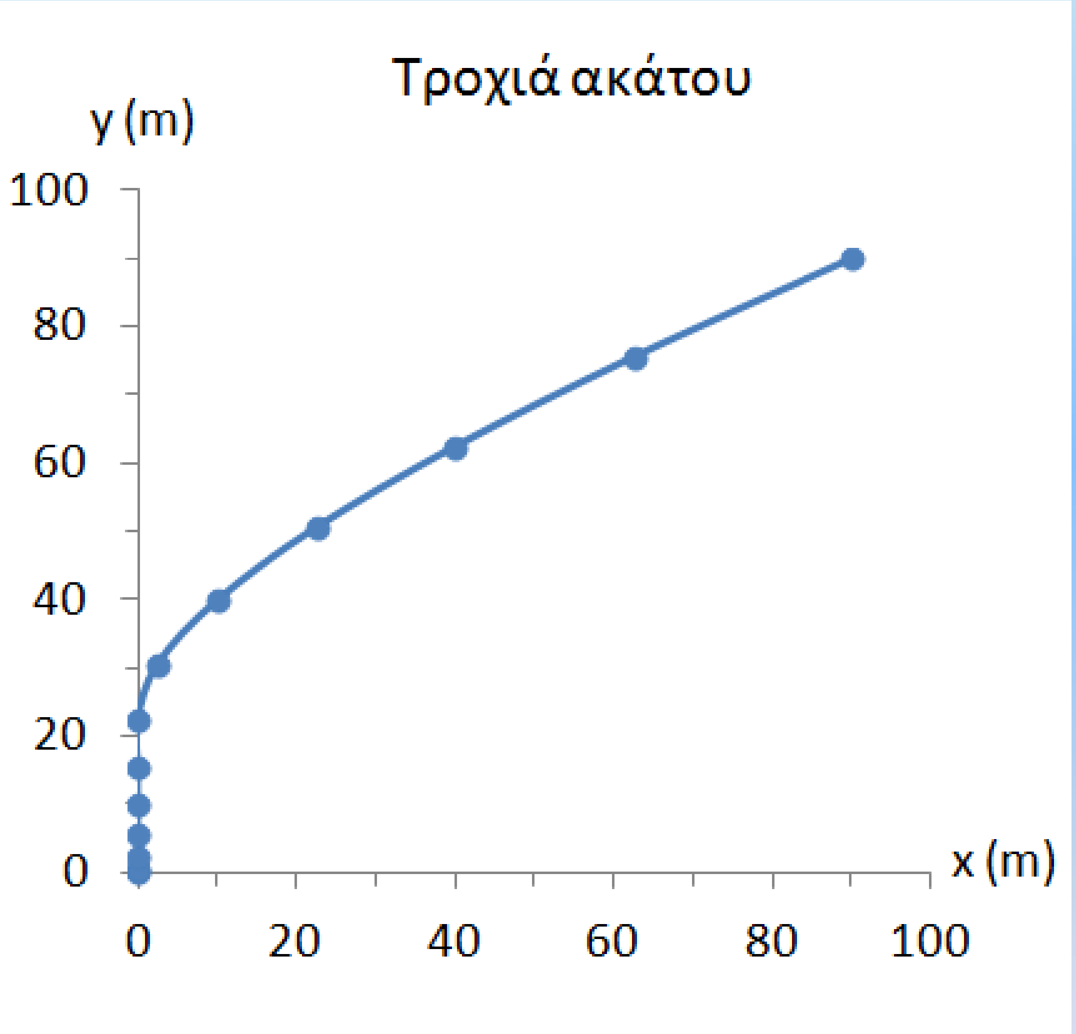
στον y-άξονα:

$$y = y_1 + v_{1y}\Delta t + \frac{1}{2}\alpha_{1y}(\Delta t)^2 \Rightarrow$$

$$y = y_1 + v_{1y}(t - t_1) + \frac{1}{2}\alpha_{1y}(t - t_1)^2 \Rightarrow$$

$$y = 22.5 + 15(t - 3.0) + 2.5(t - 3.0)^2 \text{ (m)}$$

ΛΥΣΗ (*συνέχεια*)



Ερώτηση: ποιά είναι η ταχύτητα της ακάτου τη χρονική στιγμή $t_2 = 6.0$ s ;

Κίνηση βλημάτων

Το είδος της κίνησης σε δύο διαστάσεις, που θα περιγράψουμε στη συνέχεια, ονομάζεται **κίνηση βλημάτων.**

