Θεωρία Τελεστών - Εαρινό 2023

Διδάσκων: Γ. Ψαραδάκης, Γραφείο 118 EMAIL: *gpsaradakis@uowm.gr*

Πρόγραμμα: Τρίτη (Β5) και Πέμπτη 16:00-18:00

Σύγγραμμα: Σ. Καρανάσιος - Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές, 2η έκδ., Εκδόσεις ΤΣΟΤΡΑΣ 2017

Ύλη: Κανονικά πρέπει να γίνονται τα 4 (ή και 5 αν υπάρχει χρόνος) πρώτα κεφάλαια, αλλά...

Διάρκεια μαθημάτων: 11 εβδομάδες (06 Μαρτίου - 07 Απριλίου και 24 Απριλίου - 02 Ιουνίου)

Ημερολόγιο Μαθήματος

Με *λοξά γράμματα* εμφανίζεται υλικό εκτός βιβλίου.

ΤΡΙΤΗ 07/03

Προπαρασκευαστικό υλικό: στοιχεία θεωρίας συνόλων, απεικονίσεις (αντίστροφη εικόνα, ένα προς ένα, επί, περιορισμός, επέκταση), $\inf/\sup$ *και ο μεταβολικός ορισμός τους.*

Διανυσματικοί χώροι (δ.χ.).

Δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο. Απόδειξη ανισότητας Cauchy-Schwarz.

ΠΕΜΠΤΗ 09/03

Υπόχωρος δ.χ.. Παραδείγματα δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο ($\mathbb{C}^n$, c_{oo}, ℓ_2, $C([a,b];\mathbb{C})$) και η μορφή της ανισότητας Cauchy-Schwarz. Δ. χ. με νόρμα. Επαγόμενη νόρμα σε δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο - απόδειξη.

ΤΡΙΤΗ 14/03

Μετρικοί χώροι (μ.χ.). Συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ μ.χ.. Ακολουθιακά συνεχείς συναρτήσεις. Η ακολουθιακή συνέχεια είναι ισοδυναμη με την συνέχεια - Απόδειξη.

Απόδειξη συνέχειας του εσωτερικού γινομένου ως προς την επαγόμενη νόρμα. Κανόνας του παραλληλογράμμου και ταυτότητα πολικότητας. Πυθαγόρειο θεώρημα. Χώροι Hilbert.

ΠΕΜΠΤΗ 16/03

Τοπολογικές έννοιες μ.χ. - πυκνό υποσύνολο και διαχωρησιμότητα. Ακολουθίες Cauchy - πλήρεις μ.χ.. Διατυπώσαμε την εξής πρόταση: Αν (X,d) είναι μ.χ. και $(Y, d|_{Y\times Y})$ είναι πλήρης μ.υπόχωρος του, τότε το Y είναι κλειστό υποσύνολο του X, και αν (X,d) είναι πλήρης μ.χ. και το Y είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε ο $(Y, d|_{Y\times Y})$ είναι πλήρης μ.υπόχωρος. Η απόδειξη στο επόμενο μάθημα.

ΤΡΙΤΗ 21/03

Αποδείξαμε το παραπάνω θεώρημα. Θεώρημα πλήρωσης μ.χ. (χωρίς απόδειξη). Διάσταση δ.χ.. Κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης είναι πλήρης (χωρίς απόδειξη). Σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης οποιεσδήποτε δυο νόρμες είναι ισοδύναμες (χωρίς απόδειξη).

(Επιστροφή στο βιβλίο.) Παραδείγματα χώρων Hilbert: ο χώρος $\mathbb{C}^n$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, ο χώρος ℓ_2 με το $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n}$, όπου $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ και $\mathbf{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ - Απόδειξη (μέχρι την ύπαρξη του ορίου μιας ακολουθίας Cauchy του ℓ_2).

ΠΕΜΠΤΗ 23/03

Ολοκλήρωση της προηγούμενης απόδειξης. Ο c_{oo} ως παράδειγμα μη Hilbert χώρου που είναι όμως πυκνός στον ℓ_2 (αποδείξαμε οτι η ακολουθία των ουρών μια συγλίνουσας σειράς, συγκλίνει στο μηδέν). Ο $C([0,1];\mathbb{C})$ ως παράδειγμα μη Hilbert χώρου. Εξηγήσαμε πως εφαρμόζεται το θεώρημα πλήρωσης μ.χ. για να δείξουμε οτι: για κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο X, υπάρχει χώρος Hilbert στον οποίο ο X εμφυτεύεται γραμμικά και ισομετρικά ως πυκνός υπόχωρος.

ΤΡΙΤΗ 28/03

§1.3 Βέλτιστη Προσέγγιση - Ορθή Προβολή (έγιναν όλες οι αποδείξεις).

