

Παν. Δυτ. Μακεδονίας - Τμ. Μαθηματικών  
Επαναληπτική Εξέταση: Απειροστικός Λογισμός Ι (ΜΥ 11)  
Εξεταστής: Γ. Ψαραδάκης

17/03/2025

**ΘΕΜΑ 1**

(2/10)

(i) Έστω  $\{a_n \geq 0\}_{n \in \mathbb{N}}$  φραγμένη. Αποδείξτε ότι  $(1 + a_n)^{1/n} \rightarrow 1$ .

(ii) Δείξτε ότι  $(n!)^{1/n^2} \rightarrow 1$  (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αν θέλετε το γεγονός ότι  $n^{1/n} \rightarrow 1$ ).

**ΘΕΜΑ 2**

(3/10)

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ,

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\theta n)^n}{n!}$ ,  $\theta > 0$ ,

(iii)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ .

**ΘΕΜΑ 3**

(2/10)

(A) Έστω  $0 < \alpha < 1 < p$  και  $\alpha + \beta = 1$ . Αποδείξτε ότι

$$\alpha x^p + \beta \geq x \quad \forall x \geq 0 \quad \iff \quad \alpha = \frac{1}{p}.$$

(B) Να αποδείξετε ότι:

(i)  $0 < p < 1 \implies (x + y)^p \leq x^p + y^p \quad \forall x, y \geq 0$ ,

(ii)  $p > 1 \implies (x + y)^p \geq x^p + y^p \quad \forall x, y \geq 0$ .

**ΘΕΜΑ 4**

(2/10)

Δίνεται η  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

(i) Είναι η  $f$  παραγωγίσιμη;

(ii) Είναι η  $f'$  συνεχής;

**ΘΕΜΑ 5**

(1/10)

Είναι η συνάρτηση  $f(x) = \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{-2025}$ ,  $x \in (0, 1)$ , ομοιόμορφα συνεχής; Η  $f(x) = \left(\ln \frac{e}{x}\right)^{-2025}$ ,  $x \in (0, 1)$ ;

**ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ**