

## Απειροστικός Λογισμός II - Εαρινό 2025

### Ολοκλήρωμα *Riemann* - Ασκήσεις

#### Άσκηση 1

Υπολογίστε τα :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx, & (ii) \quad & \int_0^1 x(1-x)^{2025} dx, \\ (iii) \quad & \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx, & (iv) \quad & \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx. \end{aligned}$$

#### Άσκηση 2

- (i) Έστω  $f \in C([0, 1])$  με  $f \geq 0$  και  $\int_0^1 f = 0$ . Δείξτε ότι  $f = 0$  στο  $[0, 1]$ .
- (ii) Έστω  $g \in C([0, 1])$  και  $\int_0^1 gh = 0$  για κάθε  $h \in C([0, 1])$ . Δείξτε ότι  $g = 0$  στο  $[0, 1]$ .

#### Άσκηση 3

- (i) Έστω  $f \in C([0, 1])$  με

$$\frac{1}{x} \int_0^x f = \frac{1}{\ln(1/x)} \quad \forall x \in (0, 1).$$

Να βρείτε τα  $f(0)$  και  $\lim_{x \uparrow 1} f(x)$ .

- (ii) Έστω  $g \in C([0, 1])$  με

$$\frac{1}{x^2 - x} \int_x^{x^2} g = e^x - 1 \quad \forall x \in (0, 1).$$

Να βρείτε τα  $g(0)$  και  $g(1)$ .

#### Άσκηση 4

Να δειχτεί ότι:

$$(i) \int_0^1 (\ln x)^n dx = (-1)^n n!$$

$$(ii) \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \begin{cases} 1 & \text{αν } n : \text{ περιττός} \\ \pi/2 & \text{αν } n : \text{ άρτιος} \end{cases}, \text{ όπου}$$

με το συμβολισμό “ $k!!$ ” για κάποιο  $k \in \mathbb{N}$ , εννοούμε το γινόμενο όλων των άρτιων μέχρι και το  $k$  αν ο  $k$  είναι άρτιος ή το γινόμενο όλων των περιττών μέχρι και το  $k$  αν ο  $k$  είναι περιττός.

#### Άσκηση 5

Έστω  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$(1) f(0) = 0, f(t) > 0 \text{ για } t > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty.$$

$$(2) \text{Είναι αύξουσα, δηλ. } s > t \geq 0 \Rightarrow f(s) \geq f(t).$$

$$(3) \text{Είναι δεξιά συνεχής στο } [0, \infty), \text{ δηλ. } \lim_{s \rightarrow t+} f(s) = f(t) \forall t \in [0, \infty).$$

Ορίζουμε την  $F(t) := \int_0^t f, t \in [0, \infty)$ . Δείξτε ότι

$$(P1) \text{ Η } F \text{ είναι συνεχής στο } [0, \infty).$$

$$(P2) \text{ Η } F \text{ είναι γνησίως αύξουσα, δηλ. } s > t \geq 0 \Rightarrow F(s) > F(t).$$

$$(P3) \text{ Η } F \text{ είναι κυρτή, δηλ. } s, t \geq 0, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow$$

$$F(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda F(s) + (1 - \lambda)F(t).$$

$$(P4) \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F(t)}{t} = 0, \text{ και } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{t} = \infty.$$

$$(P5) s > t > 0 \Rightarrow \frac{F(s)}{s} > \frac{F(t)}{t}.$$

#### Άσκηση 6

Να δειχτεί ότι:

$$(i) \int_0^e (1 - \ln x)^{-p} dx = e\Gamma(1 - p), \text{ όπου } p < 1.$$

$$(ii) \int_0^\infty x^{-p/2} e^{-r^2/(4x)} dx = (2/r)^{p-2} \Gamma(p/2 - 1), \text{ όπου } p > 2 \text{ και } r > 0.$$

### Άσκηση 7

Υποθέτουμε ότι για την  $f \in C^1([\alpha, \beta])$  είναι  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$  και

$$\int_{\alpha}^{\beta} f^2 = 1.$$

Αποδείξτε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} x f(x) f'(x) = -\frac{1}{2},$$

και ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f'(x))^2 dx \int_{\alpha}^{\beta} x^2 (f(x))^2 dx > \frac{1}{4}.$$

### Άσκηση 8

Να υπολογίσετε τα :

$$(i) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\tan x)}{\sin(2x)} dx,$$

$$(ii) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx,$$

$$(iii) \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx.$$

### Άσκηση 9

Έστω  $f \in C(\mathbb{R})$ . Δείξτε ότι :

$$\int_0^x \left( \int_0^t f \right) dt = \int_0^x (x-t)f(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

### Άσκηση 10

Βρείτε την  $(f^{-1})'(0)$  αν :

$$(i) f(x) = \int_0^x (1 + \sin(\sin t)) dt,$$

$$(ii) f(x) = \int_1^x \sin(\sin t) dt.$$