Αριστείδης Κατάβολος

Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών

Εκδόσεις Συμμετρία

~ Αθήνα, έκδοση 2008 ~

Πρόλογος

Οι σελίδες που ακολουθούν αποτελούν μια στοιχειώδη εισαγωγή στην Θεωρία Τελεστών σε χώρους Banach και (κυρίως) Hilbert.

Οι χώροι Hilbert αποτελούν το πρώτο βήμα γενίκευσης, σε άπειρες διαστάσεις, των Ευκλείδειων χώρων. Έτσι, επιτρέπουν την χρήση ιδεών και μεθόδων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας για την ανάλυση χώρων συναρτήσεων. Από την άλλη μεριά, η δομή του χώρου των τελεστών σε ένα χώρο Hilbert είναι πολύ πλουσιώτερη σε σύγκριση με άλλους χώρους της Συναρτησιακής Ανάλυσης· επιτυγχάνεται έτσι κατάλληλη γενίκευση αποτελεσμάτων της Γραμμικής Άλγεβρας (διαγωνοποίηση πινάκων), η οποία γενίκευση έχει απολύτως κεντρικό ρόλο στην Ανάλυση και τις εφαρμογές της.

Η θεωρία των χώρων Hilbert απαιτεί πολύ λίγα θεωρητικά εφόδια για την κατανόησή της. Στο σύγγραμμα αυτό έγινε προσπάθεια να μειωθούν στο ελάχιστο οι προαπαιτούμενες γνώσεις: με εξαίρεση το τελευταίο Κεφάλαιο, δεν χρειάζεται παρά μια καλή κατανόηση των βασικών εννοιών της Γραμμικής Άλγεβρας, του Απειροστικού Λογισμού και της Πραγματικής Ανάλυσης (στοιχειώδης θεωρία μετρικών χώρων). Ειδικότερα, για τα τέσσερα πρώτα Κεφάλαια δεν προϋποτίθενται γνώσεις από τη Θεωρία χώρων Banach, ούτε από την Θεωρία Μέτρου. Οι έννοιες που χρησιμοποιούνται περιγράφονται συνοπτικά σε ένα Παράρτημα.

Σε κάθε εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών είναι απαραίτητη, πιστεύουμε, η αναφορά στον χώρο L^2. *Είναι όμως αρκετό για τις ανάγκες μιάς πρώτης* *παρουσίασης των βασικών εννοιών να ορισθεί ο χώρος* $L^2([a, b])$ *ως η πλήρωση του χώρου των συνεχών συναρτήσεων ως προς την νόρμα* $\|\cdot\|_2$. *Η λύση αυτή υιοθετήθηκε για τα πέντε πρώτα κεφάλαια.*

Στο Πρώτο Κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά η γεωμετρία των χώρων Hilbert. Μία παράγραφος (που δεν είναι απαραίτητη για την συνέχεια) είναι αφιερωμένη στο κλασσικό προσεγγιστικό Θεώρημα του Féjer.

Το Δεύτερο Κεφάλαιο ασχολείται με τις γενικές ιδιότητες των τελεστών σε έναν χώρο Hilbert και περιγράφει τις διάφορες κατηγορίες τελεστών (φυσιολογικοί, αυτοσυζυγείς, θετικοί κ.λπ.) με ιδιαίτερη έμφαση στις ιδιότητες των προβολών.

Στο Τρίτο Κεφάλαιο εισάγονται οι συμπαγείς τελεστές και οι υποκατηγορίες τους (τελεστές πεπερασμένης τάξης, ολοκληρωτικοί τελεστές, τελεστές Hilbert Schmidt). Εδώ παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες του χώρου των συμπαγών τελεστών.

Το Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς τελεστές παρουσιάζεται, στις διάφορες μορφές του, στο Τέταρτο Κεφάλαιο, ξεκινώντας από χώρους πεπερασμένης διάστασης. Για λόγους διδακτικής απλότητας δεν εισάγεται σε αυτό το στάδιο η έννοια του φάσματος τελεστή.

Το Πέμπτο Κεφάλαιο ασχολείται με συμπαγείς τελεστές σε χώρους Banach. Παρουσιάζεται αφενός η φασματική θεωρία των Riesz και Schauder και αφετέρου το κομψό Θεώρημα του Lomonosov για την ύπαρξη υπερ-αναλλοίωτων υποχώρων.

