Φαινόμενα Μεταφοράς Μάζας – θερμότητας

5η Διάλεξη
Μονοδιάστατη αγωγή θερμότητας σε μόνιμη κατάσταση

Εμμανουήλ Σουλιώτης

Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Ακαδημαϊκό Έτος 2018-2019

Μαθησιακοί στόχοι

- Ανάλυση προβλημάτων αγωγής θερμότητας σε μονοδιάστατα τοιχώματα, σε μόνιμες συνθήκες και χωρίς παραγωγή θερμότητας (§3.1)
- Προσδιορισμός της κατανομής της θερμοκρασίας, με ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης διατήρησης της ενέργειας και με εφαρμογή κατάλληλων οριακών συνθηκών και υπολογισμός της ροής και του ρυθμού μεταφοράς θερμότητα σε:
  - Επίπεδα τοιχώματα (§3.2)
  - Κυλινδρικά τοιχώματα (§3.3)
  - Σφαιρικά τοιχώματα (§3.4)
- Παρουσίαση της έννοιας της θερμικής αντίστασης και των σχέσεων υπολογισμού της για αγωγή (επίπεδα, κυλινδρικά και σφαιρικά τοιχώματα), συναγωγή και ακτινοβολία (§3.6.1)

Εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

- Γενική μορφή εξίσωσης αγωγής

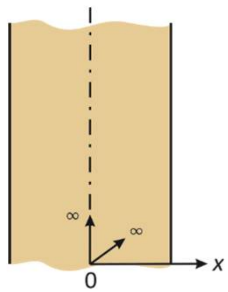
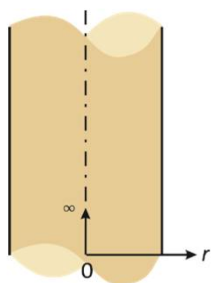
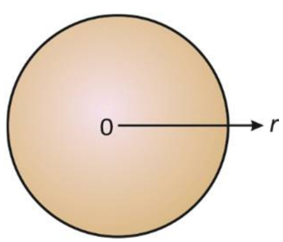
$$\nabla \cdot k \nabla T + \dot{q}''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Ειδική μορφή για
  1. Μόνιμη κατάσταση
  2. Χωρίς παραγωγή θερμότητας
  3. Σταθερός συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας

$$\nabla \cdot \cancelto{(3)}{k} \nabla T + \cancelto{(2)}{\dot{q}'''} = \rho c_p \cancelto{(1)}{\frac{\partial T}{\partial t}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2 T = 0}$$

εξίσωση **Laplace**

Μονοδιάστατη εξίσωση αγωγής

	Σχήμα	Διαφορική εξίσωση	Ροή θερμότητας	Ρυθμός μεταφοράς
Καρτεσιανές συντεταγμένες		$\frac{d^2T}{dx^2}=0$	$\dot{q}''_x=-k\frac{dT}{dx}$	$\dot{q}_x=-kA\frac{dT}{dx}$
Κυλινδρικές συντεταγμένες		$\frac{d}{dr}r\frac{dT}{dr}=0$	$\dot{q}''_r=-k\frac{dT}{dr}$	$\dot{q}_r=-kA\frac{dT}{dr}$
Σφαιρικές συντεταγμένες		$\frac{d}{dr}r^2\frac{dT}{dr}=0$	$\dot{q}''_r=-k\frac{dT}{dr}$	$\dot{q}_r=-kA\frac{dT}{dr}$

Αγωγή σε επίπεδο τοίχωμα

- Ολοκλήρωση ΔΕ

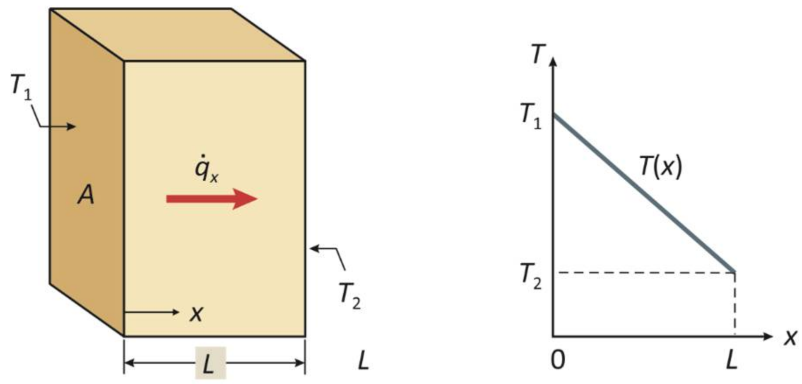
$$\frac{d^2T}{dx^2}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dx}=c_1 \quad \Rightarrow$$