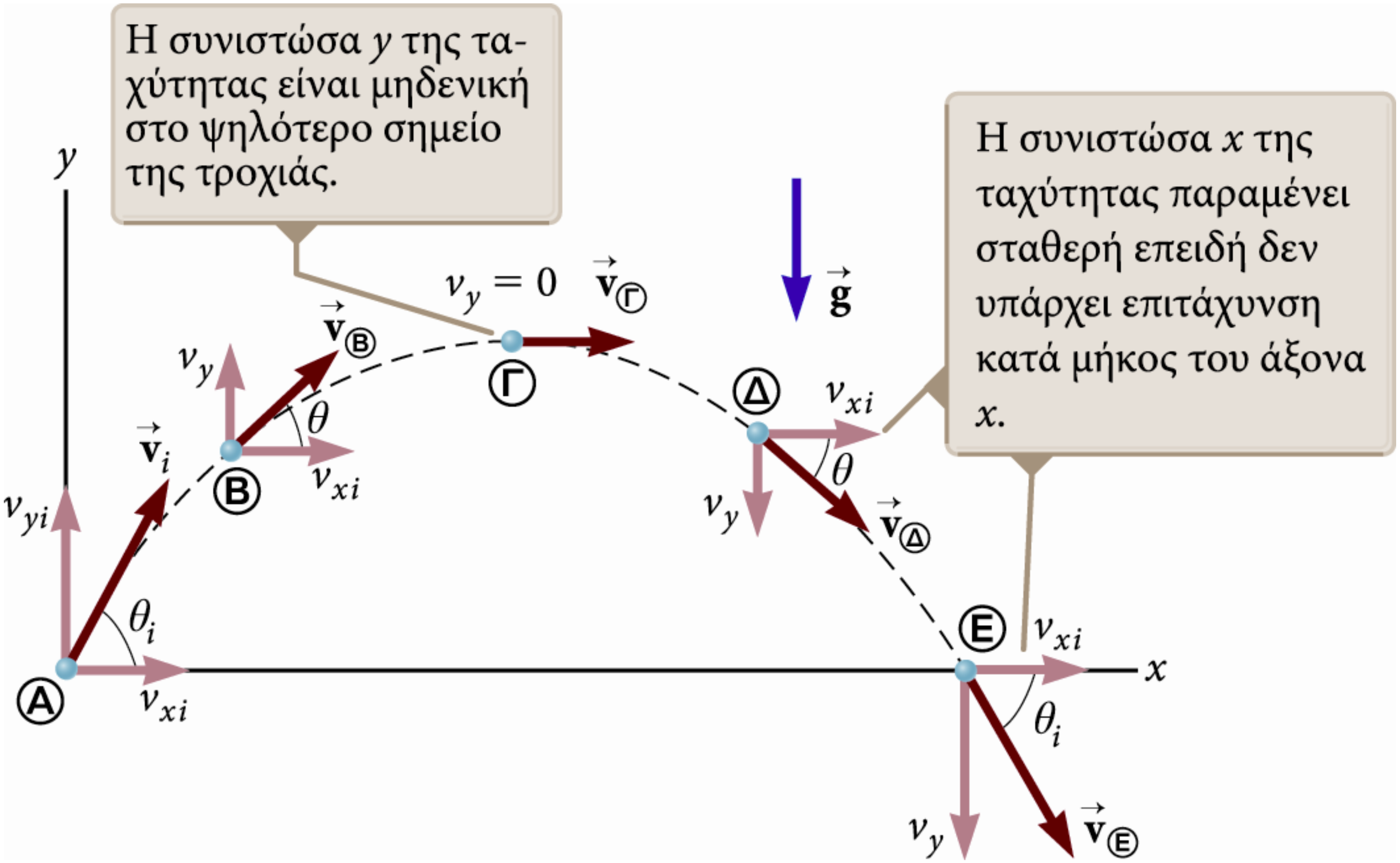
Υποθέσεις στην κίνηση βλημάτων

1. Η κατακόρυφη επιτάχυνση είναι σταθερή (g = 9.80 m/s^2) κατά τη διάρκεια της κίνησης.
   - Κάτι τέτοιο ισοδυναμεί με το να υποθέσουμε ότι η Γη είναι επίπεδη .
   - Η υπόθεση είναι λογική υπό την προϋπόθεση ότι η έκταση της κίνησης είναι μικρή σε σύγκριση με την ακτίνα της Γης.
2. Η επίδραση της αντίστασης του αέρα είναι αμελητέα.

Με βάση αυτές τις υποθέσεις, η διαδρομή ενός βλήματος θα είναι παραβολή.

