# Φαινόμενα Μεταφοράς Μάζας – θερμότητας

7η Διάλεξη

## Αγωγή θερμότητας σε κυλινδρικά και σφαιρικά συστήματα

Εμμανουήλ Σουλιώτης

Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Ακαδημαϊκό Έτος 2018-2019

# Μαθησιακοί στόχοι

- Κατάστρωση ισοδύναμων θερμικών κυκλωμάτων και υπολογισμός ολικής αντίστασης σε κυλινδρικά και σφαιρικά τοιχώματα (§3.6.3)
- Κατανόηση και υπολογισμός κρίσιμου πάχους κυλινδρικού και σφαιρικού τοιχώματος (§3.7)

# Σύνοψη θερμικών αντιστάσεων

| | Θερμική αντίσταση |
|---|---|
| **Επίπεδο τοίχωμα** | $R_{wall} = \frac{L}{kA}$ |
| **Κυλινδρικό τοίχωμα** | $R_{cyl} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{k2\pi L}$ ή $R_{cyl} = \frac{r_2 - r_1}{kA_{lm}}$ |
| **Σφαιρικό τοίχωμα** | $R_{sph} = \frac{(1/r_1)-(1/r_2)}{4\pi k}$ ή $R_{sph} = \frac{r_2 - r_1}{kA_{gm}}$ |
| **Συναγωγή** | $R_{conv} = \frac{1}{hA}$ |
| **Ακτινοβολία** | $R_{rad} = \frac{1}{h_r A}$ |

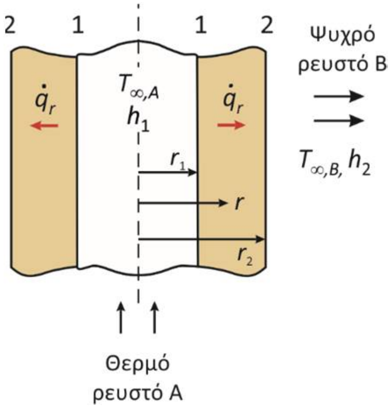
$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_\vartheta}$$

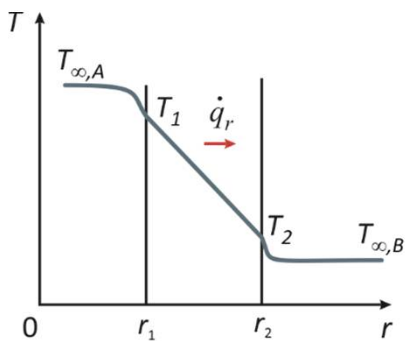
**Προϋποθέσεις**

- Μόνιμη κατάσταση
- Χωρίς παραγωγή
- Σταθερό k
- 1D Αγωγή θερμότητας

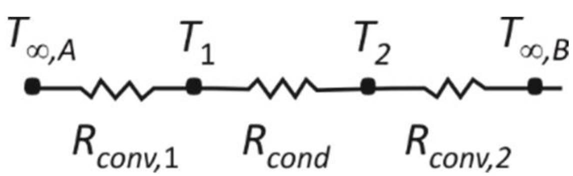
# Θερμικό κύκλωμα αγωγής σε κύλινδρο

- Φυσικό σύστημα




- Κύκλωμα θερμικών αντιστάσεων




$$R_{conv,1} = \frac{1}{h_1 A_1} \qquad A_1 = 2\pi r_1 L$$

$$R_{conv,2} = \frac{1}{h_2 A_2} \qquad A_2 = 2\pi r_2 L$$

$$R_{cond} = \frac{r_2 - r_1}{k A_{lm}} \qquad A_{lm} = \frac{A_2 - A_1}{\ln\left(A_2/A_1\right)} = \frac{2\pi L\left(r_2 - r_1\right)}{\ln\left(r_2/r_1\right)}$$

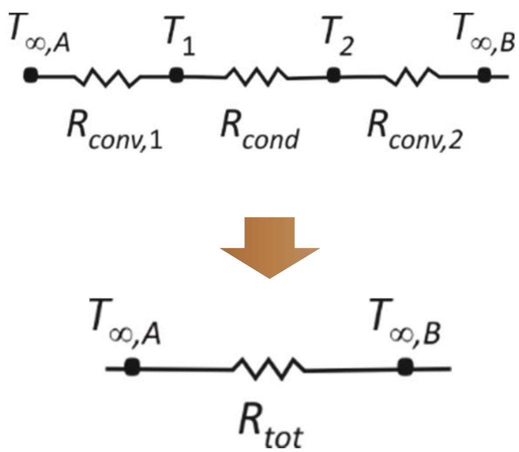
# Άθροιση αντιστάσεων σε κύλινδρο

- **Ολική αντίσταση**

Οι τρεις αντιστάσεις συνδέονται σε σειρά

$$R_{tot} = R_{conv,1} + R_{cond} + R_{conv,2} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{r_2 - r_1}{k A_{lm}} + \frac{1}{h_2 A}$$