$$T(x)=c_1x+c_2 \qquad \textit{γραμμική}$$

- Οριακές συνθήκες
  - $x=0,\ T=T_1$
  - $x=L,\ T=T_2$

- Κατανομή θερμοκρασίας

$$T(x)=T_1-(T_1-T_2)\frac{x}{L}$$



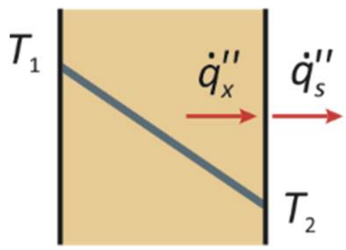
- Ροή και ρυθμός μεταφοράς θερμότητας

$$\dot{q}_x''=-k\frac{dT}{dx}=k\frac{T_1-T_2}{L} \qquad \textit{σταθερή}$$

$$\dot{q}_x=\dot{q}_x''A=kA\frac{T_1-T_2}{L} \qquad \textit{σταθερός}$$

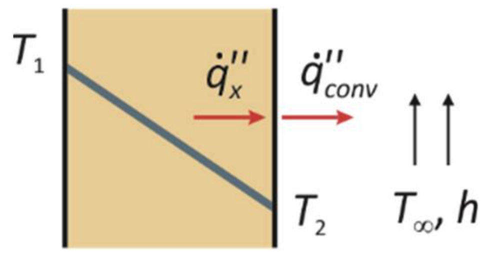
Άλλες οριακές συνθήκες

Δεδομένη ροή θερμότητας	Μεταφορά με συναγωγή σε περιβάλλον δεδομένης θερμοκρασίας



$$\dot{q}''_x = \dot{q}''_s \Rightarrow k\frac{T_1 - T_2}{L} = \dot{q}''_s$$

$$\boxed{T_2 = T_1 - \frac{\dot{q}''_s L}{k}}$$



$$\dot{q}''_x = \dot{q}''_{conv} \Rightarrow k\frac{T_1 - T_2}{L} = h\left(T_2 - T_\infty\right)$$

$$\boxed{T_2 = \frac{kT_1 + hLT_\infty}{k + hL}}$$

Αγωγή σε κυλινδρικό τοίχωμα

- Ολοκλήρωση ΔΕ

$$\frac{d}{dr}r\frac{dT}{dr}=0 \quad \Rightarrow \quad r\frac{dT}{dr}=c_1 \quad \Rightarrow$$

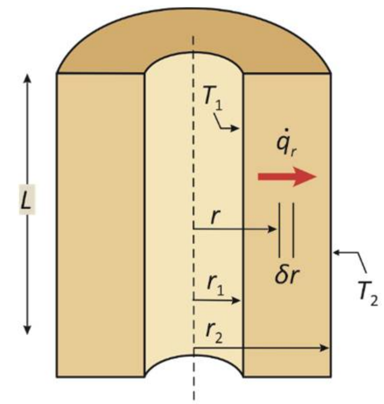
$$T(r)=c_1\ln(r)+c_2 \qquad \textit{λογαριθμική}$$

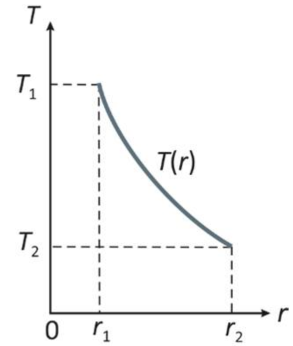
- Οριακές συνθήκες
  - $r=r_1,\ T=T_1$
  - $r=r_2,\ T=T_2$
- Κατανομή θερμοκρασίας

$$T(r)=T_1-(T_1-T_2)\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$

- Ροή θερμότητας

$$\dot{q}_r''=-k\frac{dT}{dr}=\frac{k}{r\ln(r_2/r_1)}(T_1-T_2)$$ *αντιστρόφως ανάλογη του r*





- Ρυθμός μεταφοράς θερμότητας

$$\dot{q}_r=\dot{q}_r''A=\frac{k2\pi L}{\ln(r_2/r_1)}(T_1-T_2) \qquad \textit{σταθερός}$$