Το Έκτο και τελευταίο Κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην παρουσίαση του Φασματικού Θεωρήματος για αυτοσυζυγείς (φραγμένους, αλλά όχι αναγκαστικά συμπαγείς) τελεστές. Ένα σύγγραμμα Θεωρίας Τελεστών θα ήταν ελλειπές χωρίς αυτό το Θεώρημα. Εδώ όμως δεν μπορεί πια να αποφευχθεί η χρήση τουλάχιστον των βασικών ιδεών της Θεωρίας Μέτρου. Επίσης είναι αναγκαία η εισαγωγή και μελέτη της γενικής έννοιας του φάσματος τελεστή. Η παρουσίαση είναι κλασσική και δεν προϋποθέτει την Θεωρία Gelfand.

Τα τέσσερα πρώτα κεφάλαια καλύπτουν την ύλη ενός εξαμηνιαίου προπτυχιακού μαθήματος. Ανάλογα με τα ενδιαφέροντα και τις γνώσεις του ακροατηρίου, ο διδάσκων μπορεί να καλύψει και το Πέμπτο Κεφάλαιο, παραλείποντας εν ανάγκη ορισμένες από τις παραγράφους 1.9, 2.4.1 και 3.4. Μια άλλη επιλογή, αν το ακροατήριο έχει κάποιες γνώσεις Θεωρίας Μέτρου, είναι να διδαχθεί απευθείας το Έκτο Κεφάλαιο, παραλείποντας εν ανάγκη τα Κεφάλαια Τέσσερα και Πέντε.

Το σύγγραμμα αυτό στηρίχθηκε στις παραδόσεις του γράφοντος επί πολλά χρόνια στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών. Θέλω πρώτα-πρώτα να ευχαριστήσω τους φοιτητές για την βοήθεια και την κατανόησή τους. Ευχαριστώ θερμά τους συναδέλφους και φίλους που με βοήθησαν στην εκπόνηση του συγγράμματος αυτού, και ιδιαίτερα τους Μιχάλη Ανούση και Μιχάλη Λάμπρου. Επίσης καθοριστική υπήρξε η βοήθεια των Γιώργου Ελευθεράκη και Ιβάν Τοντορώφ, που διάβασαν όλο το χειρόγραφο και με γλύτωσαν από πολλές κακοτοπιές. Οι παρατηρήσεις του Θάνου Τσουάνα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμες. Χρωστάω ευγνωμοσύνη στο Αντώνη Τσολομύτη για την πολλαπλή του βοήθεια. Είναι αυτονόητο ότι έχω την πλήρη ευθύνη για τα λάθη και τις παραλείψεις, που είμαι σίγουρος ότι θα εξακολουθούν να υπάρχουν στο κείμενο, παρά τις προσπάθειές μου.

Last but certainly not least, it is a particular pleasure for me to acknowledge my indebtedness to my teacher and friend John Erdos, who first taught me what a Hilbert space is.

Αθήνα, Νοέμβριος 2005

Αριστείδης Κατάβολος

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Χώροι Hilbert

1.1 Εσωτερικά γινόμενα

Το εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο $\langle x, y\rangle$ δύο διανυσμάτων x και y του $\mathbb{R}^3$, που ορίζεται από την σχέση $\langle x, y\rangle = \|x\|_2\|y\|_2 \cos\vartheta$, όπου $\|x\|_2$ το (Ευκλείδειο) μήκος του x και ϑ η γωνία των δύο διανυσμάτων, μπορεί να υπολογισθεί από την σχέση

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε λοιπόν τον ορισμό αυτό σε κάθε $\mathbb{R}^N$ θέτοντας

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k.$$

Παρατηρούμε ότι η Ευκλείδεια νόρμα $\|x\|_2$ ενός διανύσματος $x \in \mathbb{R}^N$ είναι η τετραγωνική ρίζα της *μη αρνητικής* ποσότητας $\langle x, x\rangle$. Στον χώρο $\mathbb{C}^N$ όμως η ποσότητα $\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ δεν είναι κατ'ανάγκη μη αρνητική (βάλε π.χ. $x_k = i$) και επομένως η τετραγωνική της ρίζα δεν ορίζει νόρμα. Γι' αυτό ορίζουμε

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k \bar{y}_k$$

όταν $x, y \in \mathbb{C}^N$, και τότε πράγματι έχουμε $\langle x, x\rangle = \|x\|_2^2$.