ΠΕΜΠΤΗ 30/03

§1.4 Ορθογώνιο συμπλήρωμα (μέχρι και την απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.3.).

ΤΡΙΤΗ 04/04

Ολοκληρώσαμε την §1.4 (αποδείξαμε τα πορίσματα 1.4.4-1.4.6). *Αναφέραμε το θεώρημα επέκτασης του Hahn και είδαμε πως αυτό συνεπάγεται το θεώρημα επέκτασης του Banach. Ορίσαμε τον δυϊκό X^* ενός δ.χ. με νόρμα X και επαναδιατυπώσαμε (με τη βοήθεια του ορισμού αυτού) το θεώρημα επέκτασης του Banach.* Αποδείξαμε την Πρόταση 1.5.1. *Επίσης, αιτιολογήσαμε το "δυϊκός", ανακτώντας την νόρμα ενός στοιχείου του X απο τα στοιχεία του X^*.*

ΠΕΜΠΤΗ 06/04

Ισοδύναμοι ορισμοί δυϊκού χώρου. Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz για χώρους Hilbert:

$$\forall\, f \in H^*,\ \exists!\, x_f \in H \text{ τέτοιο ώστε } f(y) = \langle y, x_f \rangle \quad \forall\, y \in H. \tag{1}$$

ΚΑΛΟ ΠΑΣΧΑ

ΤΡΙΤΗ 25/04

2ο Κεφάλαιο. §2.1: Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(X,Y)$ το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από το διανυσματικό χώρο X στον διανυσματικό χώρο Y. Αν X, Y είναι χώροι με νόρμα, συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(X,Y)$ το συνόλο όλων των $\mathcal{L}(X,Y)$ που είναι επιπλέον φραγμένοι, δηλαδή $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ αν $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ και $\sup\{\|T(x)\| \mid x \in X,\ \|x\| \leq 1\} < \infty$. Λέμε τα στοιχεία του $\mathcal{B}(X,Y)$ *φραγμένους γραμμικούς τελεστές*. Αν $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, η Πρόταση 2.1.2 δίνει ισοδύναμες εκφράσεις για τον αριθμό $\sup\{\|T(x)\| \mid x \in X,\ \|x\| \leq 1\}$. Ενώ η Πρόταση 2.1.3 δίνει ισοδύναμους ορισμούς του $\mathcal{B}(X,Y)$. Το Θεώρημα 2.1.4 λέει ότι αν $T \in \mathcal{B}(D,Y)$, όπου D είναι πυκνός υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X, και Y είναι χώρος Banach, τότε $\exists!\, \tilde{T} \in \mathcal{B}(X,Y)$ με $\tilde{T} = T$ στον D και $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

ΠΕΜΠΤΗ 27/04

Ολοκληρώσαμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.4 και περάσαμε στην §2.3. Δείξαμε ότι ο $\mathcal{B}(X,Y)$ εφοδιασμένος με την πράξη της πρόσθεσης (+) στοιχείων του και τον πολλάπλασιασμό $(\cdot)$ μιγαδικών αριθμών με στοιχεία του, είναι ένας διανυσματικός χώρος. Με τις πράξεις αυτές, δείξαμε ότι η απεικόνιση

$$T \mapsto \sup\{\|T(x)\| \mid x \in X,\ \|x\| \leq 1\},$$

ορίζει μια νόρμα στον $\mathcal{B}(X, Y)$ που λέγεται *νόρμα τελεστών*. Τέλος αποδείξαμε αν ο Y είναι χώρος Banach, τότε ο χώρος $\mathcal{B}(X, Y)$ με τη νόρμα τελεστών είναι επίσης χώρος Banach.

ΤΡΙΤΗ 02/05

§2.4 Αν H, K είναι χώροι Hilbert, γράφουμε $(H \times K)^*$ για το σύνολο όλων των φραγμένων sesquilinear *συναρτησοειδών* στον $H \times K$. Δείξαμε ότι κάθε απεικόνιση $b : H \times K \to \mathbb{C}$ που δίνεται από τον τύπο $b(x, y) := \langle Ax, y\rangle$ για κάποιον $A \in \mathcal{B}(H \times K)$, ανήκει στον $(H \times K)^*$. Αντιστρόφως, χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz για να αποδείξουμε ότι:

$$\forall\, b \in (H \times K)^*,\ \exists\, A_b \in \mathcal{B}(H, K) \text{ τ.ω. } b(x, y) = \langle A_b x, y\rangle \quad \forall\, x \in H,\ y \in K. \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας τη (2), αποδείξαμε ότι

$$\forall\, A \in \mathcal{B}(H, K),\ \exists!\, A^\star \in \mathcal{B}(K, H) \text{ τ.ω. } \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^\star y\rangle \quad \forall\, x \in H,\ y \in K. \tag{3}$$

Αποδείξαμε τις ιδιότητές του $A^\star$ (Πρόταση 2.5.3 - μόνο η ιδιότητα (iii) απαιτεί $H = K$).