- Η διαδρομή ονομάζεται ***τροχιά.***

Διάγραμμα κίνησης ενός βλήματος



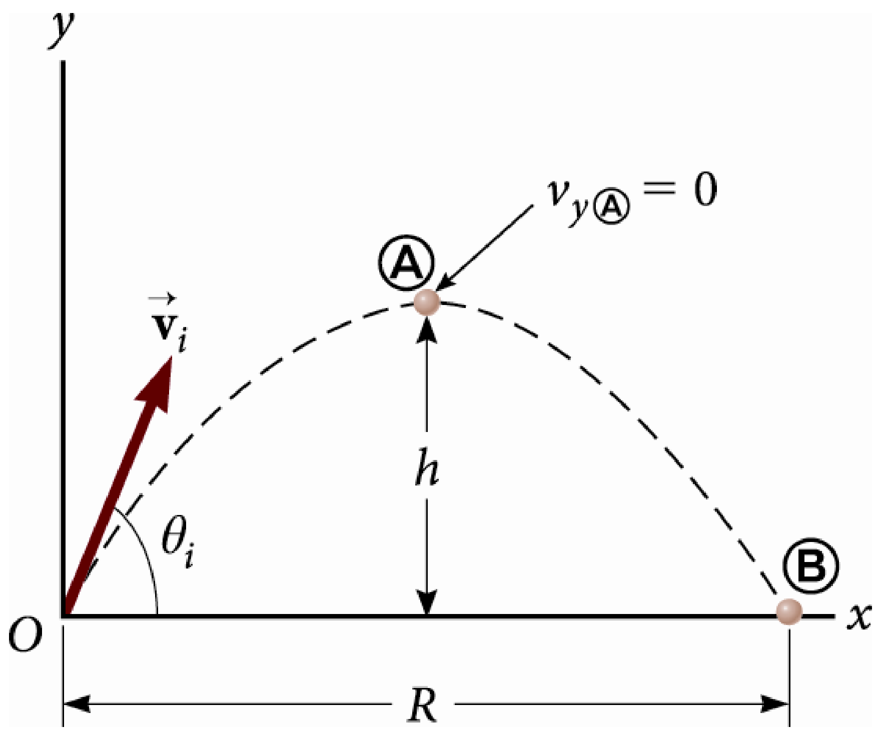
Βεληνεκές και μέγιστο ύψος βλήματος

Όταν αναλύουμε την κίνηση βλημάτων, δύο χαρακτηριστικά παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον:

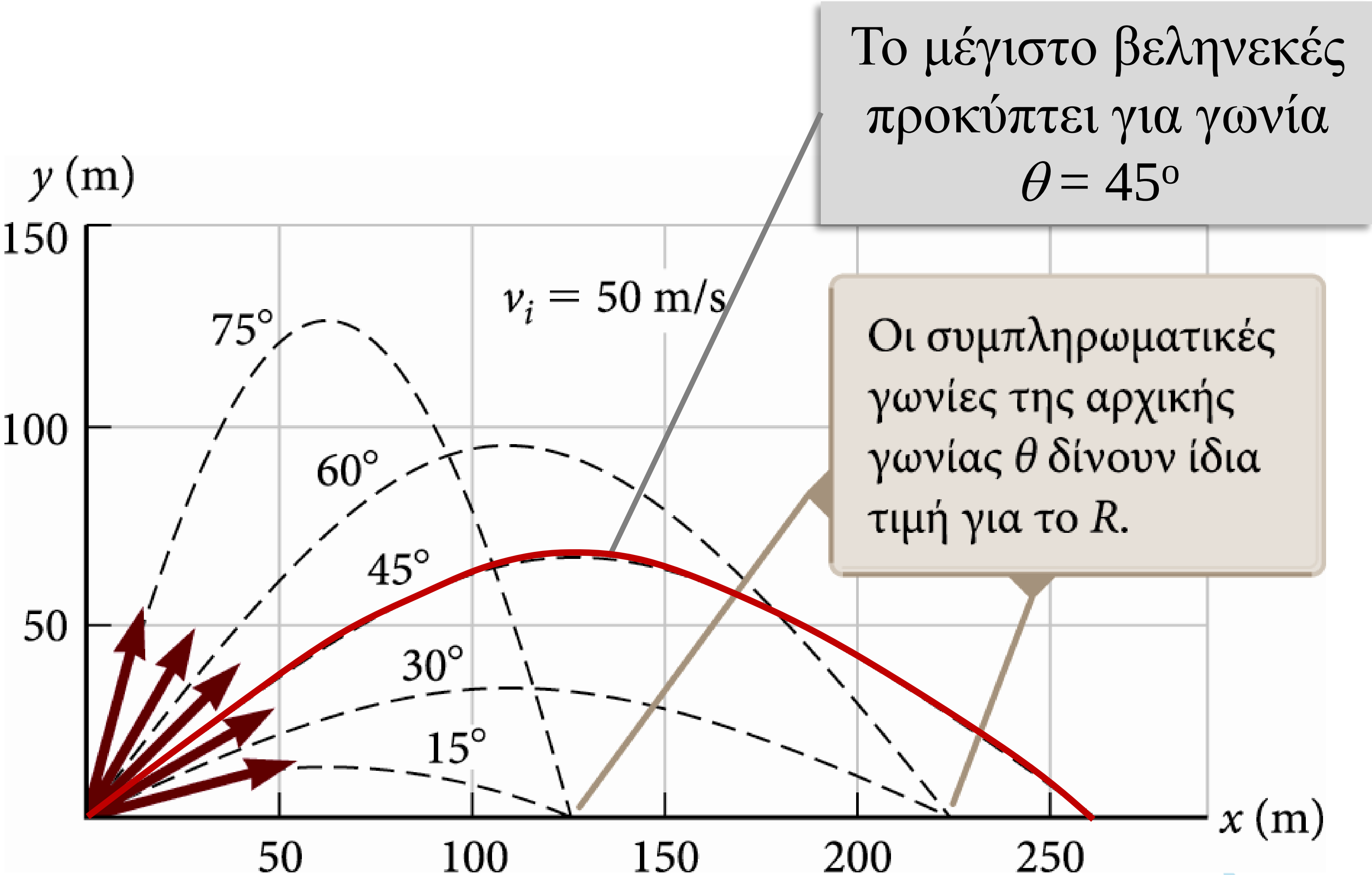
Το **βεληνεκές** $\boldsymbol{R}$ που είναι η οριζόντια απόσταση την οποία καλύπτει η τροχιά του βλήματος.

