Κεφάλαιο 2

Διανύσματα και Συστήματα Συντεταγμένων

CENGAGE Learning™

Διανύσματα

Διανυσματικά μεγέθη

- Φυσικά μεγέθη που έχουν τόσο αριθμητικές ιδιότητες όσο και ιδιότητες κατεύθυνσης.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με τις μαθηματικές πράξεις των διανυσμάτων.

- Πρόσθεση
- Αφαίρεση

Συστήματα συντεταγμένων

Χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της θέσης ενός σημείου στον χώρο.

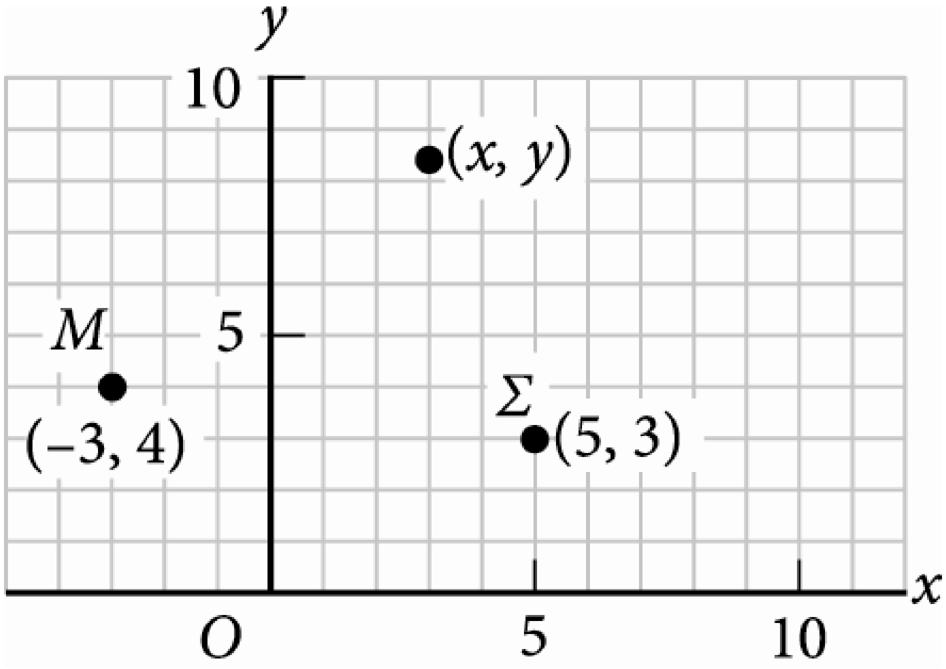
Συνηθισμένα συστήματα συντεταγμένων είναι:

- Καρτεσιανό
- Πολικό

Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Οι άξονες x και y τέμνονται στην αρχή των συντεταγμένων.

Τα σημεία αναπαρίστανται με το ζεύγος (x, y).



Διανυσματικά και βαθμωτά μεγέθη

Ένα ***βαθμωτό μέγεθος*** ορίζεται πλήρως από μία τιμή ακολουθούμενη από την κατάλληλη μονάδα και δεν έχει κατεύθυνση.

- Πολλά βαθμωτά μεγέθη είναι πάντα θετικά (ή μηδέν).
- Άλλα έχουν είτε θετικές είτε αρνητικές τιμές.
- Οι πράξεις με βαθμωτά μεγέθη γίνονται σύμφωνα με τους κανόνες της απλής αριθμητικής.

Ένα ***διανυσματικό μέγεθος*** ορίζεται πλήρως από έναν αριθμό ακολουθούμενο από την κατάλληλη μονάδα **και μία κατεύθυνση**.

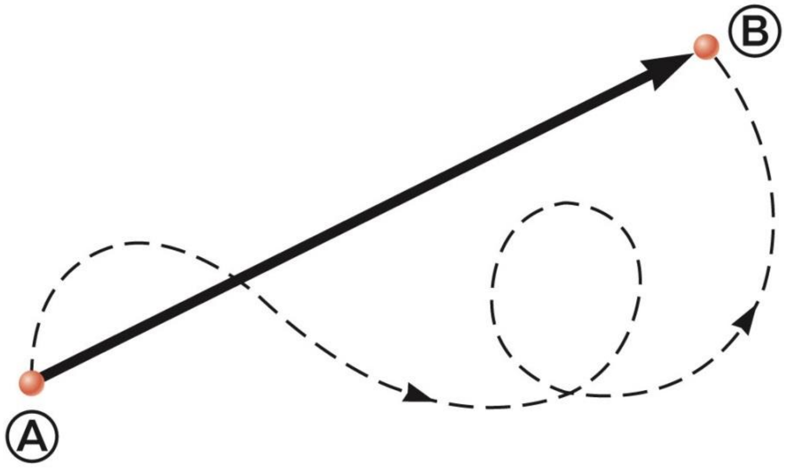
Παράδειγμα διανυσματικού μεγέθους

Ένα σωματίδιο κινείται από το σημείο Α στο σημείο Β ακολουθώντας τη διαδρομή που υποδεικνύει η διακεκομμένη γραμμή.

- Αυτή είναι η ***απόσταση*** που διένυσε και είναι <u>βαθμωτό</u> μέγεθος.

Η ***μετατόπιση*** είναι η συμπαγής ευθεία που ενώνει το Α με το Β.

- Η μετατόπιση είναι ανεξάρτητη από τη διαδρομή που ακολουθεί το σωματίδιο μεταξύ των δύο σημείων.
- Η μετατόπιση είναι <u>διανυσματικό</u> μέγεθος.



Συμβολισμός διανυσμάτων

Συμβολίζουμε κάθε διάνυσμα με ένα έντονο γράμμα μαζί με ένα βέλος πάνω από αυτό: $\vec{\mathbf{A}}$

Επίσης, χρησιμοποιούμε και τον απλό έντονο χαρακτήρα: **A**

Όσον αφορά το μέτρο ενός διανύσματος, θα χρησιμοποιούμε ένα απλό γράμμα, A ή το σύμβολο της απόλυτης τιμής, $|\vec{\mathbf{A}}|$

- Το μέτρο του διανύσματος έχει φυσικές μονάδες.
- Το μέτρο ενός διανύσματος είναι πάντα θετικός αριθμός.

Όταν γράφετε με το χέρι, να χρησιμοποιείτε το βέλος, $\vec{\mathbf{A}}$, για το διάνυσμα

