Θεωρία Τελεστών - Εαρινό 2023

Τρίτο Σετ Ασκήσεων

Άσκηση 1 Δείξτε ότι αν X είναι διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε

$$\|x\| = \sup_{\|z\|\leq 1} |\langle x, z\rangle| \qquad \forall\, x \in X.$$

Άσκηση 2 Έστω X όπως στην Άσκηση 1. Αν $x \in X$ και $\{x_n \in X\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τέτοια ώστε $\|x_n\| \to \|x\|$ και $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$, δείξτε ότι $\|x_n - x\| \to 0$.

Άσκηση 3 Έστω $T \in \mathcal{L}(X)$, όπου X όπως στην Άσκηση 1. Δείξτε ότι

$$i\Big(\langle T(x+iy), x+iy\rangle - \langle T(x-iy), x-iy\rangle\Big) = 2\Big(\langle Tx, y\rangle - \overline{\langle x, Ty\rangle}\Big) \qquad \forall\, x, y \in X.$$ [1]

Στη συνέχεια, θέτωντας y/i στη θέση του y, δείξτε ότι

$$\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle = 2\Big(\langle Tx, y\rangle + \overline{\langle x, Ty\rangle}\Big) \qquad \forall\, x, y \in X.$$ [2]

Άσκηση 4 Έστω T, X όπως στην Άσκηση 2. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα πολικότητας (βλέπε δεύτερη υποσημείωση), αποδείξτε ότι $\langle Tx, x\rangle = 0$ για κάθε $x \in X$ αν και μονο αν $T \equiv 0$.

Άσκηση 5 Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$, όπου H είναι χώρος Hilbert. Δείξτε ότι

(i) $A = A^\star \Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$.

(ii) $AA^\star = A^\star A \Leftrightarrow \|Ax\| = \|A^\star x\|$ για κάθε $x \in H$.

Άσκηση 6 Στο χώρο $\big(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$, να αποδείξετε ότι η νόρμα του γραμμικού συναρτησοειδούς

$$T(f) := \int_0^1 t f(t)\mathrm{d}t,$$

είναι 1/2. [3]

---

[1] Επομένως για αυτοσυζυγή $T \in \mathcal{B}(H)$ έχουμε

$$\langle Tx, y\rangle \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle T(x+iy), x+iy\rangle - \langle T(x-iy), x-iy\rangle = 0.$$

[2] Παρατηρείστε ότι προσθέτωντας κατα μέλη τις δύο αυτές ισότητες, προκύπτει αμέσως η ταυτότητα πολικότητας:

$$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\Big\{\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\Big(\langle T(x+iy), x+iy\rangle - \langle T(x-iy), x-iy\rangle\Big)\Big\}$$

[3] Υπενθύμιση: $\|f\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$, $f \in C([0,1])$