Το **μέγιστο ύψος** $\boldsymbol{h}$ στο οποίο φτάνει το βλήμα

- στο ψηλότερο σημείο, η κατακόρυφη ταχύτητα v_y είναι μηδενική).

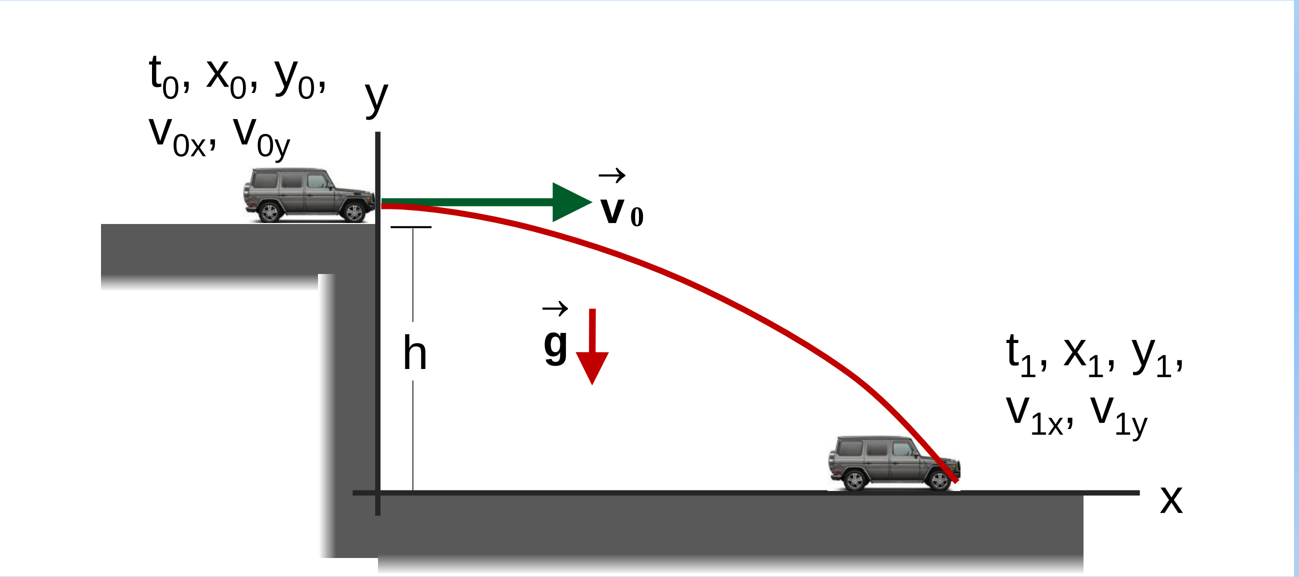


Βεληνεκές ενός βλήματος *(συνέχεια)*



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.4 Μην το δοκιμάσετε αυτό

Ένας κασκαντέρ ρίχνει ένα αυτοκίνητο από ένα γκρεμό ύψους **h = 10 m** με ταχύτητα **v = 20 m/s** (72 km/h). Πόσο μακριά από τη βάση του γκρεμού προσγειώνεται το αυτοκίνητο;