Ορισμός 1.1.1 *Έστω E $\mathbb{K}$-γραμμικός*[1] *χώρος. Ένα* **εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product)** *στον E είναι μια απεικόνιση*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &(i) && \langle x, x\rangle \geq 0 \\ &(ii) && \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0 \\ &(iii) && \overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle \\ &(iv) && \langle x_1 + \lambda x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \lambda\langle x_2, y\rangle \end{aligned}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Παρατήρηση 1.1.1 *Από τις (iii) και (iv) προκύπτει ότι*

$$(iv)' \quad \langle x, y_1 + \lambda y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \overline{\lambda}\langle x, y_2\rangle$$

για κάθε $x, y_1, y_2 \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Παραδείγματα

(i) Το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον πραγματικό N-διάστατο χώρο $\mathbb{R}^N$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k.$$

(ii) Το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον μιγαδικό N-διάστατο χώρο $\mathbb{C}^N$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k \overline{y}_k.$$

(iii) Συμβολίζουμε με c_{oo} τον (μιγαδικό) γραμμικό χώρο των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα, δηλαδή τον χώρο των συναρτήσεων $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ των οποίων

[1] Στις σημειώσεις αυτές, με το σύμβολο $\mathbb{K}$ θα εννοούμε είτε το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών είτε το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

ο **φορέας (support)** $\mathrm{supp}(x) \equiv \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Η παράσταση

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον c_{oo} (δεν υπάρχει πρόβλημα σύγκλισης, γιατί το πλήθος των μη μηδενικών όρων είναι πεπερασμένο).

(iv) Ο (μιγαδικός) χώρος ℓ^2 είναι ο χώρος των ακολουθιών $x = (x(n))$ που είναι *τετραγωνικά αθροίσιμες*, δηλαδή ικανοποιούν

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty.$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι ο ℓ^2 είναι *γραμμικός χώρος*.[2] Πράγματι, αν $x, y \in \ell^2$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε $|x(k)+\lambda y(k)|^2 \leq 2|x(k)|^2+2|\lambda y(k)|^2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ συνεπώς

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) + \lambda y(k)|^2 \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 + 2|\lambda|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^2 < \infty$$

άρα $x + \lambda y \in \ell^2$. Θέτουμε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}.$$

Παρατηρούμε ότι η σειρά συγκλίνει, και μάλιστα απόλυτα, διότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)\overline{y(k)}|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|^2\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^2\right)$$

(η πρώτη ανισότητα είναι η κλασική ανισότητα Cauchy-Schwarz για τον $\mathbb{R}^n$) και το δεξιά μέλος είναι πεπερασμένο, αφού οι $x = (x(k))$ και $y = (y(k))$ είναι τετραγωνικά αθροίσιμες. Είναι τώρα άμεσο να ελέγξει κανείς ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες του ορισμού 1.1.1.

---

[2] με πράξεις κατά συντεταγμένη.

(v) Στον μιγαδικό χώρο $C([-\pi,\pi])$ των συνεχών συναρτήσεων $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ ορίζουμε

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

(όπου το ολοκλήρωμα μιάς $h:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ είναι εξ ορισμού το άθροισμα[3] $\int h = \int \mathrm{Re}(h) + i\int \mathrm{Im}(h)$).

Το $\langle .,.\rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο. Πράγματι, όλες οι ιδιότητες του ορισμού 1.1.1, εκτός από την (ii), είναι άμεσες συνέπειες της γραμμικότητας του ολοκληρώματος. Αποδεικνύουμε την (ii): Αν $\langle f,f\rangle = 0$ τότε $\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2 = 0$, οπότε, επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση $|f|^2$ είναι *μη αρνητική και συνεχής*, έπεται ότι $|f(t)|^2 = 0$ και συνεπώς $f(t)=0$ για κάθε $t\in[-\pi,\pi]$.

Πρόταση 1.1.2 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) *Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, για κάθε $x,y\in E$ ισχύει*

$$|\langle x,y\rangle| \le \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x,y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Απόδειξη Η ανισότητα ισχύει τετριμμένα όταν $y=0$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $y\neq 0$. Θέτουμε $y_1 = \langle y,y\rangle^{-1/2}y$. Για κάθε $\lambda\in\mathbb{K}$ έχουμε

$$0\le \langle x-\lambda y_1, x-\lambda y_1\rangle = \langle x,x\rangle - \lambda\langle y_1,x\rangle - \bar{\lambda}\langle x,y_1\rangle + |\lambda|^2\langle y_1,y_1\rangle$$

