Θεωρία Τελεστών - Εαρινό 2024

Διδάσκων: Γ. Ψαραδάκης, Γραφείο 118 EMAIL: *gpsaradakis@uowm.gr*

Πρόγραμμα: Τρίτη (Β5) και Πέμπτη (Β12), 16:00-18:00

Σύγγραμμα: Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών - Α. Κατάβολος

Διάρκεια μαθημάτων: 13 εβδομάδες (19 Φεβρουαρίου - 26 Απριλίου και 13 Μαΐου - 31 Μαΐου)

Ημερολόγιο Μαθήματος

ΤΡΙΤΗ 20/02

Προπαρασκευαστικό υλικό: απεικονίσεις (αντίστροφη εικόνα, ένα προς ένα, επί, περιορισμός, επέκταση), $\inf/\sup$ και ο μεταβολικός ορισμός τους. $\mathbb{K}$-διανυσματικοί χώροι ($\mathbb{K}$-δ.χ.), όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

ΜΕΡΟΣ Ι: Χώροι Hilbert.

§1.1. $\mathbb{K}$-δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο (ε.γ.). Απόδειξη ανισότητας Cauchy-Schwarz (αν. CS).

ΤΕΤΑΡΤΗ 21/02

Δώσαμε την λίγο πιό απλή απόδειξη της αν. CS στην περίπτωση $\mathbb{R}$-δ.χ. και τονίσαμε τη διαφορές όταν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Η περίπτωση της ισότητας στην αν. CS. Παραδείγματα δ.χ. με ε.γ. ($\mathbb{R}^3$, θετικά ορισμένοι πίνακες A και το ε.γ. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \vec{x}A(\vec{y})^t$ στον $\mathbb{R}^3$ και γενικότερα στον $\mathbb{R}^d$ με $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}^d$, c_{oo}, ℓ_2, $C([a, b]; \mathbb{C})$) και η μορφή της αν. CS σε καθένα απ' αυτά.

ΤΡΙΤΗ 27/02

$\mathbb{K}$-δ.χ. με νόρμα. Επαγόμενη νόρμα σε $\mathbb{K}$-δ.χ. με ε.γ. - απόδειξη. Ορισμός συνέχειας συνάρτησης μεταξύ μετρικών χώρων (μ.χ.)[1]. Ορισμός ακολουθιακής συνέχειας συνάρτησης μεταξύ μ.χ.[2]. Η απόδειξη της ισοδυναμίας των δυο ορισμών[3].

---

[1] Η $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ θα λέγεται συνεχής στο $x_0 \in X$ όταν $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta(= \delta(\epsilon)) > 0$ τ.ώ. $d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

[2] Η $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ θα λέγεται ακολουθιακά συνεχής στο $x_0 \in X$ όταν $\forall\, \{x_n \in X\}_{n\in\mathbb{N}}$, με $x_n \xrightarrow{d_X} x_0$ καθώς $n \to \infty$, έχουμε $f(x_n) \xrightarrow{d_Y} f(x_0)$ καθώς $n \to \infty$.

[3] Αν μια $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ είναι ακολουθιακά συνεχής στο $x_0 \in X$ αλλά δεν είναι συνεχής σε αυτό, τότε

$$\exists\, \epsilon > 0 \text{ τ.ώ. } \forall\, \delta > 0,\ \ \exists\, x_\delta \in X \text{ με } d_X(x, x_0) < \delta \text{ αλλά } d_Y(f(x), f(x_0)) \geq \epsilon.$$

Για $\delta = 1/n,\ n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε μια ακολουθία $\{x_n \in X\}_{n\in\mathbb{N}}$ τ.ώ. $d_X(x_n, x_0) < 1/n$ αλλά $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon$. Δηλαδή $x_n \xrightarrow{d_X} x_0$ καθώς $n \to \infty$, αλλά $f(x_n) \overset{d_Y}{\nrightarrow} f(x_0)$ καθώς $n \to \infty$. Άτοπο. Αντιστρόφως, έστω η $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ αλλά δεν είναι ακολουθιακά συνεχής σε αυτό. Δοθέντος $\epsilon > 0$,

$$\exists\, \delta(= \delta(\epsilon)) > 0 \text{ τ.ώ. } d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon. \quad (*)$$

Αν $\{x_n \in X\}_{n\in\mathbb{N}}$, με $x_n \xrightarrow{d_X} x_0$ καθώς $n \to \infty$, τότε $\exists\, N(= N(\delta) = N(\delta(\epsilon))) \in \mathbb{N}$ τ.ώ. $d_X(x_n, x_0) < \delta$ $\forall\, n \geq N$. Από την $(*)$ πέρνουμε $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon\, \forall\, n \geq N$, δηλαδή $f(x_n) \xrightarrow{d_Y} f(x_0)$ καθώς $n \to \infty$. ■

ΤΡΙΤΗ 05/03

$\S 1.2$. Ορθοκανονικές οικογένειες σε ένα $\mathbb{K}$-δ.χ. με ε.γ..