ΛΥΣΗ

Δεδομένα

$t_0 = x_0 = v_{0y} = 0$

$y_0 = h = 10$ m, $v_{0x} = v_0 = 20$ m/s

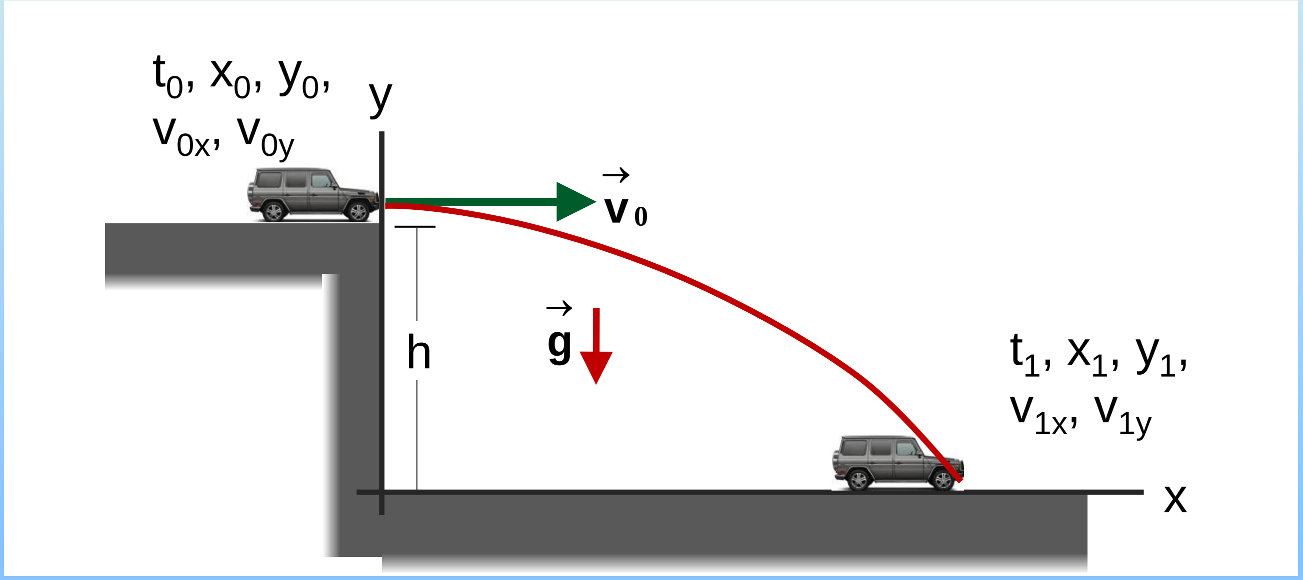
$\alpha_x = 0$, $\alpha_y = -g$

$y_1 = 0$ m

Ζητούνται

x_1

ΛΥΣΗ (*συνέχεια*)



Στον άξονα x έχουμε: $x_1 = x_0 + v_{0x}(\Delta t) = x_0 + v_{0x}(t_1 - t_0) = 0 + v_0(t_1 - 0) \Rightarrow \mathbf{x_1 = v_0 t_1}$

Στον άξονα y: $y_1 = y_0 + v_{0y}(\Delta t) + \frac{1}{2}\alpha_y(\Delta t)^2 \Rightarrow 0 = h + 0(t_1 - t_0) - \frac{1}{2}g(t_1 - t_0)^2$

$$\Rightarrow 0 = h - \frac{1}{2}g t_1^{\,2}$$

$$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(10\,\text{m})}{9.80\,\text{m/s}^2}} = 1.43\,\text{s}$$

Και αντικαθιστώνταςστη σχέση $x_1 = v_0 t_1$ βρίσκουμε:

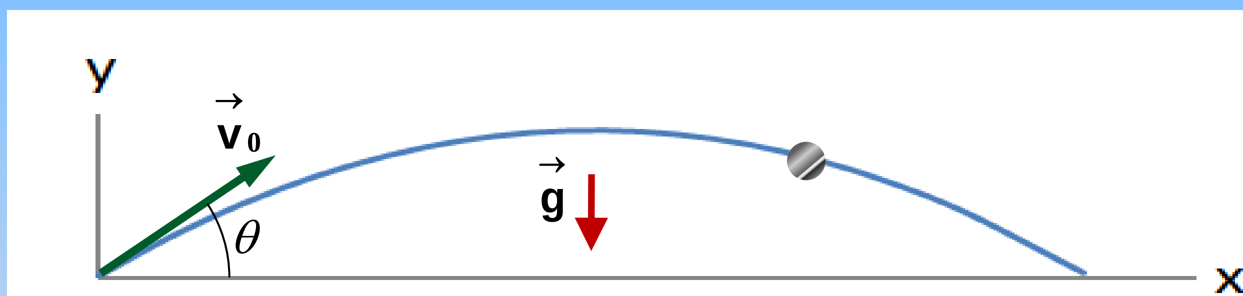
$$x_1 = (20\ \text{m/s})(1.43\ \text{s}) = \mathbf{28.6\ m}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.5 Το διάστημα που διανύει μια μπαλιά

Μια μπάλα του ποδοσφαίρου ρίχνεται υπό γωνία θ, κάνει την παραβολική τροχιά της και πέφτει στο έδαφος.

(α) Αν η μπάλα ρίχνεται υπό γωνία $\theta = 30^\circ$, με ποιά ταχύτητα πρέπει να φύγει από το πόδι του ποδοσφαιριστή για να φτάσει σε απόσταση x_1 = 100 m;

(β) Με ποιά γωνία (θ_{max}) πρέπει να ριχτεί η μπάλα ώστε να φτάσει στη μέγιστη απόσταση (x_{max});



t_0, x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y}

t_1, x_1, y_1, v_{1x}, v_{1y}

ΛΥΣΗ

(α)