εναλλακτικά

$$\dot{q}_r=kA_{lm}\frac{T_1-T_2}{r_2-r_1}$$

$$A_{lm}=\frac{A_2-A_1}{\ln(A_2/A_1)}=\frac{2\pi L(r_2-r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$ μέση λογαριθμική επιφάνεια

Αγωγή σε σφαιρικό τοίχωμα

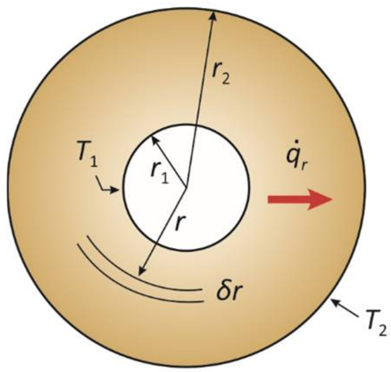
- Κατανομή θερμοκρασίας

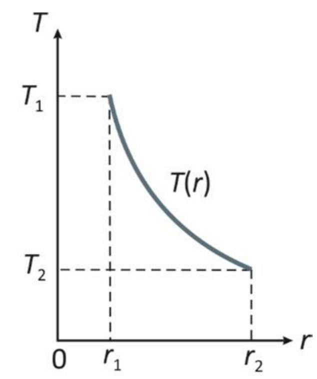
$$T(r) = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{1-(r_1/r)}{1-(r_1/r_2)}$$

- Ροή θερμότητας

$$\dot{q}_r'' = \frac{k}{r^2\left[(1/r_1)-(1/r_2)\right]}(T_1 - T_2)$$

αντιστρόφως ανάλογη του r^2





- Ρυθμός μεταφοράς θερμότητας

$$\dot{q}_r = \frac{4\pi k}{(1/r_1)-(1/r_2)}(T_1 - T_2)$$

σταθερός

Εναλλακτικά

$$\dot{q}_r = kA_{gm}\frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1}$$

με $A_{gm} = \sqrt{A_1 A_2} = 4\pi r_1 r_2$ μέση γεωμετρική επιφάνεια

Σύνοψη σχέσεων

	Επίπεδο τοίχωμα	Κυλινδρικό τοίχωμα	Σφαιρικό τοίχωμα
Κατανομή θερμοκρασίας	$T_1 - \Delta T \dfrac{x}{L}$	$T_1 - \Delta T \dfrac{1-(r_1/r)}{1-(r_1/r_2)}$	$T_1 - \Delta T \dfrac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$
Ροή θερμότητας	$k\dfrac{\Delta T}{L}$	$\dfrac{k\Delta T}{r\ln(r_2/r_1)}$	$\dfrac{k\Delta T}{r^2\left[(1/r_1)-(1/r_2)\right]}$
Ρυθμός μεταφοράς θερμότητας	$kA\dfrac{\Delta T}{L}$	$\dfrac{k2\pi L\Delta T}{\ln(r_2/r_1)}$ ή $kA_{lm}\dfrac{\Delta T}{r_2-r_1}$	$\dfrac{4\pi k\Delta T}{(1/r_1)-(1/r_2)}$ ή $kA_{gm}\dfrac{\Delta T}{r_2-r_1}$

$$\Delta T = T_1 - T_2 \qquad A_{lm} = \frac{2\pi L(r_2-r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \qquad A_{gm} = 4\pi r_1 r_2$$

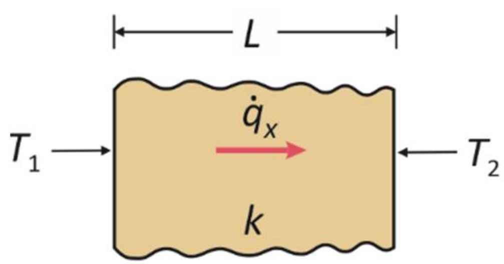
Η έννοια της θερμικής αντίστασης

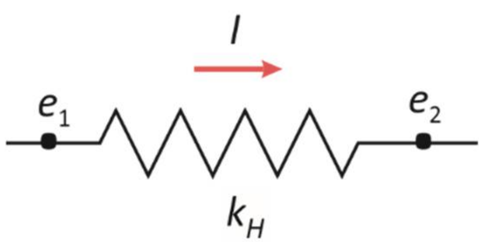
- Αγωγή θερμότητας σε επίπεδο τοίχωμα

$$\dot{q}_x = kA\frac{T_1 - T_2}{L} \Rightarrow \dot{q}_x = \frac{T_1 - T_2}{L/kA} \quad \text{ή} \quad \boxed{\dot{q}_x = \frac{T_1 - T_2}{R_\vartheta}}$$

