

Παν. Δυτ. Μακεδονίας - Τμ. Μαθηματικών
Εξεταζόμενο Μάθημα: Απειροστικός Λογισμός Ι (ΜΥ 11)
Εξεταστής: Γ. Ψαραδάκης

22/01/2025

ΘΕΜΑ 1

- (i) Αποδείξτε ότι $e^{1/n} \rightarrow 1$.
- (ii) Δείξτε ότι $(1 + 2^2 + \dots + n^2)^{1/n} \rightarrow 1$ (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αν θέλετε το γεγονός ότι $n^{1/n} \rightarrow 1$).
- (iii) Υπάρχει το $\lim \left(\frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{2} \right)^n$;

ΘΕΜΑ 2

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{(\ln 2)^n}$,
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,
- (iii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

ΘΕΜΑ 3

- (i) Δείξτε ότι αν $a_n \rightarrow a$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$.
- (ii) Παίρνοντας $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ στο (i), δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ συγκλίνει υπό συνθήκη στο 1.

ΘΕΜΑ 4

Έστω $p > 1$.

- (i) Αποδείξτε ότι $\left(\frac{x+y}{2}\right)^p \leq \frac{x^p+y^p}{2}$ για κάθε $x, y > 0$.
- (ii) Να μελετήσετε και στη συνέχεια να χαράξετε την $f(x) = (1 - \ln x)^{-p}$, $x \in (0, e)$.

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^{-1} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (i) Για ποιές τιμές του α είναι η f παραγωγίσιμη;
- (ii) Για ποιές τιμές του α είναι η f' συνεχής;
- (iii) Πάρτε $\alpha = 1$. Είναι η f ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$; Στο \mathbb{R} ;

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