Δεδομένα

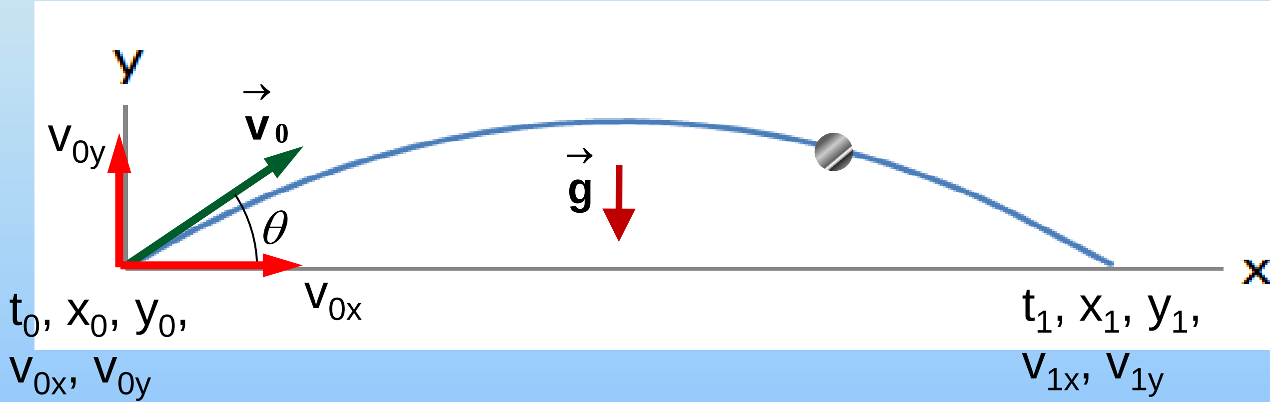
$x_0 = y_0 = 0$ $\theta = 30^\circ$ $t_0 = 0$

$x_1 = 100$ m $y_1 = 0$ m

Ζητούνται

v_0

ΛΥΣΗ (*συνέχεια*)



Οι x και y συνιστώσες της αρχικής ταχύτητα $\vec{v}_0$ είναι: $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ και $v_{0y} = v_0 \sin\theta$

Στον άξονα x έχουμε: $x_1 = x_0 + v_{0x}(\Delta t) = x_0 + v_{0x}(t_1 - t_0) \Rightarrow$ $\mathbf{x_1 = (v_0 \cos\theta) t_1}$

Στον άξονα y: $y_1 = y_0 + v_{0y}(\Delta t) + \frac{1}{2}\alpha_y(\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_0 + v_{0y}(t_1 - t_0) - \frac{1}{2}g(t_1 - t_0)^2$

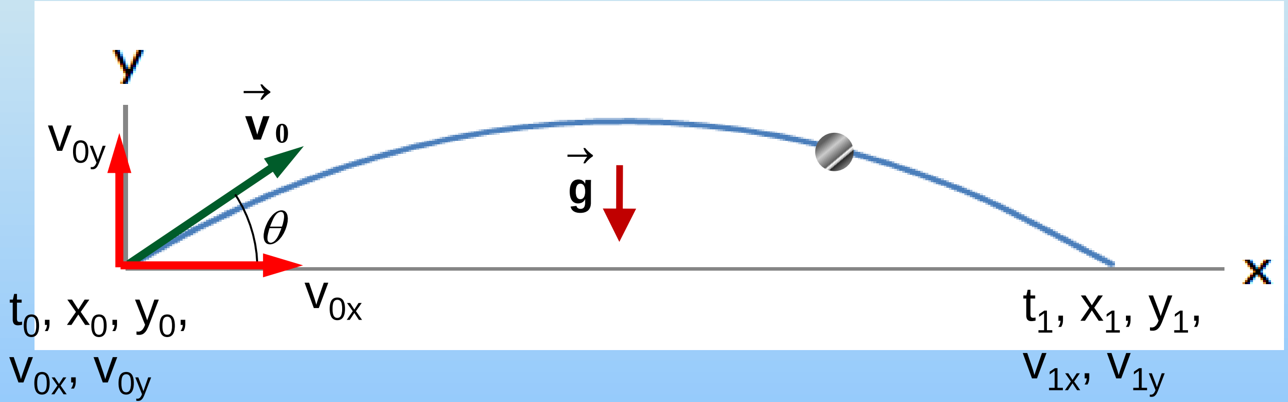
$$0 = 0 + v_0 \sin\theta(t_1 - 0) - \frac{1}{2}g(t_1 - 0)^2$$

$$0 = (v_0 \sin\theta)\, t_1 - \frac{1}{2}g t_1^2$$

$$\frac{1}{2}g t_1^2 = (v_0 \sin\theta)\, t_1$$

$$t_1 = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$

ΛΥΣΗ (*συνέχεια*)



Ο χρόνος $t_1 = \dfrac{2v_0 \sin\theta}{g}$ είναι ο χρόνος “πτήσης” της μπάλας

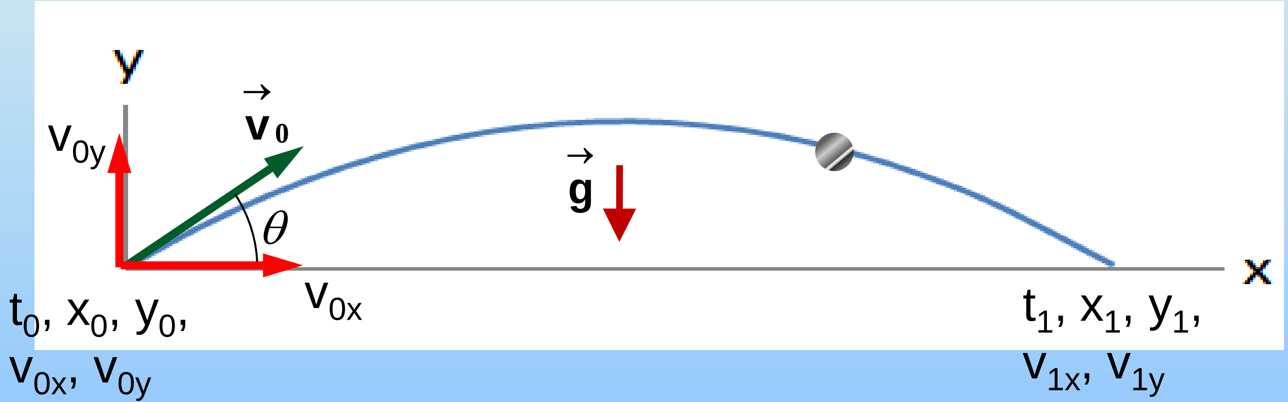
Αντικαθιστώντας το χρόνο t_1 στη σχέση $x_1 = (v_0 \cos\theta)t_1$, βρίσκουμε