Θέτοντας $\lambda = \langle x,y_1\rangle$ έχουμε, εφόσον $\langle y_1,y_1\rangle = 1$,

$$0\le \langle x-\langle x,y_1\rangle y_1, x-\langle x,y_1\rangle y_1\rangle = \langle x,x\rangle - |\langle x,y_1\rangle|^2$$

επομένως $\langle x,x\rangle \ge |\langle x,y_1\rangle|^2$, δηλαδή $\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \ge |\langle x,y\rangle|^2$. Επίσης, η ισότητα $\langle x,x\rangle = |\langle x,y_1\rangle|^2$, ισοδύναμα $\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle = |\langle x,y\rangle|^2$, ισχύει αν και μόνον αν $x-\langle x,y_1\rangle y_1 = 0$. □

[3] Αν $z\in\mathbb{C}$, γράφουμε $\mathrm{Re}z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ για το πραγματικό μέρος του z και $\mathrm{Im}z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ για το φανταστικό του μέρος.

Πρόταση 1.1.3 *Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E, δηλαδή ικανοποιεί*

$$\begin{array}{ll} (i) & \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \\ (ii) & \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \\ (iii) & \|x\| = 0 \iff x = 0 \end{array}$$

για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Απόδειξη Η μόνη μη τετριμμένη ιδιότητα είναι η τριγωνική ανισότητα (i), που ισχύει χάρις στην ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|.\|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει ότι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι και χώρος με νόρμα. Επομένως ορίζεται απόσταση (μετρική), σύγκλιση, συνέχεια κ.λπ. (βλ. το Παράρτημα). Μάλιστα, το εσωτερικό γινόμενο είναι *συνεχής συνάρτηση* και των δύο μεταβλητών του:

Πόρισμα 1.1.4 *Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση*

$$(E, \|.\|) \times (E, \|.\|) \to (\mathbb{K}, |.|) : (x, y) \to \langle x, y\rangle$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη Αν $\|x_n - z\| \to 0$ και $\|y_n - w\| \to 0$ τότε η ανισότητα Cauchy-Schwarz δείχνει ότι

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle z, w\rangle| &= |\langle x_n - z, y_n\rangle + \langle z, y_n - w\rangle| \\ &\leq \|x_n - z\|.\|y_n\| + \|z\|.\|y_n - w\| \to 0 \end{aligned}$$

εφόσον $\|y_n\| \to \|w\|$. $\square$

Πρόταση 1.1.5 *Αν $(E, \langle .,. \rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε*

(α) (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

$$\text{για κάθε } x, y \in E, \; \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$\text{αν } x, y \in E \text{ και } \langle x, y \rangle = 0, \;\; \text{τότε } \; \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Η **απόδειξη** των (α) και (β) είναι απλή εφαρμογή των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου.

Πρόταση 1.1.6 *Αν $\|.\|$ είναι μια νόρμα σε έναν γραμμικό χώρο E που ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, τότε ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο στον E τέτοιο ώστε $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. Επομένως, ο κανόνας του παραλληλογράμμου χαρακτηρίζει τους χώρους με εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των χώρων με νόρμα.*

Η απόδειξη είναι στοιχειώδης, αλλά μακροσκελής, γι' αυτό παραλείπεται.

1.2 Ορθοκανονικές Οικογένειες

Ορισμός 1.2.1 *Δύο στοιχεία x, y ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο λέγονται* **κάθετα** *(συμβολικά $x \perp y$) όταν $\langle x, y \rangle = 0$.*
Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται **ορθοκανονική (orthonormal)** *αν $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$.*

Παρατηρήσεις. **(ι)** Το 0 είναι κάθετο σε κάθε στοιχείο του E, και είναι το μόνο στοιχείο του E με την ιδιότητα αυτή (γιατί;). Επομένως, αν $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ για κάθε $z \in E$, τότε $x = y$.
(ιι) Μια ορθοκανονική οικογένεια $\{e_i : i \in I\}$ είναι κατ' ανάγκην γραμμικά ανεξάρτητη.
Πράγματι, κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{e_{i_n} : n = 1, \ldots, m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, γιατί αν $\lambda_k \in \mathbb{K}$ και $\sum_{n=1}^m \lambda_n e_{i_n} = 0$, τότε $\lambda_k = \langle \sum_{n=1}^m \lambda_n e_{i_n}, e_{i_k} \rangle = 0$ για $k = 1, \ldots, m$.

