Θεωρία Τελεστών - Εαρινό 2023

Πρώτο Σετ Ασκήσεων

Συμβολισμός για τις 2 πρώτες ασκήσεις: $C([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \text{συνεχής}\}$, όπου $-\infty < a < b < \infty$.

Άσκηση 1 Έστω $1 < p \neq 2$. Αποδεχτείτε ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_p : C([a,b]) \to [0,\infty)$ με τύπο

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}, \tag{1}$$

είναι νόρμα στον $C([a,b])$ και δείξτε ότι αυτή δεν προέρχεται απο εσωτερικό γινόμενο.
[Υπόδειξη: Αν $f \in C([0,1])$ είναι μια συνάρτηση με $f(t_0) = 0$ για κάποιο $t_0 \in (0,1)$, θεωρήστε μια δεύτερη συνάρτηση $g \in C([0,1])$ με τύπο $g(t) = f(t)$ στο $[0,t_0]$, $g(t) = -f(t)$ στο $(t_0,1]$].

Άσκηση 2 Έχουμε δει οτι η απεικόνιση $\langle\cdot,\cdot\rangle : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t, \tag{2}$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $C([a,b])$.

1. Δείξτε ότι για κάθε $f \in C([-\pi,\pi])$, έχουμε

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\pi}\|f\|,$$

όπου $\|\cdot\|$ είναι η επαγόμενη απο το εσωτερικό γινόμενο (2) νόρμα.

2. Θεωρούμε τώρα το σύνολο $C^1([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \text{συνεχώς παραγωγίσιμη}\}$[1].

(i) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle\cdot,\cdot\rangle_1 : C^1([a,b]) \times C^1([a,b]) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\langle f,g\rangle_1 := \int_a^b \big[f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big]\mathrm{d}t, \tag{3}$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $C^1([a,b])$.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $f \in C^1([-\pi,\pi])$, έχουμε

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t)\cos t - f'(t)\sin t\big)\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{2\pi}\|f\|,$$

όπου $\|\cdot\|$ είναι η επαγόμενη απο το εσωτερικό γινόμενο (3) νόρμα.

Άσκηση 3 Αποδείξτε την ταυτότητα πολικότητας: σε κάθε μιγαδικό διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, έχουμε

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\Big), \quad \forall\, x,y \in V,$$

όπου $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ είναι η επαγόμενη απο το εσωτερικό γινόμενο νόρμα.

Άσκηση 4 Δείξτε οτι ο $c_{oo} := \{\mathbf{x} = \{x_n \in \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n = 0 \ \forall n \geq N \text{ για κάποιο } N \in \mathbb{N}\}$ εφοδιασμένος με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n}$, δεν είναι χώρος Hilbert.

[1] δηλαδή η πρώτη παράγωγος υπάρχει στο $[a,b]$, και ως συνάρτηση είναι συνεχής στο $[a,b]$

1 Λύσεις-Υποδείξεις:

Άσκηση 1 Έστω $f,\ g$ είναι οι συναρτήσεις της υπόδειξης. Τότε

$$\|f+g\|_p^2 = \Big(\int_0^1 |f+g|^p\Big)^{2/p} = \Big(\int_0^{t_0} |2f|^p\Big)^{2/p} = 4\Big(\int_0^{t_0} |f|^p\Big)^{2/p} = 4A^{2/p},$$

όπου $A := \int_0^{t_0} |f|^p$. Ομοίως,

$$\|f-g\|_p^2 = \Big(\int_0^1 |f-g|^p\Big)^{2/p} = \Big(\int_{t_0}^1 |2f|^p\Big)^{2/p} = 4\Big(\int_{t_0}^1 |f|^p\Big)^{2/p} = 4B^{2/p},$$

όπου $B := \int_{t_0}^1 |f|^p$. Ακόμη,

$$\|f\|_p^2 = \Big(\int_0^1 |f|^p\Big)^{2/p} = \Big(\int_0^{t_0} |f|^p + \int_{t_0}^1 |f|^p\Big)^{2/p} = (A+B)^{2/p},$$

και

$$\|g\|_p^2 = \Big(\int_0^1 |g|^p\Big)^{2/p} = \Big(\int_0^{t_0} |f|^p + \int_{t_0}^1 |f|^p\Big)^{2/p} = (A+B)^{2/p}.$$

Επομένως ο κανόνας του παραλληλογράμμου για τις f, g είναι ισοδύναμος με την

$$A^{2/p} + B^{2/p} = (A+B)^{2/p}, \quad \forall\, A, B \geq 0.$$

Η τελευταία είναι προφανώς αληθής όταν $p = 2$. Αν όμως $p \neq 2$, παίρνοντας $A = B \neq 0$ βλέπουμε αμέσως ότι δεν είναι αληθής.

Άσκηση 2 Τα 1 και 2(ii) προκύπτουν απο την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$.

Άσκηση 3 Πράξεις (γραμμική ιδιότητα του εσωτερικού γιομένου).

Άσκηση 4 Δείξτε ότι η ακολουθία $\{x^{(n)} := (1, 1/2, 1/3, ..., 1/n, 0, 0, ...)\}$ είναι ακολουθία $Cauchy$.