$$\dot{q}_t = \frac{T_{\infty,A} - T_{\infty,B}}{R_{tot}}$$




- Συνολικός **συντελεστής μεταφοράς**

$$\frac{1}{U_1 A_1} = R_{tot} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_t = U_1 A_1 \left(T_{\infty,A} - T_{\infty,B}\right)$$ με βάση την εσωτερική επιφάνεια

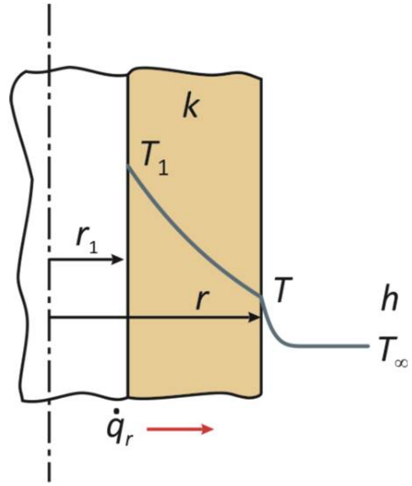
$$\frac{1}{U_2 A_2} = R_{tot} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_t = U_2 A_2 \left(T_{\infty,A} - T_{\infty,B}\right)$$ με βάση την εξωτερική επιφάνεια

# Μεταβολή αντιστάσεων με την ακτίνα

- Θερμικό κύκλωμα

$$\dot{q}_r = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{cond} + R_{conv}} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{tot}}$$

- Θερμικές αντιστάσεις
  Μεταβολή με την εξωτερική ακτίνα (r)