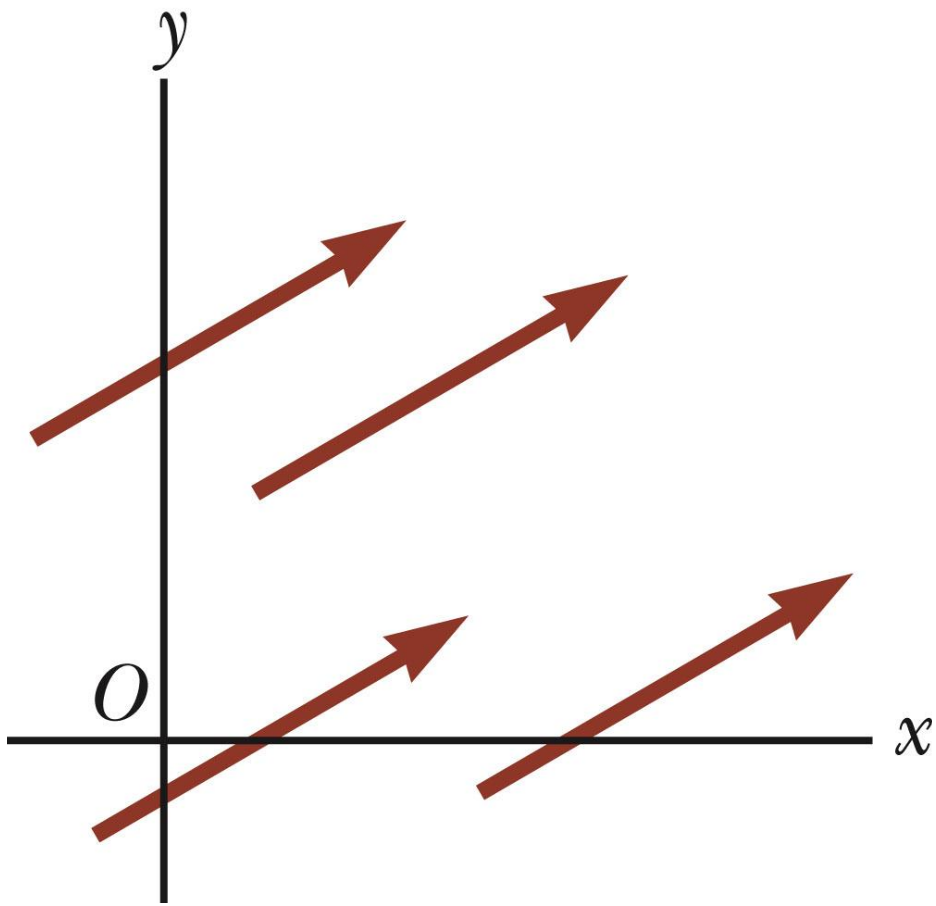
Ισότητα δύο διανυσμάτων

Δύο διανύσματα είναι ***ίσα***, $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$, αν

- έχουν το ίδιο μέτρο (A = B) και
- την ίδια κατεύθυνση.

Όλα τα διανύσματα της εικόνας είναι ίσα.

Αυτό μάς επιτρέπει να μεταθέσουμε παράλληλα ένα διάνυσμα σε μια νέα θέση.



Πρόσθεση διανυσμάτων

Η πρόσθεση διανυσμάτων είναι πολύ διαφορετική από την πρόσθεση βαθμωτών μεγεθών.

Όταν προσθέτουμε διανύσματα, πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη την κατεύθυνσή τους.

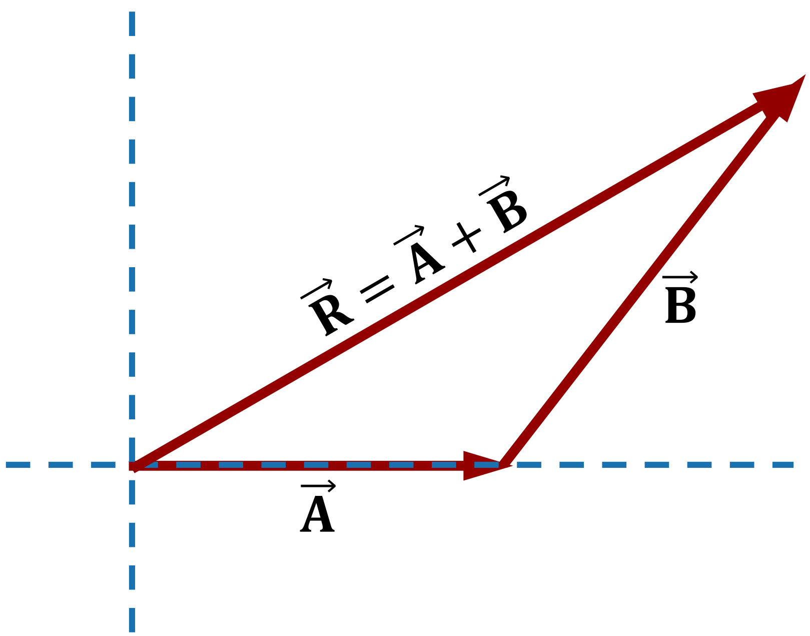
Οι μονάδες τους πρέπει να είναι ίδιες.

Μέθοδοι πρόσθεσης διανυσμάτων

- **Γραφική μέθοδος**: Σχεδιάζουμε τα διανύσματα υπό κλίμακα.
- **Αλγεβρική μέθοδος**: Είναι πιο βολική.

Πρόσθεση διανυσμάτων με τη γραφική μέθοδο

- Επιλέγουμε μια κλίμακα και ένα σύστημα αξόνων.
- Ξεκινώντας από την αρχή του συστήματος των αξόνων, σχεδιάζουμε το πρώτο διάνυσμα, $\vec{\mathbf{A}}$, με το κατάλληλο μήκος και κατεύθυνση.
- Ξεκινώντας από το τέλος του $\vec{\mathbf{A}}$, σχεδιάζουμε το επόμενο διάνυσμα, $\vec{\mathbf{B}}$, με το κατάλληλο μήκος και κατεύθυνση



- Η **συνισταμένη** ή **άθροισμα**, $\vec{\mathbf{R}}$, είναι το διάνυσμα που αρχίζει από την αρχή του πρώτου διανύσματος και τελειώνει στο τέλος του δεύτερου (του τελευταίου).

Πρόσθεση διανυσμάτων με τη γραφική μέθοδο (*συνέχεια*)

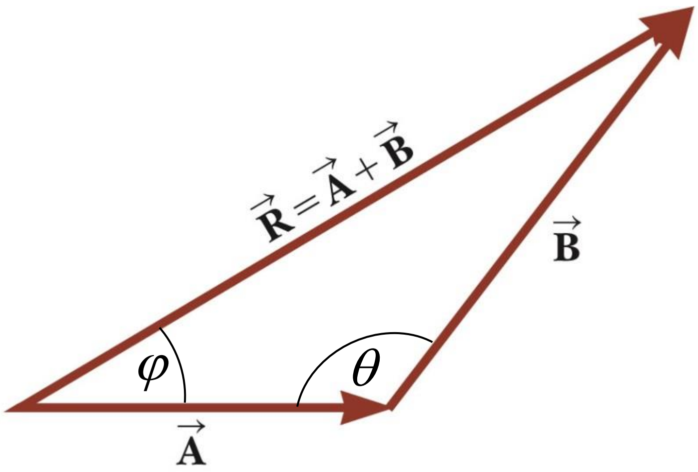
- Το **μέτρο**, R, της συνισταμένης υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το νόμο των συνημιτόνων από την τριγωνομετρία

$$\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2\mathrm{AB}\cos\theta}$$

- Η διεύθυνση της συνισταμένης δίνεται υπολογίζοντας τη γωνία, φ, που σχηματίζε με τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\mathbf{A}}$ χρησιμοποιώντας το νόμο των ημιτόνων

$$\frac{\sin\varphi}{B} = \frac{\sin\theta}{R} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{B}{R}\sin\theta$$

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{B}{R}\sin\theta\right)$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1 Ένα πουλί πετάει 100 m ανατολικά, ύστερα 200 m βορειοδυτικά (δηλαδή, 45° βόρεια προς τα δυτικά). Ποιά είναι η τελική μετατόπιση του πουλιού;

ΛΥΣΗ

Η τελική μετατόπιση $\vec{\mathbf{C}}$ είναι το άθροισμα

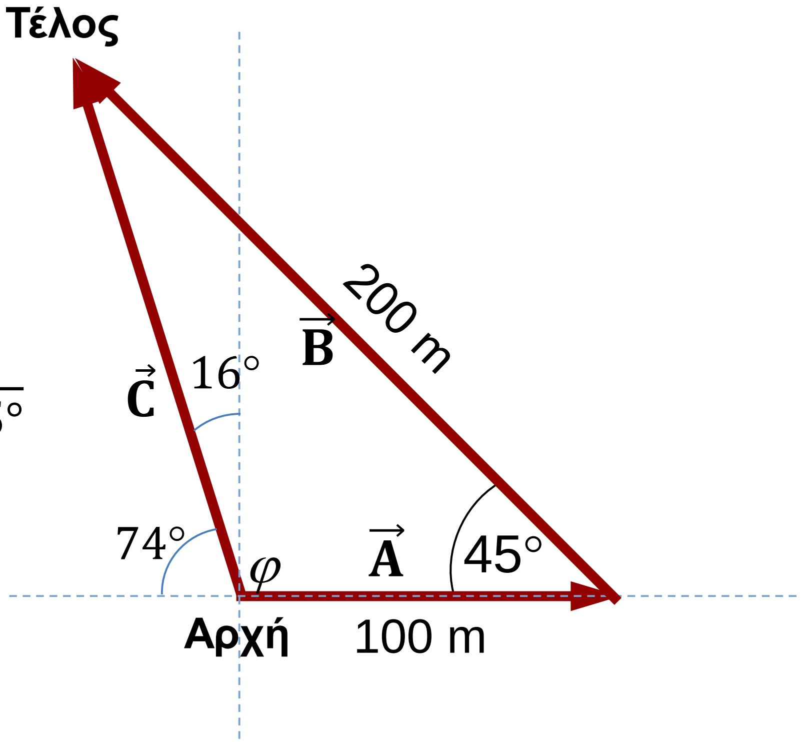
$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$$