$$x_1 = (v_0 \cos\theta)\frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε το αποτέλεσμα αν χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική σχέση $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ (βλ. Παράρτημα Α, σελ 618)

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

ΛΥΣΗ (*συνέχεια*)



Λύνοντας τη σχέση $x_1 = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$ ως προς v_0, έχουμε:

$$g x_1 = v_0^2 \sin 2\theta$$

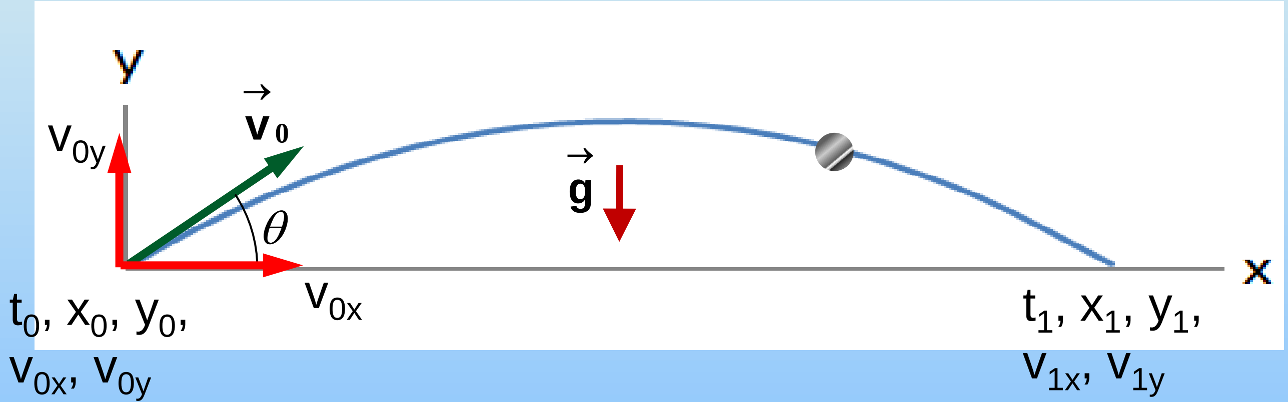
$$\frac{g x_1}{\sin 2\theta} = v_0^2$$

$$\sqrt{\frac{g x_1}{\sin 2\theta}} = v_0$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές, βρίσκουμε:

$$v_0 = \sqrt{\frac{(9.80\,\mathrm{m/s^2})(100\,\mathrm{m})}{\sin 60^\circ}} = 33.6\ \mathrm{m}$$

ΛΥΣΗ (*συνέχεια*)



(β) Για να βρούμε γωνία θ_{max} για την οποία η απόσταση $x_1 = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$ γίνεται μέγιστη, παρατηρούμε ότι το x_1 είναι μέγιστο όταν είναι μέγιστο το $\sin 2\theta$, δηλαδή, όταν $\sin 2\theta = 1$

Όμως, $\sin 2\theta = 1$, όταν $2\theta = 90°$, δηλαδή, $\theta = 45°$

Επομένως, $x_{max} = \dfrac{v_0^2 \sin 90°}{g} = \dfrac{(33.6\,\mathrm{m/s})^2 \cdot 1}{9.80\,\mathrm{m/s^2}} = 115\,\mathrm{m}$

Ομαλή κυκλική κίνηση

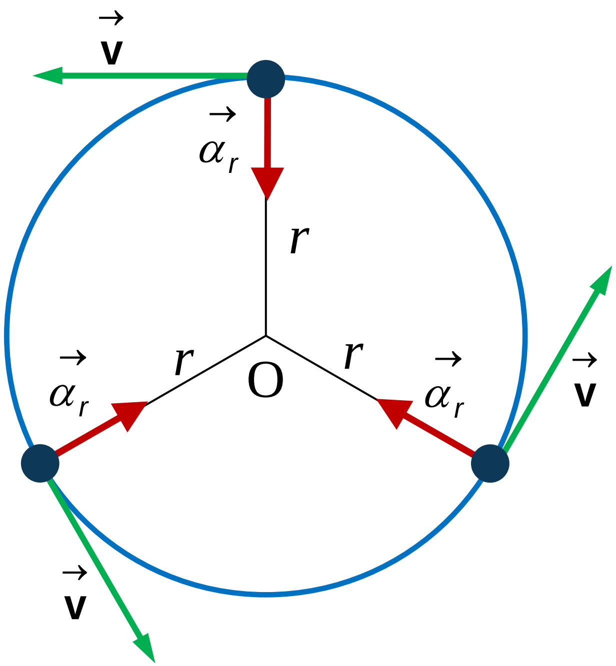
Ένα σώμα το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου, εκτελεί ***ομαλή κυκλική κίνηση***.