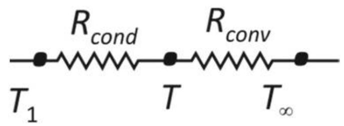



*Αντίσταση αγωγής*

$$R_{cond} = \frac{r - r_1}{k A_{lm}} = \frac{\ln(r/r_1)}{k 2\pi L}$$

$R_{cond} \uparrow$ για $r \uparrow$

*αυξάνει το πάχος του τοιχώματος*



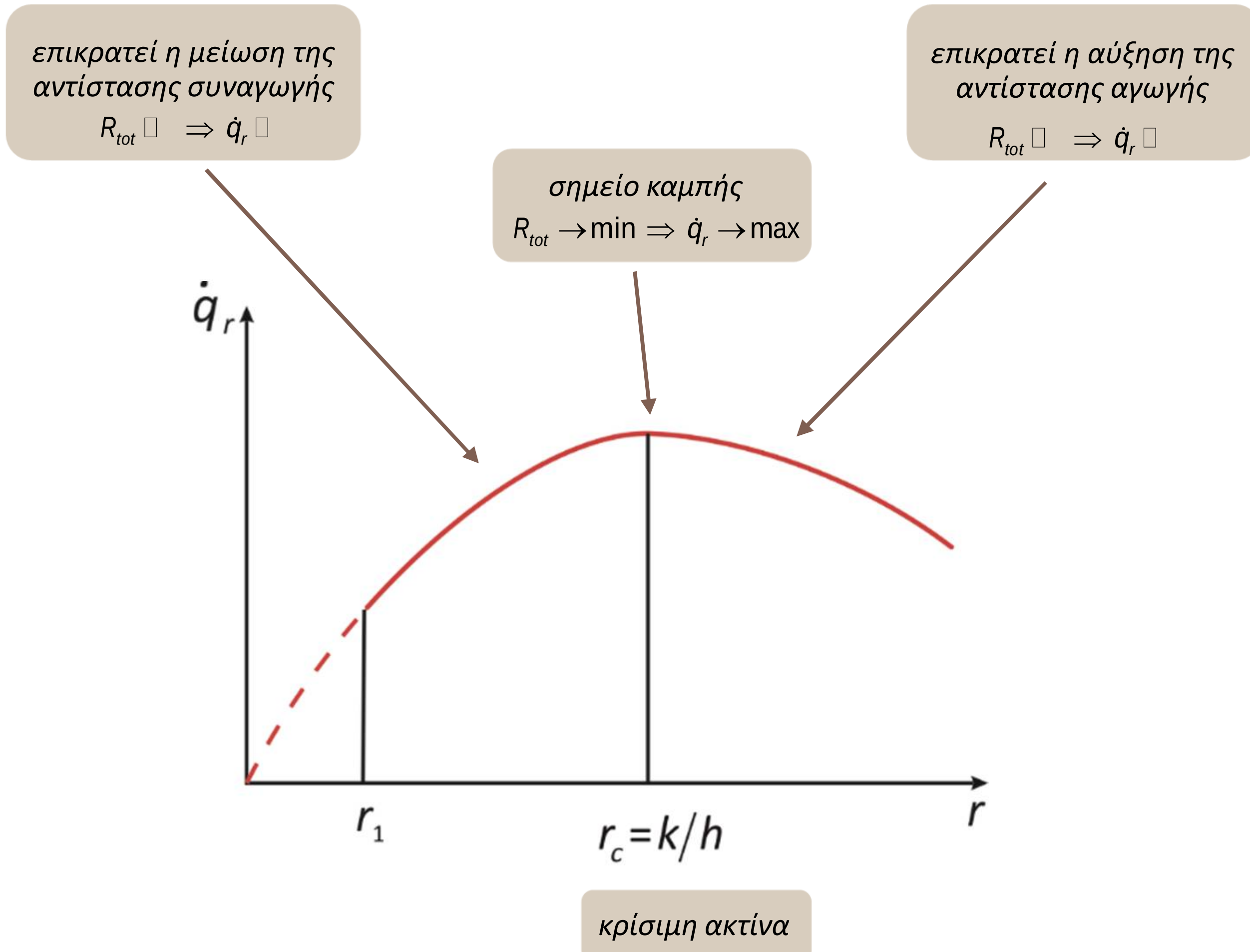

*Αντίσταση συναγωγής*

$$R_{conv} = \frac{1}{hA} = \frac{1}{2\pi r L h}$$

$R_{conv} \uparrow$ για $r \uparrow$

*αυξάνει η επιφάνεια συναγωγής*

# Μεταβολή ρυθμού μεταφοράς με την ακτίνα



# Κρίσιμη ακτίνα

- Συνολική αντίσταση

$$R_{tot} = R_{cond} + R_{conv} = \frac{\ln(r/r_1)}{k2\pi L} + \frac{1}{2\pi r L h}$$

- Ρυθμός μεταβολής με την ακτίνα

$$\frac{dR_{tot}}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{\ln(r/r_1)}{k2\pi L} + \frac{1}{2\pi r L h}\right) = \frac{1}{k2\pi r L} - \frac{1}{2\pi r^2 L h}$$

- Κρίσιμη ακτίνα $r_c \equiv r$ όπου μηδενίζεται ο ρυθμός μεταβολής

$$\frac{1}{k2\pi r_c L} - \frac{1}{2\pi r_c^2 h L} = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{r_c = \frac{k}{h}}$$

# Παράδειγμα 1

## Ψύξη ηλεκτρικού αγωγού

Σε αγωγό ηλεκτρικού ρεύματος διαμέτρου 5 mm με ηλεκτρική αντίσταση $R_H = 6\cdot10^{-4}$ Ohm ανά μέτρο μήκους, διαβιβάζεται ρεύμα έντασης $I = 500$ A. O αγωγός βρίσκεται σε περιβάλλον θερμοκρασίας $T_\infty = 30$°C, ο δε συντελεστής συναγωγής μπορεί να θεωρηθεί σταθερός $h = 25$ W/m$^2$·K.

Ζητούνται:

(α) Η θερμοκρασία στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού όταν δεν υπάρχει μόνωση.

(β) Η θερμοκρασία στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού όταν περιβάλλεται από μονωτικό υλικό πάχους 2 mm με συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας $k = 0.5$ W/m·K.

(γ) Θα αυξηθεί η θερμοκρασία της εξωτερικής επιφάνειας του αγωγού (μετάλλου) αν αυξηθεί το πάχος της μόνωσης πέραν των 2 mm;

(δ) Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή θερμοκρασία της επιφάνειας του αγωγού.