- Θερμική και ηλεκτρική αντίσταση

Μεταφορά Θερμότητας	Ηλεκτρικό Ρεύμα





$$\dot{q}_x = \frac{T_1 - T_2}{R_\vartheta}$$

$$R = \frac{L}{kA}$$

$$I = \frac{e_1 - e_2}{R_H}$$

Αναλογία αγωγής και ηλεκτρισμού

	Θερμότητα	Ηλεκτρισμός
Ρυθμός μεταφοράς	$\dot{q} \quad \left[\dfrac{\text{ενέργεια}}{\text{χρόνος}}\right]$	$I \quad \left[\dfrac{\text{ηλεκτρικό φορτίο}}{\text{χρόνος}}\right]$
Δυναμικό	Θερμοκρασία (T)	Ηλεκτρική τάση (e)
Αγωγιμότητα	Θερμική (k)	Ηλεκτρική (k_H)
Αντίσταση	Θερμική (R_ϑ)	Ηλεκτρική (R_H)

$$\dot{q} = \frac{T_1 - T_2}{R_\vartheta} \qquad I = \frac{e_1 - e_2}{R_H}$$

Αντιστάσεις κυλινδρικών και σφαιρικών τοιχωμάτων

Κυλινδρικό τοίχωμα

- Ρυθμός μεταφοράς

$$\dot{q}_r = \dot{q}_r'' A = \frac{k 2\pi L}{\ln(r_2/r_1)}(T_1 - T_2) = kA_{lm}\frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1}$$

$$\dot{q}_r = \frac{T_1 - T_2}{R_\vartheta}$$

- Θερμική αντίσταση

$$R_\vartheta \equiv R_{cyl} \equiv \frac{\ln(r_2/r_1)}{k 2\pi L} = \frac{r_2 - r_1}{kA_{lm}}$$

Σφαιρικό τοίχωμα

- Ρυθμός μεταφοράς

$$\dot{q}_r = \frac{4\pi k}{(1/r_1) - (1/r_2)}(T_1 - T_2) = kA_{gm}\frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1}$$

$$\dot{q}_r = \frac{T_1 - T_2}{R_\vartheta}$$

- Θερμική αντίσταση

$$R_\vartheta \equiv R_{sph} \equiv \frac{(1/r_1) - (1/r_2)}{4\pi k} = \frac{r_2 - r_1}{kA_{gm}}$$

Αντιστάσεις συναγωγής και ακτινοβολίας

Συναγωγή

- Ρυθμός μεταφοράς

$$\dot{q}_{conv} = hA(T_s - T_\infty)$$

$$\dot{q}_{conv} = \frac{T_s - T_\infty}{R_\vartheta}$$

- Θερμική αντίσταση

$$R_\vartheta \equiv R_{conv} \equiv \frac{1}{h\,A}$$

Ακτινοβολία

- Ρυθμός μεταφοράς

$$\dot{q}_{rad} = h_r A(T_s - T_{sur})$$

$$\dot{q}_{rad} = \frac{T_s - T_{sur}}{R_\vartheta}$$

- Θερμική αντίσταση

$$R_\vartheta \equiv R_{rad} \equiv \frac{1}{h_r\,A}$$

* $h_r \equiv \varepsilon\sigma\left(T_s^2 + T_{sur}^2\right)\left(T_s + T_{sur}\right)$

Σύνοψη θερμικών αντιστάσεων

	Θερμική αντίσταση $\left(R_\vartheta = \Delta T/\dot{q}\right)$
Επίπεδο τοίχωμα	$R_{wall} = \dfrac{L}{kA}$
Κυλινδρικό τοίχωμα	$R_{cyl} = \dfrac{\ln\left(r_2/r_1\right)}{k2\pi L}$ ή $R_{cyl} = \dfrac{r_2 - r_1}{kA_{lm}}$
Σφαιρικό τοίχωμα	$R_{sph} = \dfrac{\left(1/r_1\right) - \left(1/r_2\right)}{4\pi k}$ ή $R_{sph} = \dfrac{r_2 - r_1}{kA_{gm}}$
Συναγωγή	$R_{conv} = \dfrac{1}{hA}$
Ακτινοβολία	$R_{rad} = \dfrac{1}{h_r A}$