Το αντίστροφο φυσικά δεν αληθεύει: μία γραμμικά ανεξάρτητη οικογένεια δεν είναι κατ' ανάγκην ορθοκανονική. Μπορώ όμως (τουλάχιστον όταν είναι αριθμήσιμη) να κατασκευάσω επαγωγικά μια ορθοκανονική οικογένεια που, σε κάθε βήμα της επαγωγής, παράγει τον ίδιο γραμμικό χώρο με την δοθείσα:

Πρόταση 1.2.1 (Διαδικασία Gram-Schmidt) *Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία σ' έναν χώρο $(E, \langle .,. \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον E ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, να ισχύει*[4] $[e_n : n = 1, 2, ..., k] = [x_n : n = 1, 2, ..., k]$.

Απόδειξη Με επαγωγή: Θέτω $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Θέτω $y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1$ (δηλαδή αφαιρώ από το x_2 την ορθή προβολή του στον υπόχωρο $[x_1] = [e_1]$), θέτω $e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$ και συνεχίζω κατά τον ίδιο τρόπο: αν δηλαδή έχω κατασκευάσει τα $e_1, e_2, \ldots, e_k$ όπως απαιτεί η Πρόταση, θέτω

$$e_{k+1} = \lambda \left(x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle e_i \right)$$

όπου ο αριθμός λ επιλέγεται ώστε να ισχύει[5] $\|e_{k+1}\| = 1$ (δηλαδή $\lambda = \|x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle e_i\|^{-1}$). Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η ακολουθία (e_n) που κατασκευάσαμε ικανοποιεί τις απαιτήσεις της Πρότασης. Αξίζει ίσως να παρατηρήσουμε ότι το λ μεγαλώνει, όσο η απόσταση του x_{k+1} από τον υπόχωρο $[x_n : n = 1, 2, ..., k]$ μικραίνει, πράγμα που μπορεί να προκαλέσει δυσκολίες σε υπολογιστικές εφαρμογές. □

Παρατήρηση 1.2.2 *Έπεται ότι κάθε υπόχωρος F πεπερασμένης διάστασης σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο έχει μια αλγεβρική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ που είναι ορθοκανονική. Κάθε $x \in F$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο*

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

---

[4] με $[A]$ θα συμβολίζουμε την γραμμική θήκη ενός υποσυνόλου $A \subseteq E$.

[5] Παρατήρησε ότι $\|x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle e_i\| \neq 0$ γιατί $x_{k+1} \notin [e_1, \ldots, e_k] = [x_1, \ldots, x_k]$.

διότι αν $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ *τότε* $\langle x, e_m\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k, e_m\rangle = \lambda_m$ *για* $m = 1, \dots, n$. *Επιπλέον, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2.$$

Παραδείγματα 1.2.3 **(a)** Η συνηθισμένη βάση $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$ του $\mathbb{K}^n$ είναι ορθοκανονική ακολουθία ως προς το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο.

(b) Η ακολουθία $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ όπου $e_i(j) = \delta_{ij}$ είναι ορθοκανονική στον $\ell^2(\mathbb{N})$.

(c) Θεωρούμε τον χώρο $C([-\pi, \pi])$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt.$$

Για $k \in \mathbb{Z}$, θέτουμε

$$e_k(t) = \exp(ikt) = \cos(kt) + i\sin(kt), \;\; t \in [-\pi, \pi].$$

Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η (άπειρη) οικογένεια $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονική (αυτή είναι άλλωστε και η σκοπιμότητα του συντελεστή $1/2\pi$ στον ορισμό του εσωτερικού γινομένου).

Οι (μιγαδικοί) αριθμοί

$$\langle f, e_k\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-ikt) dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

λέγονται **συντελεστές Fourier** της συνάρτησης f και συμβολίζονται $\hat{f}(k)$.

Στόχος μας είναι τώρα να αποδείξουμε την κρίσιμη (όπως θα δούμε) ανισότητα Bessel. Η ανισότητα είναι άμεση συνέπεια του επομένου λήμματος. Σημειώνουμε ότι το λήμμα αυτό θα γενικευθεί αργότερα (στις Προτάσεις 1.5.1 και 1.5.2).

Λήμμα 1.2.4 *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x \in E$ και $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ πεπερασμένη ορθοκανονική ακολουθία στον E. Η απεικόνιση*

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ : (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \to \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(\langle x, e_1\rangle, \langle x, e_2\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)$. *Δηλαδή το διάνυσμα* $y_o = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k$ *είναι το πλησιέστερο στο* x *στοιχείο του υποχώρου* $F = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$.
Επιπλέον το $x - y_o$ *είναι κάθετο στον* F *και αντίστροφα, αν* $y \in F$ *και* $x - y \perp F$, *τότε* $y = y_o$.

