

Απειροστικός Λογισμός II - Εαρινό 2025

Σειρές Συναρτήσεων - Ασκήσεις

Άσκηση 1

Δίνεται η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon} x^2}$, όπου ϵ είναι θετική σταθερή.

- (i) Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (ii) Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[c, \infty)$ για κάθε $c > 0$.

Άσκηση 2

Να γράψετε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε μορφή δυναμοσειράς (σε κατάλληλο υποδιάστημα του πεδίου όρισμού τους):

- (i) $f(x) = \frac{x}{1+3x^2}$,
- (ii) $f(x) = \arctan x$.

Άσκηση 3

Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^2 x^n$ στο διάστημα $[0, 1]$.

Άσκηση 4

Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ στο διάστημα $[0, c]$ για κάθε $c > 0$.