

Απειροστικός Λογισμός II - Εαρινό 2025

Ακολουθίες Συναρτήσεων - Ασκήσεις

Άσκηση 1

Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση τις ακολουθίες:

$$(i) \quad f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(iii) \quad f_n(x) = nx(1-x^2)^n, \quad x \in [0, 1],$$

$$(iv) \quad f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n, \quad x \in [0, 1],$$

$$(v) \quad f_n(x) = \frac{1}{nx+1}, \quad x \in (0, 1),$$

$$(vi) \quad f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1}, \quad x \in (0, 1),$$

$$(vii) \quad f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(viii) \quad f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(ix) \quad f_n(x) = \cos \frac{n\pi}{1+x^2}, \quad x \in [-1, 1],$$

$$(x) \quad f_n(x) = (1+x^2)e^{x/n}, \quad x \in [0, 1].$$

Άσκηση 2

Δείξτε ότι η $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα αν και μόνο αν:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{τέτοιος ώστε} \quad \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Άσκηση 3

Έστω $f \in C([0, 1])$. Δείξτε ότι:

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 ne^{-nx} f(x) \, dx \quad \text{και} \quad f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx^n f(x) \, dx.$$

[Υπόδειξη: π.χ. για το πρώτο, παρατηρείστε αρχικά ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 ne^{-nx} f(0) \, dx = f(0)$, άρα αρκεί να δείξει κανείς ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 ne^{-nx} (f(x) - f(0)) \, dx = 0$.]