

Θεωρία Τελεστών - Εαρινό 2023

Τέταρτο Σετ Ασκήσεων

Σε όλες τις παρακάτω ασκήσεις, το H συμβολίζει έναν χώρο Hilbert.

Άσκηση 1 Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ και ο $I - AB$ είναι αντιστρέψιμος, δείξτε ότι και ο $I - BA$ είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον τελεστή $I + B(I - AB)^{-1}A$.

Άσκηση 2 Δείξτε ότι οι $A, B \in \mathcal{B}(H)$ είναι αντιστρέψιμοι, αν και μόνο αν οι AB, BA είναι αντιστρέψιμοι.

Άσκηση 3 Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$. Δείξτε ότι αν οι A και A^* είναι κάτω φραγμένοι, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 4 Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι φυσιολογικός. Να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι κάτω φραγμένος.

Άσκηση 5 Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής και υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in H$ με $\|x\| = 1$ και $\|Ax\| = \|A\|$. Δείξτε ότι

(i) $A^2x = \|A\|^2x$.

(ii) είτε $Ax = \|A\|x$ είτε $Ay = -\|A\|y$ για κάποιο $y \in H$ με $\|y\| = 1$.

(iii) Αν επιπλέον ο A είναι θετικός τελεστής, τότε $Ax = \|A\|x$.