ΠΕΜΠΤΗ 04/05

Πυρήνας, εικόνα φραγμένου γραμμικού τελεστή και οι ιδιότητες τους (Θεώρημα 2.5.5). §2.6 Αποδείξαμε ότι

$$A \in \mathcal{B}(H) \begin{cases} \Rightarrow H = Ker(A) \oplus \overline{Im(A)} & \text{(Πρόταση 2.6.2)}, \\ \Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in H & \text{(Πρόταση 2.6.3)}, \\ \Rightarrow \|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} |\langle Ax, x\rangle| & \text{(Θεώρημα 2.6.4)}. \end{cases}$$

ΤΡΙΤΗ 09/05

Ορισμοί: Θετικός, αυτοσυζυγής, ορθομοναδιαίος, ισομετρικός τελεστής και σχέσεις μεταξύ τους (Πρόταση 2.6.7). Γενικευμένη ανισότητα Cauchy-Schwarz. Αποδείξαμε το Θεώρημα 2.6.10: μια μονότονη και φραγμένη ακολουθία αυτοσυζυγών τελεστών έχει μοναδικό όριο έναν αυτοσυζυγή τελεστή.

ΠΕΜΠΤΗ 11/05

Αντίστροφη απεικόνιση γενικά. Αντιστροφή γραμμικής απεικόνισης μεταξύ διανυσματικών χώρων. Ορισμός αντιστρόφου ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή και ύπαρξη αυτού μέσω του Θεωρήματος Ανοικτής Απεικόνισης (απο τη Συναρτησιακή Ανάλυση). Κάτω φραγμένοι γραμμικοί τελεστές και ύπαρξη αντιστρόφου (Θεώρημα 2.7.5). Αντίστροφος τελεστής και χώροι Hilbert (Πρόταση 2.7.8).

ΤΡΙΤΗ 16/05

Αποδείξαμε το θεώρημα 2.7.11 και την Πρόταση 2.7.12. §2.12 Το φάσμα ενός τελεστή. Αποδείξαμε την Πρόταση 2.12.2.

ΠΕΜΠΤΗ 18/05

Επανάληψη της έννοιας του φάσματος τελεστή. Αποδείξαμε την Πρόταση 2.12.3. §2.12.1 Διαμέριση φάσματος. Ορισμοί για σημειακό φάσμα, προσεγγιστικά σημειακό φάσμα και φάσμα συμπίεσης, και σχέσεις μεταξύ τους.

ΤΡΙΤΗ 23/05

Επανάληψη των ορισμών σημειακού φάσματος, προσεγγιστικά σημειακού φάσματος και φάσματος συμπίεσης. Υπενθύμιση των μεταξύ τους σχέσεων. Σχέση φασματος τελεστή με το φάσμα του συζυγή του - Πρόταση 2.12.6. Ιδιότητες φάσματος φυσιολογικού τελεστή - Θεώρημα 2.12.7.

ΠΕΜΠΤΗ 25/05

Ιδιότητες φάσματος αυτοσυζυγή τελεστή - Πρόταση 2.12.8 και Θεώρημα 2.12.9.

ΤΡΙΤΗ 30/05

Επιστροφή στην §2.4: Έστω H είναι χώρος Hilbert. Μια sesquilinear απεικόνιση $b : H \times H \to \mathbb{C}$ θα λέγεται *φραγμένη* αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε $|b(x,y)| \leq c\|x\|\|y\|$ για κάθε $x, y \in H$ και *πιεστική (coercive)* αν υπάρχει $c' > 0$ τέτοιος ώστε $Re[b(x,x)] \geq c'\|x\|^2$ για κάθε $x \in H$. Αποδείξαμε το ακόλουθο:

Θεώρημα Lax-Milgram: Έστω $b : H \times H \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη και πιεστική sesquilinear απεικόνιση. Τότε

$$\forall\, f \in H^*,\ \exists!\, x_f^{(b)} \in H \text{ τέτοιο ώστε } f(y) = b(y, x_f^{(b)}) \quad \forall\, y \in H. \tag{4}$$

Παρατήρηση: Το θεώρημα Lax-Milgram αποτελεί μια επέκταση του θεωρήματος αναπαράστασης του Riesz. Πράγματι, η απεικόνιση $b(x,y) : H \times H \to \mathbb{C}$ με τύπο $b(x,y) = \langle x, y\rangle$ είναι sesquilinear (απο ιδιότητες εσωτερικού γινομένου), φραγμένη (απο ανισότητα Cauchy-Schwarz), και πιεστική (διότι $b(x,x) = \|x\|^2$ για κάθε $x \in H$). Επομένως η (4) λέει το ίδιο με την (1) σε αυτή την περίπτωση.