[**Ερμηνεία:** Σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο, το πρόβλημα της **βέλτιστης προσέγγισης** ενός τυχαίου στοιχείου $x \in E$ από ένα στοιχείο y του υποχώρου $F = [e_i : i = 1, \ldots, n]$ έχει πάντα[6] **μοναδική λύση**, την

$$y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k.$$

Απόδειξη Λήμματος Κάθε $y \in F$ γράφεται $y = \sum_{k=1}^n \langle y, e_k\rangle e_k$. Έχουμε $(x - y) \perp F$ αν και μόνον αν $\langle x - y, e_k\rangle = 0$, ισοδύναμα $\langle y, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle$ για $k = 1, \ldots n$, δηλαδή $y = y_o$.

Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, γράφοντας

$$x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = \left(x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k\right) + \left(\sum_{k=1}^n (\langle x, e_k\rangle - \lambda_k) e_k\right) = z + y_1$$

παρατηρούμε ότι $z \perp F$ (γιατί $\langle z, e_k\rangle = 0$ για $k = 1, \ldots n$) και $y_1 \in F$, άρα $y_1 \perp z$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι $\|y_1 + z\|^2 = \|y_1\|^2 + \|z\|^2$ δηλαδή

$$\begin{aligned}\left\|x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right\|^2 &= \left\|x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2 + \left\|\sum_{k=1}^n (\langle x, e_k\rangle - \lambda_k) e_k\right\|^2 \\ &= \left\|x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k\rangle - \lambda_k|^2 \qquad (1.1)\end{aligned}$$

[6] Αυτό δεν αληθεύει πάντα σε χώρους με νόρμα. Παραδείγματος χάριν, στον $\mathbb{R}^2$ με την νόρμα $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, αν $x = (1, 1)$ και F είναι ο άξονας των x, δηλ. $F = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, η παράσταση

$$\|(1, 1) - (x, 0)\|_\infty = \max\{|1 - x|, 1\}$$

έχει ελάχιστο αν και μόνον αν $|1 - x| \leq 1$ δηλαδή $0 \leq x \leq 2$. Το πρόβλημα δηλαδή εδώ έχει *άπειρες λύσεις.*]

(για τη νόρμα του y_1 χρησιμοποιήθηκε το Πυθαγόρειο Θεώρημα). Το Λήμμα είναι τώρα προφανές, αφού το δεξιά μέλος της (1.1) έχει ελάχιστο ακριβώς όταν $\lambda_k = \langle x, e_k \rangle$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. □

Αξίζει να απομονώσουμε μια χρήσιμη ταυτότητα, που είναι στην ουσία άμεση συνέπεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Παρατήρηση 1.2.5 *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E. Για κάθε $x \in E$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

Απόδειξη Προφανής αν στην σχέση (1.1) της απόδειξης του Λήμματος θέσουμε $\lambda_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Πρόταση 1.2.6 (Ανισότητα Bessel) *Αν $\{e_i : i = 1, \ldots, n\} \subseteq E$ είναι (πεπερασμένη) ορθοκανονική οικογένεια και $x \in E$, τότε:*

(ι) $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

(ιι) Στην (ι) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in [e_i : i = 1, \ldots, n]$.

Απόδειξη Και τα δύο σκέλη είναι προφανή από τις Παρατηρήσεις 1.2.2 και 1.2.5.

Συμβολισμός Αν $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{R}^+$, θέτουμε[7]

$$\sum_{i \in I} a_i \equiv \sup\{\sum_{i \in F} a_i : F \subseteq I \text{ πεπερασμένο } \} \in [0, +\infty]$$

Πρόταση 1.2.7 (Γενικευμένη ανισότητα Bessel) *Αν $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ είναι ορθοκανονική οικογένεια και $x \in E$, τότε*

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

---

[7] Ο συμβολισμός αυτός είναι συμβιβαστός με τον αντίστοιχο για σειρές (αριθμήσιμου πλήθους) μη αρνητικών όρων. Πράγματι, μια σειρά **μη αρνητικών πραγματικών αριθμών** συγκλίνει αν και μόνον αν είναι φραγμένη, και το άθροισμα της σειράς είναι ακριβώς το supremum των μερικών αθροισμάτων της.