Το μέτρο της τελικής μετατόπισης είναι

$$\mathrm{C} = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2\mathrm{AB}\cos 45°}$$

$$\mathrm{C} = \sqrt{(100\mathrm{m})^2 + (200)^2 - 2(100\mathrm{m})(200m)\cos 45°}$$

$$\mathrm{C} = 147\ \mathrm{m}$$



και η διεύθυνσή της

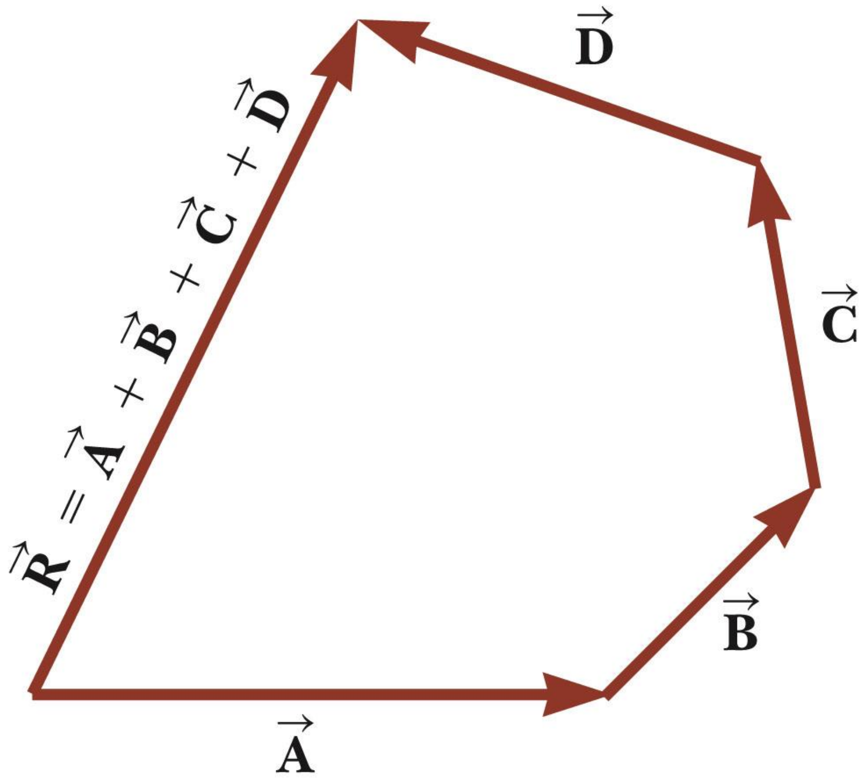
$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{B}{R}\sin\theta\right) = \sin^{-1}\left(\frac{200}{147}\sin 45°\right)$$

$$\varphi = \sin^{-1}(0{,}962) = 74°$$

Συνεπώς, η τελική μετατόπιση του πουλιού είναι 147 m και16° βόρεια - βορειοανατολικά

Πρόσθεση διανυσμάτων με τη γραφική μέθοδο (*τελική διαφάνεια*)

- Όταν έχετε πολλά διανύσματα, επαναλάβετε τη διαδικασία μέχρι να τα συμπεριλάβετε όλα.
- Η συνισταμένη $\vec{\mathbf{R}}$ εξακολουθεί να είναι το διάνυσμα που αρχίζει από την αρχή του πρώτου διανύσματος και τελειώνει στο τέλος του τελευταίου.

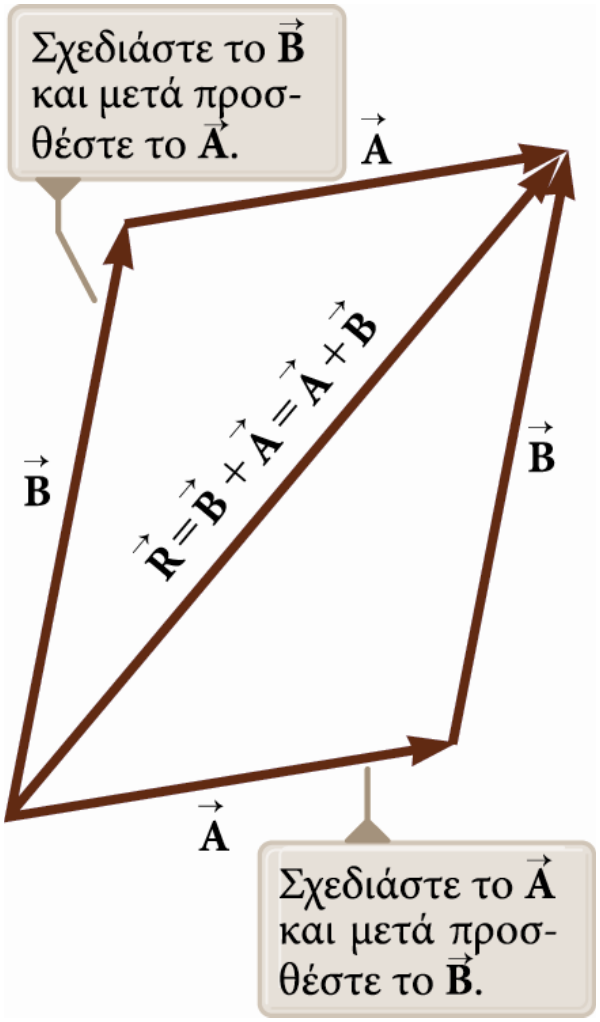


Κανόνες πρόσθεσης διανυσμάτων

Στην πρόσθεση δύο διανυσμάτων, το άθροισμα είναι ανεξάρτητο από τη σειρά της άθροισης.

$$\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}$$

- Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως ***αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης.***

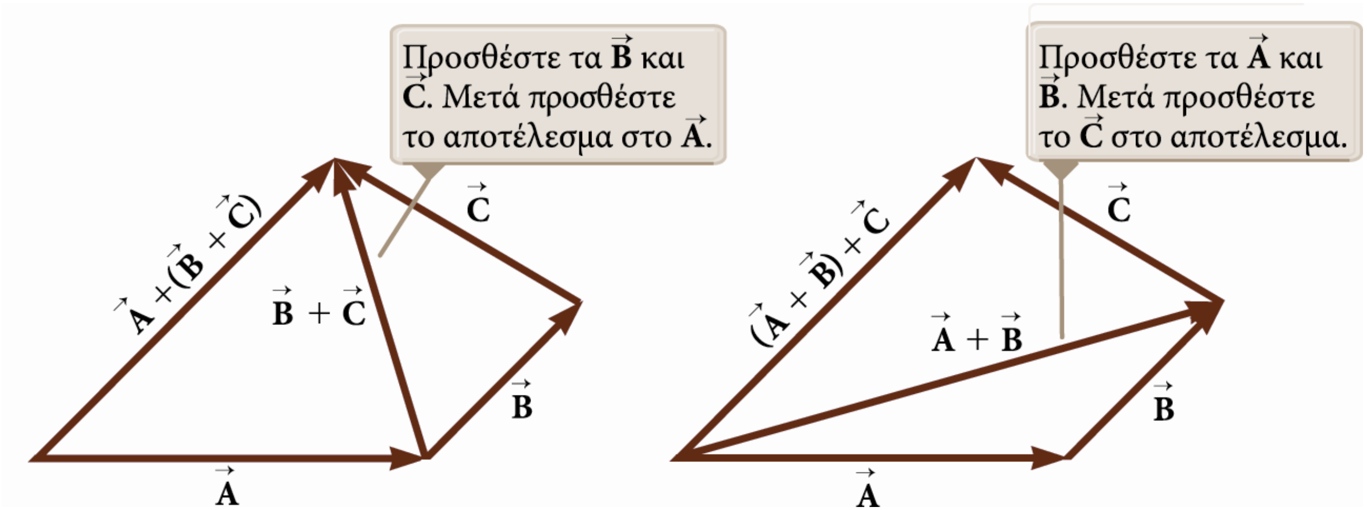


Κανόνες πρόσθεσης διανυσμάτων *(συνέχεια)*

Στην πρόσθεση τριών ή περισσοτέρων διανυσμάτων, το άθροισμα είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο ομαδοποίησης των επιμέρους διανυσμάτων.

$$\vec{\mathbf{A}} + (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = (\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}) + \vec{\mathbf{C}}$$

- Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται ***προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης***.



CENGAGE Learning

Κανόνες πρόσθεσης διανυσμάτων (*τελική διαφάνεια*)

Στην πρόσθεση διανυσμάτων, όλα τα διανύσματα πρέπει να έχουν τις ίδιες μονάδες.

Όλα τα διανύσματα πρέπει να περιγράφουν το ίδιο μέγεθος.

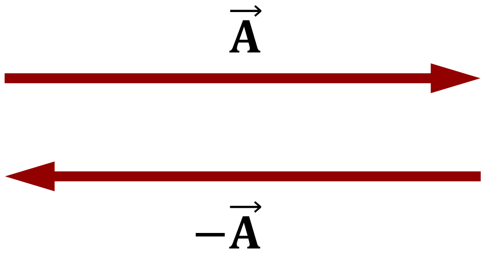
- Για παράδειγμα, δεν μπορείτε να προσθέσετε ένα διάνυσμα μετατόπισης με ένα διάνυσμα ταχύτητας.

Αντίθετο ενός διανύσματος

Ως αντίθετο ενός διανύσματος ορίζουμε το διάνυσμα το οποίο, όταν προστεθεί στο αρχικό, δίνει μηδενικό διανυσματικό άθροισμα.

- Συμβολίζεται με $-\vec{\mathbf{A}}$
- $\vec{\mathbf{A}} + \left(-\vec{\mathbf{A}}\right) = \mathbf{0}$

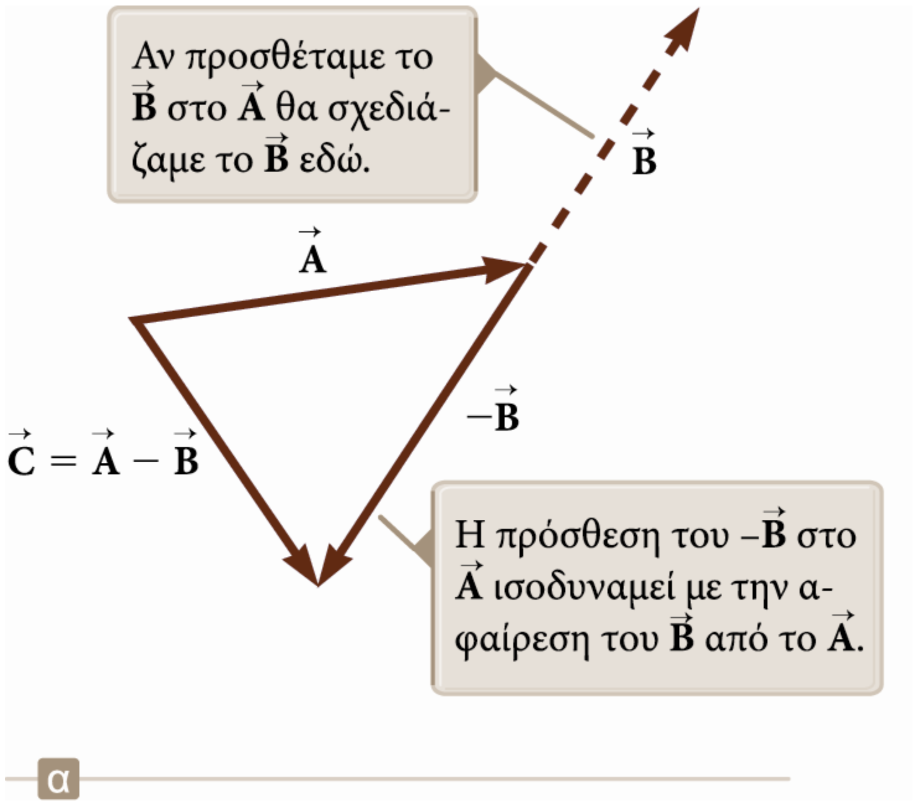
Το αρχικό διάνυσμα και το αντίθετό του θα έχουν ίδιο μέτρο αλλά αντίθετες κατευθύνσεις.



Αφαίρεση διανυσμάτων

Η αφαίρεση $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ είναι η πρόσθεση με το αντίθετο του $\vec{\mathbf{B}}$

$$\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} + \left(-\vec{\mathbf{B}}\right)$$

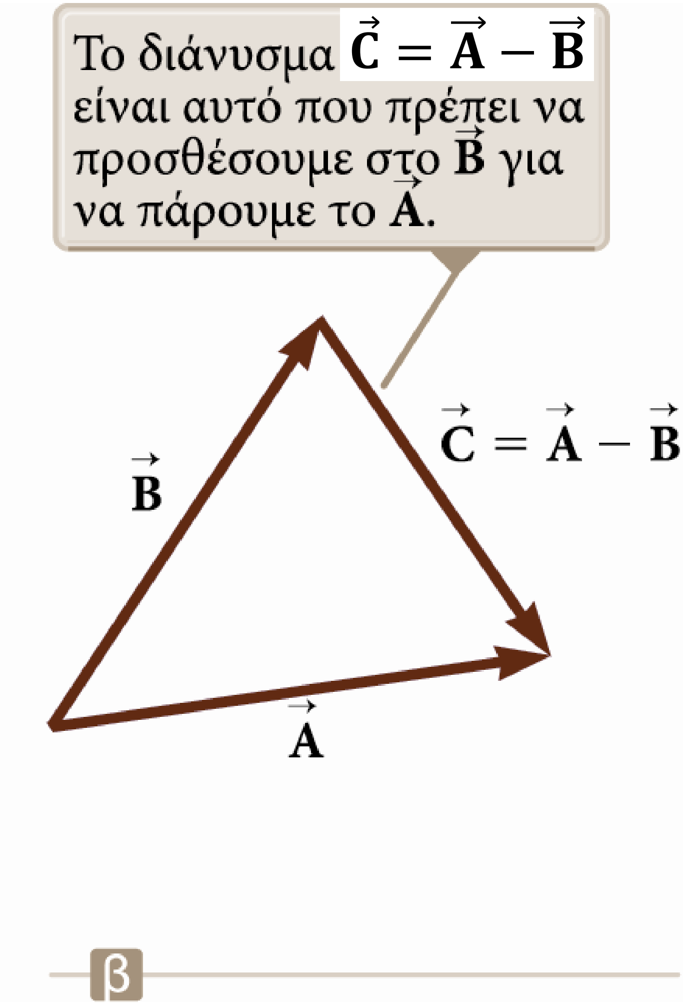


Αφαίρεση διανυσμάτων: 2η μέθοδος

Ένας άλλος τρόπος θεώρησης της αφαίρεσης είναι να βρούμε το διάνυσμα που πρέπει να προσθέσουμε στο δεύτερο διάνυσμα για να πάρουμε το πρώτο

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} \Rightarrow \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}}$$

- Όπως μπορείτε να δείτε, η διαφορά $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ έχει κατεύθυνση από την αιχμή του δεύτερου διανύσματος, $\vec{\mathbf{B}}$, προς την αιχμή του πρώτου, $\vec{\mathbf{A}}$.



