ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Να δειχτεί ότι η ακολουθία (a_n) με $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ είναι φραγμένη.

Απάντηση

Είναι $a_n > 0$, ενώ από την ανισότητα Bernoulli προκύπτει ότι $2^n > n$, δηλαδή $a_n < 1$.

Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ακολουθία (a_n) με $a_n = \left(\dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Απάντηση

Είναι

$$\left|\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right| < 1$$

όταν $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, ενώ είναι

$$\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} = 1$$

όταν $\lambda = 0$. Άρα η σειρά είναι συγκλίνουσα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να υπολογιστεί το όριο $\lim \dfrac{a^{n+1} + ab^{n+1}}{ba^n + b^n}$, όπου $0 < a < b$.

Απάντηση

Ισχύει $\lim \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$, με αποτέλεσμα

$$\lim \frac{a^{n+1} + ab^{n+1}}{ba^n + b^n} = \lim \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} + a}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + \frac{1}{b}} = ab$$

Να υπολογιστούν τα όρια: α) $\lim\left(n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b}\right)$, β) $\lim \dfrac{10^n - 5\cdot 10^{2n}}{5\cdot 10^{n+1} + 2\cdot 10^{2n-1}}$, γ) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}$, δ) $\lim\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$.

Απάντηση

α) $\lim\left(n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b}\right) = -\dfrac{a+b}{2}$

β) $\lim \dfrac{10^n - 5\cdot 10^{2n}}{5\cdot 10^{n+1} + 2\cdot 10^{2n-1}} = -25$

γ) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}} = +\infty$

δ) $\lim \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) = 0$

> Να υπολογιστούν τα όρια των ακολουθιών με όρους: α) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$, β) $b_n = \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$, γ) $c_n = \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n$, δ) $d_n = \left(\dfrac{5n-1}{5n+1}\right)^n$.

Απάντηση

α) $\lim a_n = \lim \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n = \lim \left(\dfrac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^n = \ldots = \dfrac{1}{e}$

β) $\lim b_n = \lim \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n = \lim \left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n = \ldots = 1$

γ) $\lim c_n = \lim \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n = \lim \left(\dfrac{n+2}{n+1}\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \lim \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \ldots = e^2$

δ) $\lim d_n = \lim \left(\dfrac{5n-1}{5n+1}\right)^n = \lim \left(\dfrac{5n-1}{5n}\dfrac{5n}{5n+1}\right)^n = \lim \left(\dfrac{5n-1}{5n}\right)^n \left(\dfrac{5n}{5n+1}\right)^n = \ldots = e^{-\frac{2}{5}}$

> Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (x_n) με $x_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, $a > 0$, $b > 0$.

Απάντηση

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

α) αν $a/b < 1$, τότε $\lim x_n = -1$,

β) αν $b/a < 1$, τότε $\lim x_n = 1$,

γ) αν $a = b$, τότε $\lim x_n = 0$.

> Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (a_n) με $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, όπου $0 < a \le b$.

Απάντηση

Είναι $a_n = b\sqrt[n]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n + 1}$, οπότε

$$b\sqrt[n]{1} < a_n \le b\sqrt[n]{2}$$

Τελικά είναι $\lim a_n = b$, διότι $\lim \sqrt[n]{1} = \lim \sqrt[n]{2} = 1$.

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (x_n) με $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Απάντηση

Είναι $\dfrac{1}{n^n} \leq x_n \leq \dfrac{1}{n}$. Εφόσον $\lim \dfrac{1}{n^n} = \lim \dfrac{1}{n} = 0$, είναι και $\lim x_n = 0$.

Να δειχτεί ότι η ακολουθία (a_n) με $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$ είναι συγκλίνουσα.

Απάντηση

Η ακολουθία (a_n) είναι γνησίως αύξουσα, αφού

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

Επιπλέον, είναι άνω φραγμένη από το 1 ($\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$), οπότε είναι συγκλίνουσα.

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (a_n) με $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+1}} + \dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+2}} + \ldots + \dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n}}$.

Απάντηση

Είναι

$$\frac{1}{\sqrt{1+1/n^5}} \leq a_n \leq 1$$

διότι $a_n \geq \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}} + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}} + \ldots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^5}}$ και $a_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^6}} + \frac{n^2}{\sqrt{n^6}} + \ldots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6}} = 1$. Άρα $\lim a_n = 1$, αφού $\lim \dfrac{1}{\sqrt{1+1/n^5}} = \lim 1 = 1$.

Να ελεγχθεί η σύγκλιση της ακολουθίας (a_n) με $a_n = \dfrac{1}{2+1} + \dfrac{1}{2^2+2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n+n}$.

Απάντηση

Είναι

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^{n+1}+n+1} > a_n$$

οπότε η (a_n) είναι αύξουσα. Επιπλέον, είναι άνω φραγμένη, αφού

$$a_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$

Άρα η ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Να δειχτεί ότι η ακολουθία (a_n) με $a_n = \dfrac{n+5}{3^n}$ είναι συγκλίνουσα.

Απάντηση

Η ακολουθία (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη (από το 0), οπότε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

> Να δειχτεί ότι η ακολουθία (a_n) με $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$ είναι συγκλίνουσα και να βρεθεί το όριό της.

Απάντηση

Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι $a_{n+1} > a_n$ (δηλαδή η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα) και $a_n < 6$ (δηλαδή η ακολουθία είναι και άνω φραγμένη), οπότε η (a_n) είναι συγκλίνουσα. Αν $L = \lim a_n = \lim a_{n+1}$, τότε

$$L = \frac{1}{2}(L + 6)$$

οπότε $L = 6$.

> Να δειχτεί ότι η ακολουθία (a_n), όπου $a_1 = \sqrt{6}$, $a_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}}$, $a_3 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}, \ldots$ είναι συγκλίνουσα και να υπολογιστεί το όριό της.

Απάντηση

Αποδεικνύουμε επαγωγικά ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει α) $a_{n+1} > a_n$ (δηλ. η (a_n) είναι αύξουσα) και β) $a_n < 3$ (δηλ. η (a_n) είναι άνω φραγμένη). Άρα η a_n είναι συγκλίνουσα. Επιπλέον, αν $L = \lim a_n = \lim a_{n+1}$, τότε $L = \sqrt{6+L}$, ή $L = 3, -2$, με αποτέλεσμα $\lim a_n = 3$.

> Να δειχτεί ότι η ακολουθία (a_n) με όρους $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$ είναι συγκλίνουσα και να βρεθεί το όριό της.

Απάντηση

Η ακολουθία περιγράφεται από τον αναδρομικό τύπο $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα (δηλαδή $a_{n+1} > a_n$) και άνω φραγμένη από το 2 (δηλαδή $a_n < 2$), οπότε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. Αν $L = \lim a_n = \lim a_{n+1}$, τότε θα ισχύει

$$L = \sqrt{2L}$$

οπότε $L = 0$ ή $L = 2$, με τη δεύτερη να είναι η δεκτή τιμή.