Ορισμός. Αν E είναι $\mathbb{K}$-δ.χ., ένα $F \subseteq E$ θα λέγεται υπόχωρος του E όταν για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και για κάθε $x, y \in F$, έχουμε $\lambda x + \mu y \in F$ (έπεται ότι το F είναι γραμμικός χώρος (με τις ίδιες πράξεις)).

Ορισμός. Έστω F είναι $\mathbb{K}$-δ.χ. και $n \in \mathbb{N}$. Ο F θα λέγεται n-διάσταστος όταν
(i) περιέχει n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία, και
(ii) οποιαδήποτε $n + k$, $k \in \mathbb{N}$, στοιχεία του είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξαμε ότι αν E είναι $\mathbb{K}$-δ.χ. με ε.γ. και F είναι ένας n-διάσταστος υπόχωρος του E, τότε για κάθε $x \in F$ έχουμε τις αναπαραστάσεις[4]

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \quad \text{και} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2},$$

όπου $\{e_1, ..., e_n \in F\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του F (η οποία κατασκευάζεται από τη βάση του F μέσω της διαδικασίας Gram-Schmidt).

ΤΕΤΑΡΤΗ 06/03

Αποδείξαμε το Λήμμα 1.2.4 (κάθε στοιχείο ενός $\mathbb{K}$-δ.χ. με ε.γ. E, έχει μοναδική προβολή σε κάθε n-διάστατο υπόχωρο), και τις Προτάσεις 1.2.6, 1.2.7.

ΤΡΙΤΗ 12/03

$\S 1.3$. Χώροι Hilbert. Παραδείγματα. Κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\dim(E) < \infty$ είναι χώρος Hilbert. Για την απόδειξη, χρειαστήκαμε το γεγονός ότι σε δ.χ. πεπερασμένης διάστασης, όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες, το οποίο και αποδείξαμε.

ΤΕΤΑΡΤΗ 13/03

Παραδείγματα χώρων Hilbert. Αποδείξαμε ότι ο $\ell_2(\mathbb{K})$ είναι χώρος Hilbert και ότι ο $c_{oo}(\mathbb{K})$ είναι πυκνός υπόχωρός του.

ΤΡΙΤΗ 19/03

$\S 1.4$. Η πλήρωση χώρου με ε.γ.. $\S 1.5$. Ορθογώνιες διασπάσεις. Αποδείξαμε τις Προτάσεις 1.5.1 (πλησιέστερο διάνυσμα) και 1.5.2 (κάθετα διανύσματα σε κλειστό υπόχωρο χώρου Hilbert).

ΤΕΤΑΡΤΗ 20/03

Αποδείξαμε τα Πορίσματα 1.5.3 (ύπαρξη καθέτου διανύσματος) και 1.5.4 (για ένα γραμμικό υπόχωρο F ενός χώρου Hilbert H έχουμε: $\overline{F} = H \Leftrightarrow F^\perp = \{O_H\}$, όπου $F^\perp$ είναι ο κάθετος υπόχωρος του F). Αποδείξαμε ότι ο $F^\perp$ είναι πάντα κλειστός. Αποδείξαμε το Θεώρημα 1.5.6 (ορθογώνια διάσπαση) και το Πόρισμα 1.5.7 (ορθή προβολή).

[4] όπως όταν $F = \mathbb{R}^d$ και $E = \mathbb{R}^n$ με $d \geq n$

ΤΡΙΤΗ 26/03

Ορισμός του δυϊκού χώρου E^* για έναν δ.χ. με νόρμα E. Το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz για χώρους Hilbert:

$$\forall\, f \in H^*,\ \exists!\, x_f \in H \text{ τέτοιο ώστε } f(y) = \langle y, x_f \rangle \quad \forall\, y \in H.$$

Επιπλέον, $\sup_{\|x\|_H \leq 1} |f(x)| =: \|f\| = \|x_f\|$.

ΤΕΤΑΡΤΗ 27/03

Συζητήσαμε το περιεχόμενο των §1.7 και §1.8 (χωρίς αναλυτικές αποδείξεις).

ΤΡΙΤΗ 02/04

ΜΕΡΟΣ II: Φραγμένοι Γραμμικοί Τελεστές

§2.1. Αποδείξαμε το Θεώρημα 2.1.1 (ισοδύναμες συνθήκες για να είναι μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ χώρων με νόρμα φραγμένη). Αποδείξαμε την Πρόταση 2.1.2 (ισοδύναμοι ορισμοί νόρμας τελεστή). Αποδείξαμε την Πρόταση 2.1.4 (επέκταση φραγμένου γραμμικού τελεστή ορισμένου σε πυκνό υπόχωρο ενός χώρου με νόρμα).