CENGAGE Learning

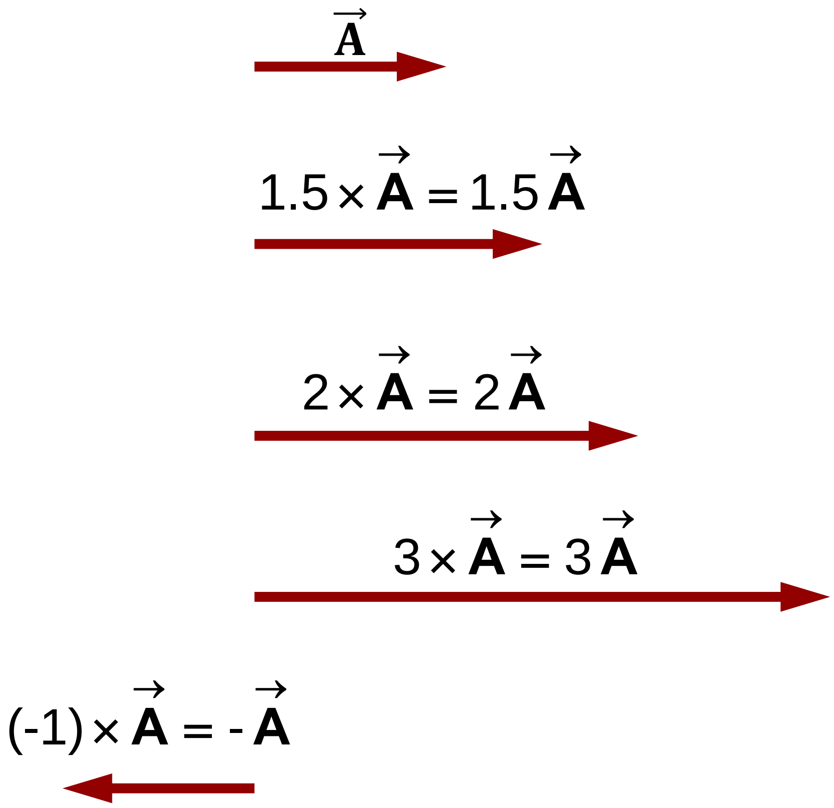
Πολλαπλασιασμός ή διαίρεση διανύσματος με βαθμωτή ποσότητα

Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης ενός διανύσματος με μια βαθμωτή ποσότητα είναι διάνυσμα.

Το μέτρο του διανύσματος πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται με τη βαθμωτή ποσότητα.

Αν η βαθμωτή ποσότητα είναι θετική, το διάνυσμα που προκύπτει έχει την ίδια κατεύθυνση με το αρχικό διάνυσμα.

Αν η βαθμωτή ποσότητα είναι αρνητική, το διάνυσμα που προκύπτει έχει αντίθετη κατεύθυνση από το αρχικό διάνυσμα.



Μέθοδος πρόσθεσης διανυσμάτων με χρήση συνιστωσών

Η γραφική μέθοδος πρόσθεσης διανυσμάτων δεν ενδείκνυται όταν:

- Θέλουμε μεγάλη ακρίβεια.
- Λύνουμε προβλήματα σε τρεις διαστάσεις.

Μία εναλλακτική μέθοδος είναι η μέθοδος πρόσθεσης με χρήση συνιστωσών.

- Χρησιμοποιεί τις προβολές των διανυσμάτων πάνω σε άξονες συντεταγμένων.

Συνιστώσες διανύσματος – Εισαγωγή

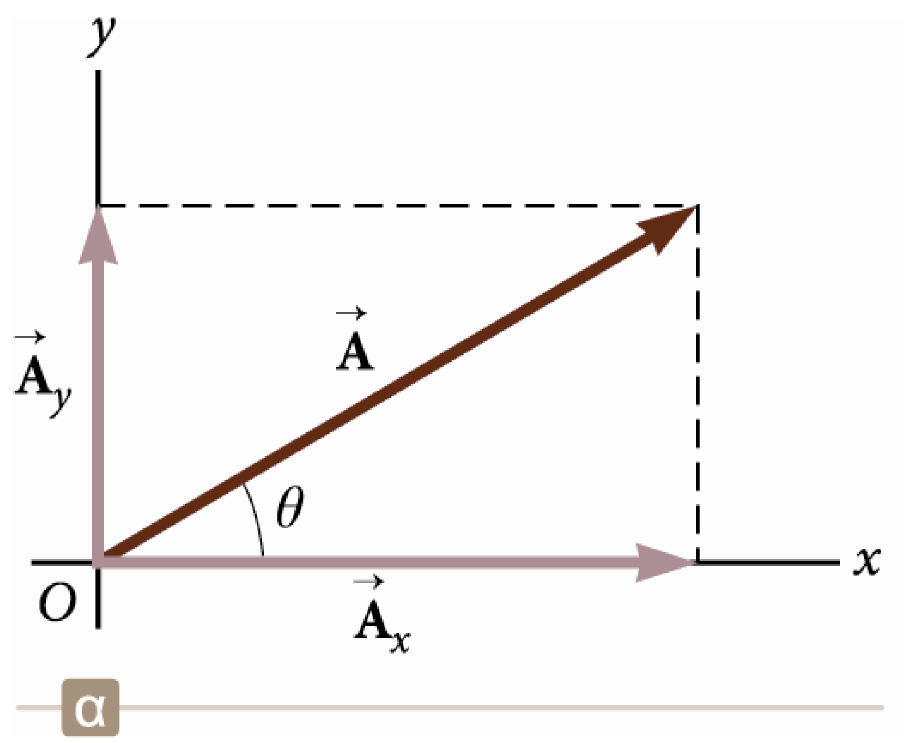
Συνιστώσα είναι η προβολή ενός διανύσματος πάνω σε έναν άξονα.

- Κάθε διάνυσμα μπορεί να περιγραφεί πλήρως από τις συνιστώσες του.

Είναι καλύτερο να χρησιμοποιούμε τις **καρτεσιανές συνιστώσες.**

- Αυτές είναι οι προβολές του διανύσματος στους άξονες *x* και *y*.

Τα $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}$ και $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{y}}$ είναι οι ***διανυσματικές συνιστώσες*** του $\vec{\mathbf{A}}$.



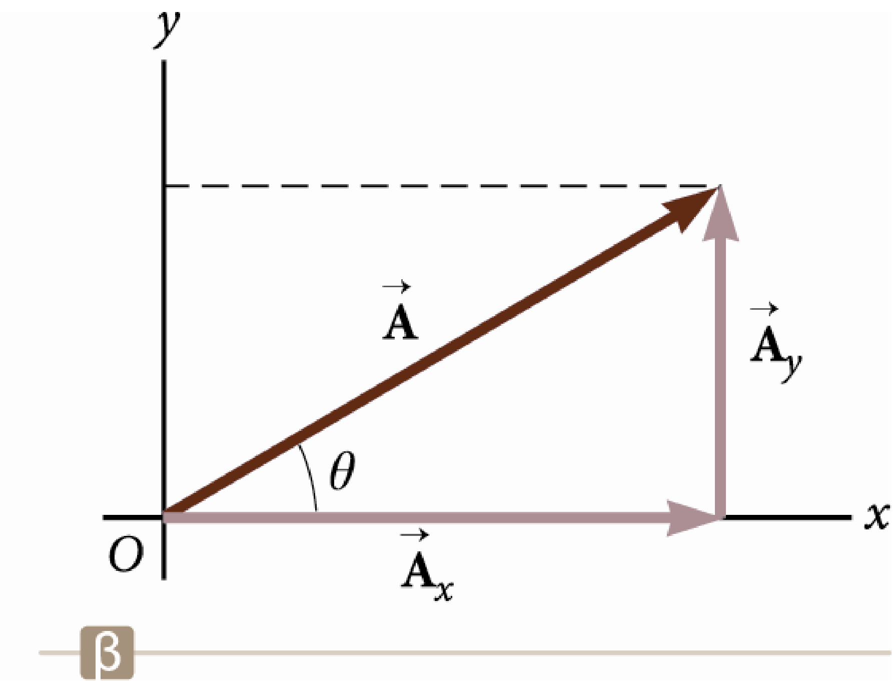
Συνιστώσες διανύσματος (συνέχεια)

Έστω ότι δίνεται το διάνυσμα $\vec{\mathbf{A}}$.