Η ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$ είναι (όπως πάντα) εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά.

Το διάνυσμα της ταχύτητας σε όλα τα σημεία της τροχιάς έχει το ίδιο μήκος (σταθερό μέτρο).

Εφόσον, όμως, μεταβάλλεται η *κατεύθυνση* της κίνησης (της ταχύτητας), υπάρχει επιτάχυνση.

Η επιτάχυνση αυτή, $\vec{\alpha}_r$, είναι κάθετη στην ταχύτητα και ονομάζεται ***κεντρομόλος επιτάχυνση***.



Κεντρομόλος επιτάχυνση

Το μέτρο του διανύσματος της κεντρομόλου επιτάχυνσης δίνεται από τη σχέση

$$\alpha_r = \frac{v^2}{r}$$

Περίοδος

Η ***περίοδος*** *T* είναι το χρονικό διάστημα που απαιτείται για μία πλήρη περιστροφή.

- Η περίοδος μετριέται σε s.

Το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση είναι ίσο με το πηλίκο της περιφέρειας της κυκλικής τροχιάς (είναι 2πr, βλ., Παράρτημα Α, σελ. 617) προς την περίοδο, v = (2πr)/T

Επομένως,

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Συχνότητα

Η **συχνότητα** f είναι ο αριθμός των περιστροφών ανά δευτερόλεπτο

- Η συχνότητα είναι το αντίστροφο της περιόδου

$$f = \frac{1}{T}$$

- Η συχνότητα μετριέται σε μετριέται σε Hertz: 1 Hz = 1/s = s^{-1}.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.1 Μια περιστρεφόμενη άτρακτος

Μια άτρακτος διαμέτρου 4.0 m εκτελεί 2400 στροφές το λεπτό (revolutions per minute ή rpm). Ποιά είναι η ταχύτητα ενός σημείου στην επιφάνειά της;

ΛΥΣΗ

Έχουμε για τη σχέση ταχύτητας - περιόδου $v = \frac{2\pi r}{T}$

και για τη σχέση περιόδου – συχνότητας $T = \frac{1}{f}$

Επομένως, $v = \frac{2\pi r}{\frac{1}{f}} = 2\pi r\, f$

Μετατρέπουμε τη συχνότητα από 2400 rpm σε rps

f = 2400 στροφές/min = (2400 στροφές) / (60 s) = 40 rps

και αντικαθιστώντας, βρίσκουμε:

$V = 2\,(3.14)(4.0\text{m})(40\text{s}^{-1}) = 5.0\text{ m/s}$

Ενότητα 7.2 – Ασκηση 3

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς της γης γύρω από τον ήλιο είναι 1.5×10^{11} km. Να βρείτε (α) το μέτρο της ταχύτητας με την οποία η γη περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο και (β) το μέτρο της κεντομόλου επιτάχυνσής της.

ΛΥΣΗ

(α) Η ταχύτητα είναι $v = \dfrac{2\pi r}{T}$

Η περίοδος περιστροφής της γης γύρω από τον ήλιο είναι 365 μέρες ή

(365 μέρες)·(24 h/μέρα) = 8760 h

Επομένως, $v = \dfrac{2\pi r}{T} = \dfrac{2 \cdot 3.14 \cdot (1.5 \times 10^{11}\,\text{km})}{8760\text{h}} = 108000000\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ ή $1.08 \times 10^{8}\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

(β) Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι $\alpha_r = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{(1.08 \times 10^{8}\ \text{km/h})^2}{1.5 \times 10^{11}\,\text{km}} = 77200\dfrac{\text{km}}{\text{h}^2}$

Ενότητα 7.2 – Ασκηση 5

Για να αντέξουν τις «δυνάμεις g», δηλαδή σε επιταχύνσεις μέχρι και 10g, που οφείλονται στην έξοδο του αεροπλάνου από μια απότομη βουτιά, οι πιλότοι των μαχητικών αεροσκαφών εκπαιδεύονται σε έναν «ανθρώπινο φυγοκεντρηστή». Τα 10g είναι επιτάχυνση $10 \cdot (9.80\ m/s^2) = 98\ m/s^2$. Αν το μήκος του βραχίοντα του φυγοκεντριτή είναι 12 m, με τι ταχύτητα κινείται ο επιβάτης του όταν υφίσταται τα 10g;

ΛΥΣΗ

$$\alpha_r = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_r r = v^2 \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{\alpha_r r} = v$$

$$v = \sqrt{(98\,m/s^2)(12\,m)} = 34.3\,m/s \quad ή \quad 123\,km/h$$

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