

ΘΕΜΑ 1

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann, αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες

(i) $f(x) = x, x \in [0, 1]$.

(ii) $g(x) = \sin x, x \in [0, \pi/2]$.

ΘΕΜΑ 2

(i) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Θέτουμε

$$F(x) = \int_a^x f, \quad x \in [a, b].$$

Δείξτε ότι η F είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ii) Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με φραγμένη παράγωγο στο I . Δείξτε ότι υπάρχει θετική σταθερά C , τέτοια ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad \forall x, y \in I.$$

ΘΕΜΑ 3

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^\pi e^{2x} \sin x \, dx,$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \tan x \, dx,$ (iii) $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2} \, dx,$

(iv) $\int_0^\infty x^2 e^{-x} \, dx,$ (v) $\int_0^1 \arctan x \, dx,$ (vi) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx.$

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