# Παράδειγμα 1 – Λύση 1/3

## Ρυθμός μεταφοράς για γυμνό αγωγό

Θεωρείται $L = 1$ m μήκος αγωγού.
Στον αγωγό παράγεται θερμότητα με ρυθμό

$$\dot{q}_{cond} = I^2 R_H L = 500^2 \times 6 \cdot 10^{-4} \times 1 = 150\,\mathrm{W}$$

Η θερμότητα αυτή μεταφέρεται στο περιβάλλον με συναγωγή

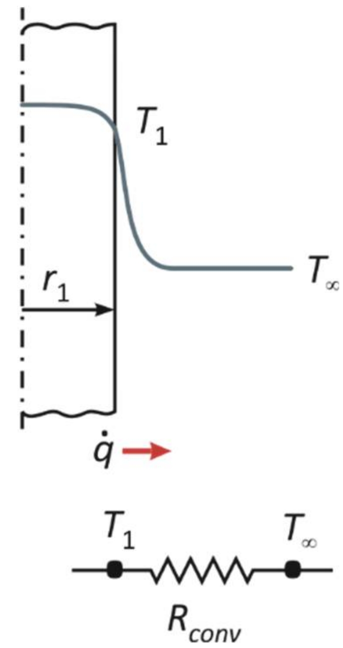
$$\dot{q} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{conv}}$$

όπου

$$R_{conv} = \frac{1}{2\pi r_1 L h} = \frac{1}{2 \times \pi \times 0.0025 \times 1 \times 25} = 2.546\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

Άρα

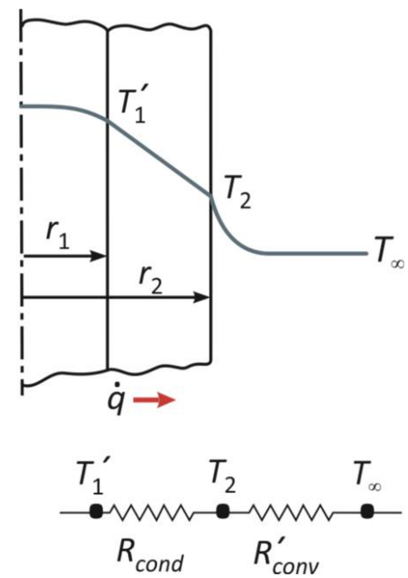
$$T_1 = T_\infty + \dot{q} R_{conv} = 30 + 150 \times 2.546 = 412^\circ\mathrm{C}$$



# Παράδειγμα 1 – Λύση 2/3

## Ρυθμός μεταφοράς για αγωγό με μόνωση

Προστίθεται η αντίσταση αγωγής του μονωτικού στρώματος $R_{cond}$ και αλλάζει (αυξάνει) η αντίσταση συναγωγής $R'_{conv}$ λόγω αύξησης της επιφάνειας συναγωγής




$$R_{cond} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{k2\pi L} = \frac{\ln(0.0045/0.0025)}{0.5\times 2\times\pi\times 1} = 0.187\frac{\text{K}}{\text{W}}$$

$$R'_{conv} = \frac{1}{2\pi r_2 L h} = \frac{1}{2\times\pi\times 0.0045\times 1\times 25} = 1.415\frac{\text{K}}{\text{W}}$$

Συνολική αντίσταση

$$R_{tot} = R_{cond} + R'_{conv} = 0.187 + 1.415 = 1.602\frac{\text{K}}{\text{W}} \qquad \dot{q} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{tot}}$$

Άρα

$$T_1' = T_\infty + \dot{q}R_{tot} = 30 + 150\times 1.602 = 270^\circ\text{C}$$

# Παράδειγμα **1** – Λύση **3/3**

## Κρίσιμη ακτίνα

$$r_c = \frac{k}{h} = \frac{0.5}{25} = 0.02\,\text{m} \quad > \quad r_2 = 0.045\text{m}$$

Άρα, η συνολική αντίσταση ελαττώνεται με την προσθήκη μονωτικού
Η θερμοκρασία του αγωγού $T_1 = T_\infty + \dot{q}R_{tot}$ θα ελαττώνεται επίσης, έως ότου η εξωτερική ακτίνα του μονωτικού γίνει μεγαλύτερη των 0.02 m = 20 mm, δηλαδή για πάχος μονωτικού 17.5 mm

## Ελάχιστη θερμοκρασία

Η ελάχιστη θερμοκρασία επιτυγχάνεται όταν η εξωτερική ακτίνα του μονωτικού γίνει ίση με την κρίσιμη ακτίνα. Η συνολική αντίσταση παίρνει την ελάχιστη τιμή:

$$R_{\min} = \frac{\ln(r_c/r_1)}{k2\pi L} + \frac{1}{2\pi r_c Lh} = \frac{\ln(0.02/0.0025)}{0.5\times 2\times \pi \times 1} + \frac{1}{2\times \pi \times 0.02\times 1\times 25} = 0.98\ \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

και

$$T_{\min} = T_\infty + \dot{q}R_{\min} = 30 + 150\times 0.98 = 177^\circ\text{C}$$