Απόδειξη: Απο (2) και (3), υπάρχει $A_b \in \mathcal{B}(H)$ τ.ω. $b(x,y) = \langle x, A_b^\star y\rangle$ για κάθε $x, y \in H$. Έστω $f \in H^*$. Από (1), υπάρχει μοναδικό $x_f \in H$ τ.ω. $f(y) = \langle y, x_f\rangle$ για κάθε $y \in H$. Ας υποθέσουμε ότι

$$\exists\, z \in H \text{ τ.ω. } x_f = A_b^\star z. \tag{5}$$

Τότε $f(y) = \langle y, x_f\rangle = \langle y, A_b^\star z\rangle = b(y,z)$ για κάθε $y \in H$. Επομένως αρκεί να δείξω την (5) και επίσης ότι το z της (5) είναι και μοναδικό. Αρκεί να δείξω ότι ο $A_b^\star$ είναι αντιστρέψιμος (διότι τότε $z = (A_b^\star)^{-1}x_f$ θα είναι μοναδικό εφόσον x_f είναι μοναδικό και η $A_b^\star$ θα είναι ένα-προς-ένα). Αρκεί να δείξω οτι ο $A_b^\star$ είναι ένα-προς-ένα και επί του H, δηλαδή ότι $Ker(A_b^\star) = \{0_H\}$ και $Im(A_b^\star) = H$:

$\underline{Ker(A_b^\star) = \{0_H\}}$: Αν $x \in H$ είναι τ.ω. $A_b^\star x = 0_H$, τότε

$$c'\|x\|^2 \leq Re[b(x,x)] = \frac{1}{2}(b(x,x) + \overline{b(x,x)}) = \frac{1}{2}(\langle x, A_b^\star x\rangle + \langle A_b^\star x, x\rangle) = 0,$$

δηλ. $x = 0_H$. □

$\underline{Im(A_b^\star) = H}$: Αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{Im(A_b^\star)} = H$ και ότι το $Im(A_b^\star)$ είναι κλειστός υπόχωρος. Όμως,

$$\overline{Im(A_b^\star)} = H \Leftrightarrow (Im(A_b^\star))^\perp = \{0_H\} \Leftrightarrow Ker(A_b) = \{0_H\}.$$

Αν $x \in H$ είναι τ.ω. $A_b x = 0_H$, τότε όπως και πρίν

$$c'\|x\|^2 \leq \frac{1}{2}(\langle x, A_b^\star x\rangle + \langle A_b^\star x, x\rangle) = \frac{1}{2}(\langle A_b x, x\rangle + \langle x, A_b x\rangle) = 0,$$

δηλ. $x = 0_H$, άρα $Ker(A_b) = \{0_H\}$. Τέλος, έστω $\{x_k \in H\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι τ.ώ. η $\{y_k = A_b^\star x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *να είναι συγκλίνουσα στο* $y \in H$. Τότε

$$c'\|x_k-x_j\|^2 \leq Re[b(x_k-x_j, x_k-x_j)] = Re\langle x_k-x_j, A_b^\star(x_k-x_j)\rangle = Re\langle x_k-x_j, y_k-y_j\rangle$$

$$\Rightarrow c'\|x_k-x_j\|^2 \leq |\langle x_k-x_j, y_k-y_j\rangle| \leq \|x_k-x_j\|\|y_k-y_j\|$$

$$\Rightarrow c'\|x_k-x_j\| \leq \|y_k-y_j\|,$$

που μας λέει ότι η $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy, επομένως συγκλίνει στο $x \in H$. Άρα, $y = \lim y_k = \lim A_b^\star x_k = A_b^\star x$, η τελευταία λόγω της συνέχειας του $A_b^\star$. □■

Εφαρμογή του Θ. Lax-Milgram σε προβλήματα συνοριακών τιμών γραμμικών ελλιπτικών διαφορικών εξισώσεων. Βέλτιστη ανισότητα Poincaré και coercivity διγραμμικών απεικονίσεων.

ΠΕΜΠΤΗ 01/06

Αποδείξαμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach: Έστω (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και T μια *συστολή στον* X, δηλ. υπάρχει $a \in (0,1)$ τ.ω. $d(T(x), T(y)) \leq ad(x,y)$ για κάθε $x, y \in X$. Τότε η T έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο, δηλ. υπάρχει $x \in X$ τ.ω. $T(x) = x$.

Είδαμε πως εφαρμόζεται το παραπάνω θεώρημα στην επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων και ολοκληρωτικών εξισώσεων.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ ΣΤΗΝ ΕΞΕΤΑΣΗ