Προϋποθέσεις

- Μόνιμη κατάσταση
- Χωρίς παραγωγή
- Σταθερό k
- 1D Αγωγή θερμότητας

Παράδειγμα 1

Απώλειες θερμότητας σε χημικός αντιδραστήρας

Σύμφωνα με τις προδιαγραφές ασφαλείας, η εξωτερική θερμοκρασία του τοιχώματος ενός χημικού αντιδραστήρα δεν πρέπει να υπερβαίνει τους $T_{max} = 45°\text{C}$ για να αποφεύγονται εγκαύματα του προσωπικού.

Το επίπεδο τοίχωμα του αντιδραστήρα έχει εμβαδό $A = 5\ \text{m}^2$ και είναι από υλικό με συντελεστή θερμική αγωγιμότητας $k = 0.5\ \text{W/m}\cdot\text{K}$.

Σε λειτουργία πλήρους φορτίου από τον αντιδραστήρα παράγεται θερμότητα με ρυθμό $\dot{E}_g = 1000\ \text{W}$ και η θερμοκρασία της εσωτερικής επιφάνειας του τοιχώματος $T_1 = 200°\text{C}$.

(α) Να υπολογιστεί η θερμοκρασία τη εξωτερικής επιφάνειας του τοιχώματος (T_2) όταν το πάχος του τοιχώματος είναι $L = 0.2\ \text{m}$

(β) Να υπολογιστεί το πάχος του τοιχώματος ώστε η εξωτερική θερμοκρασία να είναι ίση με τις προδιαγραφές (T_{max}).

Παράδειγμα 1 – Λύση 1/2

Ανάλυση

Η θερμότητα που παράγεται από τον αντιδραστήρα μεταφέρεται στο περιβάλλον με αγωγή μέσα από το τοίχωμα:

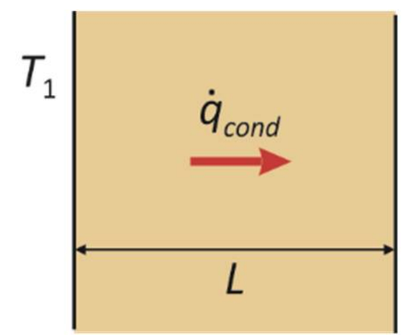
$$\dot{q}_{cond} = \dot{E}_g = 1000\,\mathrm{W}$$

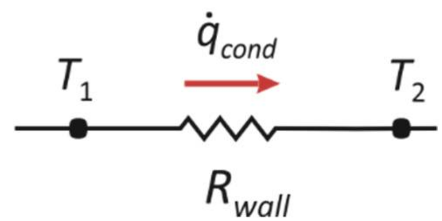
Ο ρυθμός μεταφοράς με αγωγή δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{q}_{cond} = \frac{T_1 - T_2}{R_{wall}}$$

όπου R_{wall} η θερμική αντίσταση:

$$R_{wall} = \frac{L}{k\,A}$$





Παράδειγμα **1** – Λύση 2/2

(α) Θερμοκρασία τοιχώματος (πρόβλημα ανάλυσης)

Όταν $L = 0.2$ m, η αντίσταση γίνεται:

$$R_{wall} = \frac{0.2}{0.5 \times 5} = 0.08 \frac{K}{W}$$

και η εξωτερική θερμοκρασία του τοιχώματος:

$$T_2 = T_1 - \dot{q}_{cond} R_{wall} = 200 - 1000 \times 0.08 = 120^\circ \mathrm{C}$$

πολύ μεγαλύτερη από τις προδιαγραφές $T_{max} = 45°\mathrm{C}$

(α) Πάχος τοιχώματος (πρόβλημα σχεδιασμού)

Για να γίνει η θερμοκρασία T_2 ίση με 45°C πρέπει να αυξηθεί η αντίσταση του τοιχώματος στην τιμή:

$$R_{wall} = \frac{T_1 - T_2}{\dot{q}_{cond}} = \frac{200 - 45}{1000} = 0.155 \frac{K}{W}$$

που αντιστοιχεί σε πάχος τοιχώματος:

$$L = R_{wall}\, k\, A = 0.155 \times 0.5 \times 5 = 0.388 \mathrm{m}$$