Αυτό μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\mathbf{A}}_\mathbf{x}$ και $\vec{\mathbf{A}}_\mathbf{y}$

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}_\mathbf{x} + \vec{\mathbf{A}}_\mathbf{y}$$

Τα τρία διανύσματα σχηματίζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο.



Συνιστώσες διανύσματος (συνέχεια)

Η συνιστώσα *x* του διανύσματος $\vec{\mathbf{A}}$ είναι η προβολή του πάνω στον άξονα *x*.

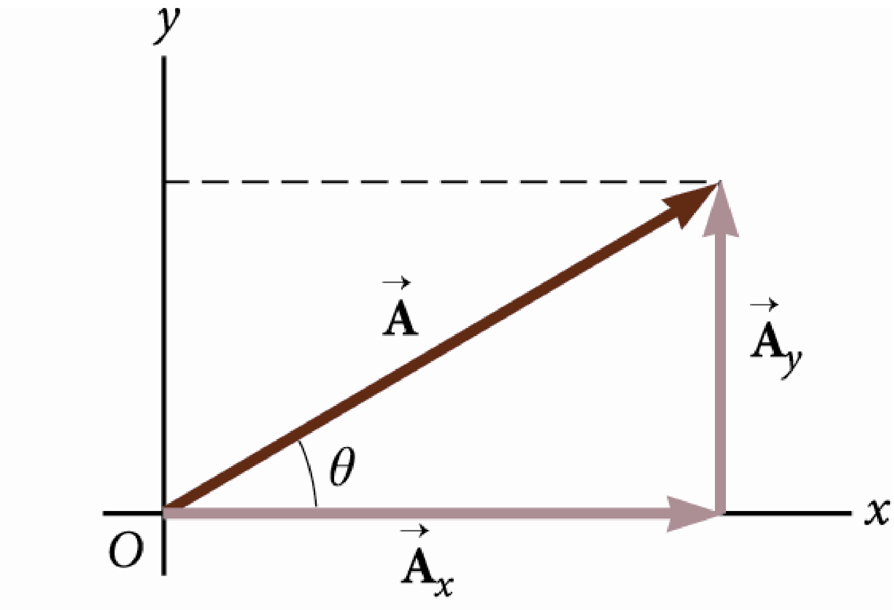
Το μέτρο της συνιστώσας $\overrightarrow{\mathbf{A_x}}$

$$A_x = A \cdot \cos\theta$$

Η συνιστώσα y ενός διανύσματος $\vec{\mathbf{A}}$ είναι η προβολή του πάνω στον άξονα *y*.

Το μέτρο της συνιστώσας $\overrightarrow{\mathbf{A_y}}$

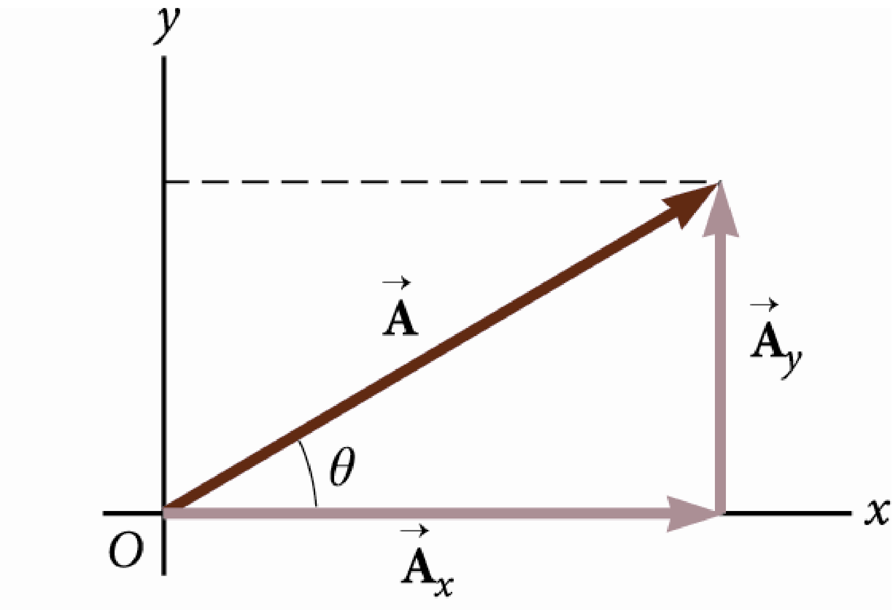
$$A_y = A \cdot \sin\theta$$



Προσοχή: Έχουμε υποθέσει ότι η γωνία *θ* μετριέται ως προς τον άξονα *x*. Αν αυτό δεν ισχύει, οι εξισώσεις δεν θα είναι σωστές.

Συνιστώσες διανύσματος (συνέχεια)

Οι συνιστώσες είναι οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα μήκους *A.*

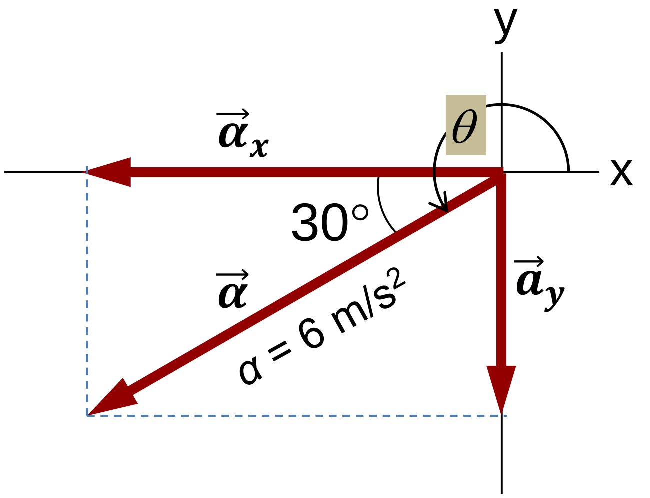


- $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ και $\theta = \tan^{-1}\dfrac{A_y}{A_x}$
- Και πάλι, πρέπει να υπολογίσουμε τη θ ως προς τον θετικό άξονα x.

Στα προβλήματα, μπορούμε να ορίσουμε ένα διάνυσμα είτε με τις συνιστώσες του είτε με το μέτρο και την κατεύθυνσή του.

CENGAGE Learning™

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2 Να υπολογίσετε τις x και y συνιστώσες ενός διανύσματος επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ που φαίνεται στο σχήμα.



ΛΥΣΗ

Η γωνία του διανύσματος της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ ως προς το θετικό x-άξονα είναι ίση με

$\theta = 180° + 30° = 210°$.