ΤΕΤΑΡΤΗ 03/04

§2.2. Χώροι τελεστών. Αποδείξαμε την Πρόταση 2.2.2: αν $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ είναι $\mathbb{K}$-δ.χ. με νόρμα, τότε ο χώρος $(\mathcal{B}(E;F), \|\cdot\|)$ είναι $\mathbb{K}$-δ.χ. με νόρμα, και είναι πλήρης αν ο F είναι πλήρης (άρα ο δυϊκός $E^* = \mathcal{B}(E;\mathbb{K})$ ενός $\mathbb{K}$-δ.χ. με νόρμα E, είναι πάντα πλήρης). Σύνθεση φραγμένων γραμμικών τελεστών.

ΤΡΙΤΗ 09/04

§2.3. Sesquilinear μορφές (συμβ. $(H_1 \times H_2)^*$) και ο συζυγής τελεστής. Αποδείξαμε το θεώρημα αναπαράστασης για φραγμένες sesquilinear μορφές (Θεώρημα 2.3.1):

$$\forall\, \varphi \in (H_1 \times H_2)^*,\ \exists!\, T_\varphi \in \mathcal{B}(H_1, H_2) \text{ τ.ώ. } \varphi(x,y) = \langle T_\varphi(x), y \rangle_{H_2} \quad \forall\, (x,y) \in H_1 \times H_2.$$

Επιπλέον,

$$\sup_{\|x\|_1, \|y\|_2 \leq 1} |\langle T_\varphi(x), y \rangle_{H_2}| =: \|T_\varphi\| = \|\varphi\| := \sup_{\|x\|_1, \|y\|_2 \leq 1} |\varphi(x,y)|.$$

ΤΕΤΑΡΤΗ 10/04

Αποδείξαμε τις προτάσεις 2.3.3 και 2.3.4.

ΤΡΙΤΗ 16/04

§2.3.1 Ο συζυγής ενός τελεστή (Θεώρημα 2.3.5):

$$\forall T \in \mathcal{B}(H_1, H_2),\ \exists!\, T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1) \text{ τ.ώ. } \langle T^*(x_2), x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T(x_1) \rangle_{H_2} \quad \forall x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ιδιότητες του συζυγή τελεστή - Πρόταση 2.3.7.

ΤΕΤΑΡΤΗ 17/04

§2.4 Ειδικές κατηγορίες τελεστών σε ένα χώρο Hilbert και οι σχέσεις μεταξύ τους. Πρόταση 2.4.4 και 2.4.5.

ΤΡΙΤΗ 23/04[5]

ΜΕΡΟΣ III: Αντιστρέψιμοι Τελεστές - Φάσμα Τελεστή

Έστω X είναι $\mathbb{K}$-δ.χ. με ε.γ. και $\emptyset \neq S \subseteq X$. Ξαναείδαμε τον ορισμό του ορθογωνίου συμπληρώματος του S:

$$S^{\perp} := \{x \in X \mid \langle x, s\rangle = 0 \quad \forall\, s \in S\}.$$

Αποδείξαμε απλές ιδιότητές του:

(i) ο $S^{\perp}$ είναι κλειστός υπόσωρος του X,

(ii) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$,

(iii) $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$,

(iv) $S^{\perp} = ((S^{\perp})^{\perp})^{\perp}$,

(v) $\bar{S} = X \Rightarrow S^{\perp} = \{0_X\}$.

Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε αποδείξει ότι ισχύει και το αντίστροφο στην (v), στην περίπτωση όπου X είναι χώρος Hilbert και το S είναι υπόχωρός του (βλ. Πόρισμα 1.5.4-Τετάρτη 20/03). Επίσης έχουμε αποδείξει ότι αν M είναι ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε $H = M \oplus M^{\perp}$ (βλ. Θεώρημα 1.5.6-Τετάρτη 20/03). Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, αποδείξαμε ότι έχουμε ισότητα στην (iii) στην περίπτωση όπου X είναι χώρος Hilbert και το S είναι κλειστός υπόχωρός του.

ΤΕΤΑΡΤΗ 24/04

Έστω X είναι $\mathbb{K}$-δ.χ. με ε.γ. και $\emptyset \neq S \subseteq X$. Αποδείξαμε ότι ο $(S^{\perp})^{\perp}$ είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του X που περιέχει το S. Σχέσεις μεταξύ του πυρήνα και της εικόνας ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή και του συζυγή του. Αποδείξαμε ότι για έναν αυτοσυζυγή τελεστή T, έχουμε $H = Ker(T) \oplus \overline{Im(T)}$.

ΚΑΛΟ ΠΑΣΧΑ!

[5]από αυτό το σημείο και μέχρι το τέλος του εξαμήνου, θα ακολουθούμε σημειώσεις μου