Οπότε:

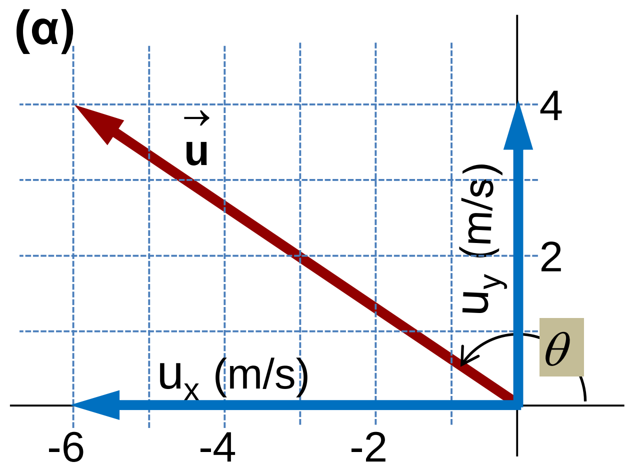
$\alpha_x = \alpha \cos 210° = (6\ \text{m/s}^2) \cos 210° = -5.2\ \text{m/s}^2$

$\alpha_y = \alpha \sin 210° = (6\ \text{m/s}^2) \sin 210° = -3.0\ \text{m/s}^2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3 Το σχήμα δείχνει το διάνυσμα $\vec{u}$ της ταχύτητας ενός σωματιδίου. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου και την κατεύθυνση της κίνησής του.

Σχήμα 1.17

ΛΥΣΗ



Μπορούμε να διαβάσουμε τις συνιστώσες του διανύσματος $\vec{u}$ κατευθείαν από τους άξονες x και y:

u_x = -6 m/s και u_y = 4 m/s.

Το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου είναι

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(-6\,\mathrm{m/s})^2 + (4\,\mathrm{m/s})^2} = 7.2\,\mathrm{m/s}$$

Η διεύθυνση της ταχύτητας δίνεται από τη γωνία θ που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}$ με το θετικό x-άξονα

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{u_y}{u_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4\,\mathrm{m/s}}{-6\,\mathrm{m/s}}\right) = 146.3^\circ$$

Τελικά, το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{u}$ μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$\vec{u}$ = (7.2 m/s, 146.3° ως προς το θετικό x-άξονα).

Άλγεβρα διανυσμάτων - Μοναδιαία διανύσματα

Ένα ***μοναδιαίο διάνυσμα*** δεν έχει διαστάσεις και το μέτρο του είναι ίσο με 1.

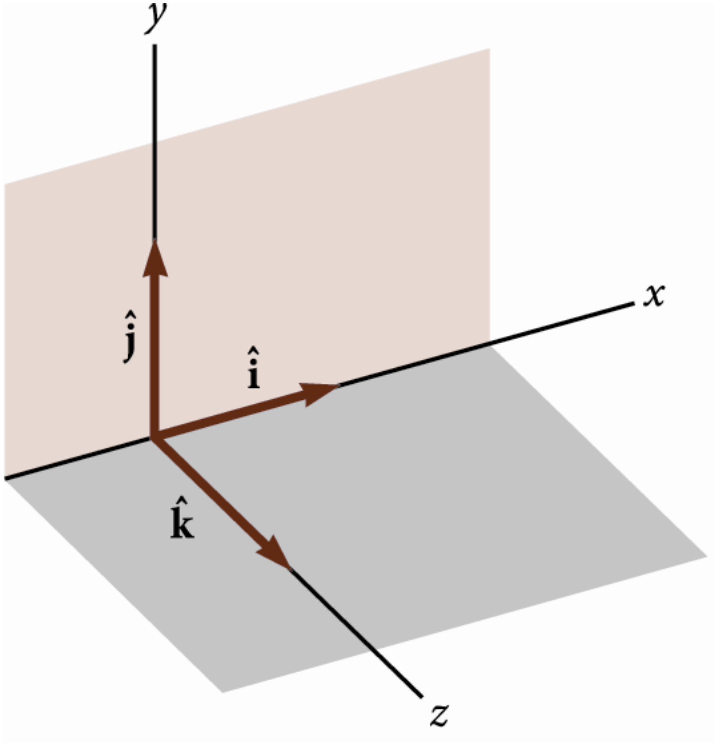
Τα μοναδιαία διανύσματα ορίζουν μία συγκεκριμένη κατεύθυνση και δεν έχουν κάποια άλλη φυσική σημασία.

Συμβολίζουμε τα μοναδιαία διανύσματα με τα σύμβολα $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ και $\hat{\mathbf{k}}$

Αποτελούν ένα σύνολο κάθετων μεταξύ τους διανυσμάτων σε ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων.

Το μέτρο κάθε μοναδιαίου διανύσματος ισούται με 1.

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = \left|\hat{\mathbf{k}}\right| = 1$$

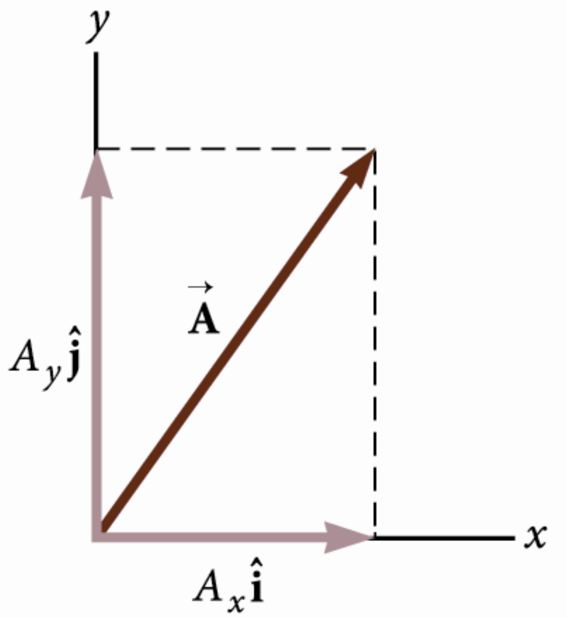


Διανύσματα σε μορφή μοναδιαίων διανυσμάτων

Η συνιστώσα $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}$ είναι ίδια με το γινόμενο $A_x\hat{\mathbf{i}}$ και η συνιστώσα $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{y}}$ είναι ίδια με το γινόμενο $A_y\hat{\mathbf{j}}$, κ.ο.κ.

Το πλήρες διάνυσμα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$



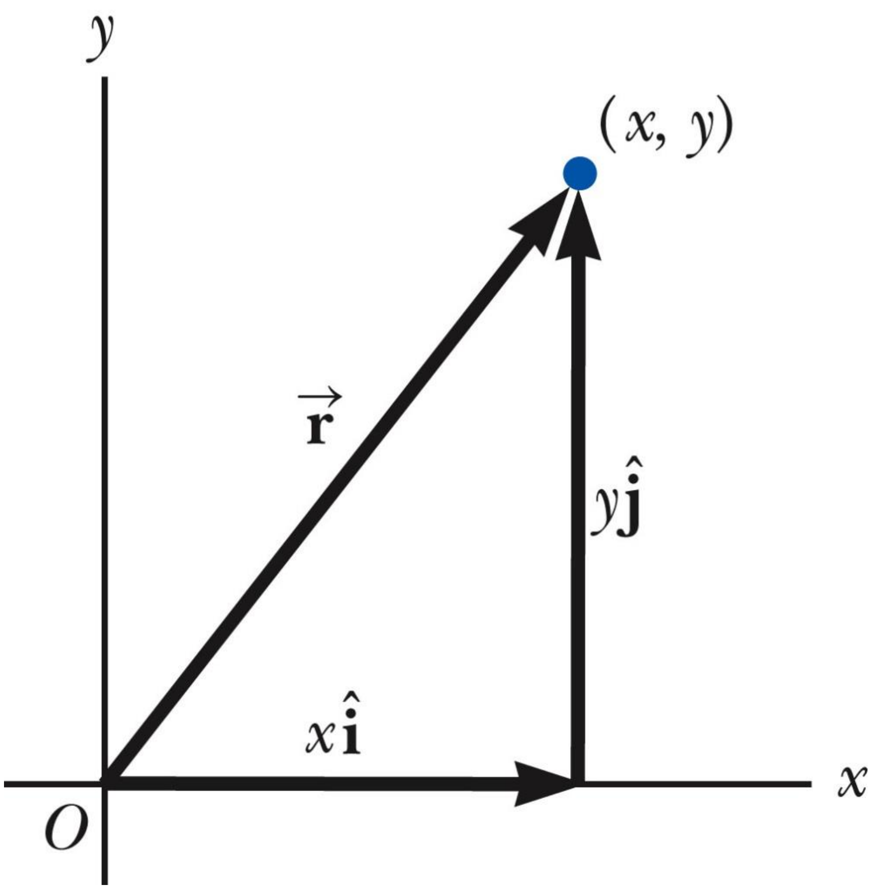
Διάνυσμα θέσης – Παράδειγμα

Ένα σημείο του επιπέδου *xy* έχει καρτεσιανές συντεταγμένες (*x*, *y*).

Το σημείο μπορεί να οριστεί από το διάνυσμα θέσης

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

Η παραπάνω σχέση δίνει τις συνιστώσες του διανύσματος και τις συντεταγμένες του.



CENGAGE Learning™

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.6 Το Παράδειγμα 1.1 ήταν σχετικό με ένα πουλί που πέταξε 100 m ανατολικά, ύστερα 200 m βορειοδυτικά. Χρησιμοποιείστε την αλγεβρική πρόσθεση διανυσμάτων για να βρείτε την τελική μετατόπιση του πουλιού.

ΛΥΣΗ

Για να προσθέσουμε τα διανύσματα αλγεβρικά πρέπει να ξέρουμε τις συνιστώσες τους.

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} = (100\text{m})\hat{\mathbf{i}}$$

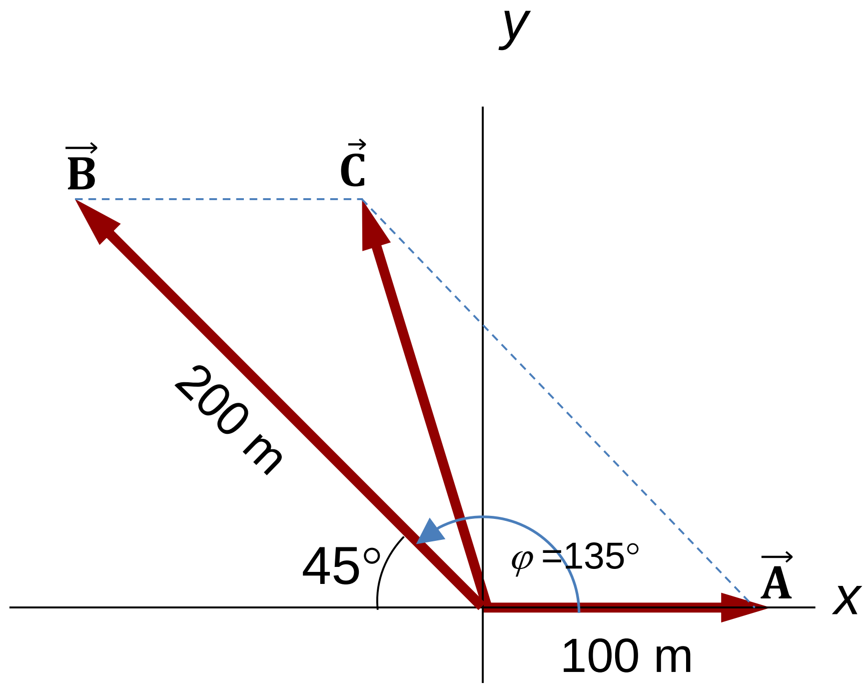
και

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}$$

$$= (B\cos 135°)\hat{\mathbf{i}} + (B\sin 135°)\hat{\mathbf{j}}$$

$$= (200\cos 135°)\hat{\mathbf{i}} + (200\sin 135°)\hat{\mathbf{j}}$$

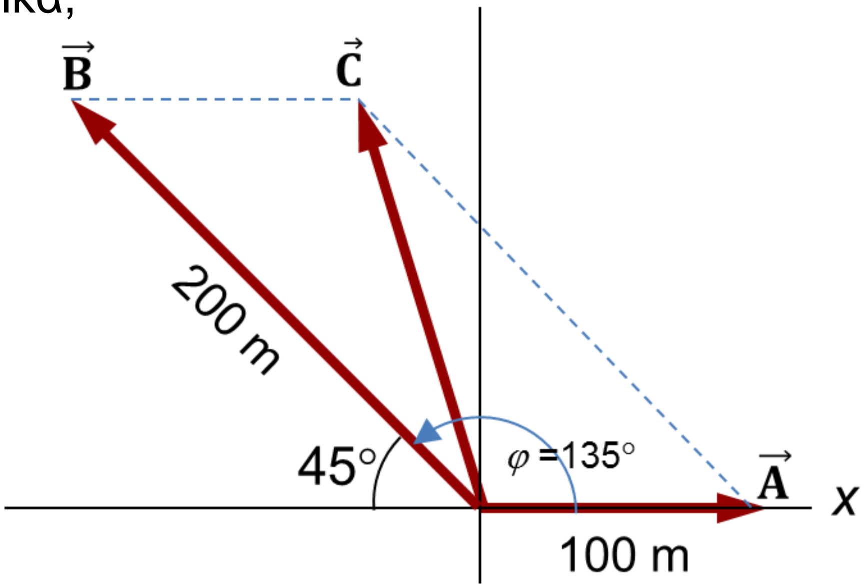
$$= (-141\hat{\mathbf{i}} + 141\hat{\mathbf{j}})\text{m}$$



Προσέξτε ότι οι διανυσματικές ποσότητες πρέπει να περιέχουν μονάδες.

ΛΥΣΗ (*συνέχεια*)

Προσθέτοντας τα διανύσματα $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$ αλγεβρικά, παίρνουμε:



$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$$

$$\vec{\mathbf{C}} = (100\,\hat{\mathbf{i}})\mathrm{m} + (-141\,\hat{\mathbf{i}} + 141\,\hat{\mathbf{j}}]\mathrm{m} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\mathbf{C}} = (100\,\mathrm{m} - 141\mathrm{m})\,\hat{\mathbf{i}} + (141\mathrm{m})\,\hat{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\mathbf{C}} = (-41\,\hat{\mathbf{i}} + 141\,\hat{\mathbf{j}}]\mathrm{m}$$

Για να συγκρίνουμε αυτό το αποτέλεσμα με το αποτέλεσμα του Προβλήματος 1.1, πρέπει να βρούμε το μέτρο και τη κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{\mathbf{C}}$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{(-41\mathrm{m})^2 + (141\mathrm{m})^2} = 147\,\mathrm{m}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{C_y}{C_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{141\mathrm{m}}{-41\mathrm{m}}\right) = 106^\circ$$

σε συμφωνία με το του Προβλήματος 1.1

Επέκταση στις τρεις διαστάσεις

Αν $\vec{\mathbf{A}} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}$ και $\vec{\mathbf{B}} = B_x\,\hat{\mathbf{i}} + B_y\,\hat{\mathbf{j}} + B_z\,\hat{\mathbf{k}}$

χρησιμοποιούμε τη σχέση $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$

που δίνει, $\vec{\mathbf{C}} = \left(A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}\right) + \left(B_x\,\hat{\mathbf{i}} + B_y\,\hat{\mathbf{j}} + B_z\,\hat{\mathbf{k}}\right)$

$$\vec{\mathbf{C}} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(A_z + B_z\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{C}} = C_x\,\hat{\mathbf{i}} + C_y\,\hat{\mathbf{j}} + C_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

όπου: $C_x = A_x + B_x$, $C_y = A_y + B_y$, και $C_z = A_z + B_z$

και $C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$ $C_x = C \cdot \cos\theta_x$, κ.λ.π.

Πρόσθεση τριών ή περισσότερων διανυσμάτων

Η ίδια μέθοδος μπορεί να επεκταθεί για την πρόσθεση τριών η περισσότερων διανυσμάτων.

Υποθέτουμε ότι

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$$

και

$$\vec{\mathbf{R}} = (A_x + B_x + C_x)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y + C_y\right)\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z + C_z)\hat{\mathbf{k}}$$