να πέσει από θέση ηρεμίας, έχει μηδενική στροφορμή στην αρχή της πτώσης και επομένως, σύμφωνα με έναν βασικό νόμο της φυσικής που καλείται *διατήρηση της στροφορμής*, η γάτα έχει μηδενική στροφορμή καθ' όλη τη διάρκεια της πτώσης της.[2] Παραδόξως, η γάτα καταφέρνει να αλλάξει τη γωνία της διατηρώντας μηδενική στροφορμή!

Η ακριβής διαδικασία με την οποία συμβαίνει αυτό είναι δύσκολο να αναλυθεί· σκεπτόμενοι διαισθητικά μπορούμε να παρασυρθούμε σε λάθος συμπεράσματα και, όπως αναφέραμε, κατά την ιστορία της προσπάθειας επίλυσης αυτού του μυστηρίου έχουν προταθεί πολλές εσφαλμένες εξηγήσεις.[3] Πρόσφατα, έχουν ανακαλυφθεί νέες και ενδιαφέρουσες ερμηνείες με χρήση γεωμετρικών μεθόδων οι οποίες συνδέονται με την καμπυλότητα (βλ. Ενότητα 7.7).[4]

Ο τρόπος με τον οποίο συνδέονται η καμπυλότητα και η γεωμετρία με το φαινόμενο της γάτας που πέφτει είναι δύσκολο να εξηγηθεί πλήρως· μπορούμε όμως να εξηγήσουμε ένα παρόμοιο φαινόμενο που μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητό. Περιέργως, το *θεώρημα του Stokes είναι κρίσιμο για την κατανόηση φαινομένων αυτού του είδους.*

Ασκήσεις

1. Έστω S το τμήμα του επιπέδου $2x + 3y + z = 5$ που βρίσκεται μεταξύ των σημείων $(-1, 1, 4)$, $(2, 1, -2)$, $(2, 3, -8)$ και $(-1, 3, 2)$. Βρείτε μια παραμετρικοποίηση της επιφάνειας S και μια παραμετρικοποίηση του συνόρου ∂S. Βεβαιωθείτε ότι οι προσανατολισμοί τους είναι συμβατοί με το θεώρημα του Stokes.

2. Έστω S το τμήμα της επιφάνειας $z = x^2 + y^2$ που βρίσκεται μεταξύ των σημείων $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 4)$, $(0, 2, 4)$ και $(2, 2, 8)$. Βρείτε μια παραμετρικοποίηση της επιφάνειας S και μια παραμετρικοποίηση του συνόρου ∂S. Βεβαιωθείτε ότι οι προσανατολισμοί τους είναι συμβατοί με το θεώρημα του Stokes.

Στις Ασκήσεις 3 έως 6, επαληθεύστε το θεώρημα του Stokes για τη δεδομένη επιφάνεια S, το δεδομένο σύνορο ∂S και το δεδομένο διανυσματικό πεδίο **F**.

3. $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0\}$

(προσανατολισμένη σαν γράφημα)

$\partial S = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$
$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

4. Η S της Άσκησης 1 και $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

5. $S = \{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0\}$

(προσανατολισμένη σαν γράφημα)

$\partial S = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$
$\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + (2zx + 2xy)\mathbf{k}$

6. Η S της Άσκησης 3 και $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$

7. Έστω C η κλειστή, τμηματικά ομαλή καμπύλη που διαγράφουμε αν κινηθούμε ευθύγραμμα μεταξύ των σημείων $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 4)$, $(3, 2, 6)$, $(1, 2, 2)$ και πίσω στην αρχή των αξόνων, με αυτή τη σειρά. (Άρα η επιφάνεια S που βρίσκεται στο εσωτερικό της C περιέχεται στο επίπεδο $z = 2x$.) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_C (z \cos x)\, dx + (x^2 yz)\, dy + (yz)\, dz$$

---

[2] Είδαμε μια περίπτωση του νόμου διατήρησης της στροφορμής στην Άσκηση 26 της Ενότητας 4.1.

[3] Ένας ακόμη εσφαλμένος συλλογισμός που εμφανίζεται συχνά, ο οποίος δείχνει ότι η γάτα *δεν μπορεί* να αναποδογυρίσει μόνη της(!), είναι ο εξής: «Δεχόμαστε από τη φυσική ότι η στροφορμή είναι η ροπή αδράνειας επί τη γωνιακή ταχύτητα [οι ροπές αδράνειας εξετάζονται στην Ενότητα 6.3]. Η στροφορμή της γάτας είναι όμως μηδέν, άρα η γωνιακή ταχύτητα πρέπει να είναι επίσης μηδέν. Αφού η γωνιακή ταχύτητα είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας, η γωνία είναι σταθερή. Άρα η γάτα δεν μπορεί να αναποδογυρίσει μόνη της.» Πού βρίσκεται το λάθος; Αυτός ο συλλογισμός αγνοεί το γεγονός ότι, κατά την πτώση, η γάτα μεταβάλλει το *σχήμα* της και επομένως τη ροπή αδράνειάς της.

[4] Βλ. T. R. Kane και M. Scher, «A Dynamical Explanation of the Falling Cat Phenomenon,» *Int. J. Solids Struct.*, 5 (1969): 663–670. Βλ. επίσης R. Montgomery, «Isoholonomic Problems and Some Applications», *Commun. Math. Phys.*, 128 (1990): 565–592· R. Montgomery, «How Much Does a Rigid Body Rotate; A Berry's Phase from the 18th Century», *Am. J. Phys.*, 59 (1991b): 394–398. Βλ. επίσης J. E. Marsden και J. Ostrowski, «Symmetries in Motion: Geometric Foundations of Motion Control», *Nonlinear Science Today* (1998), http://link.springer-ny.com; R. Batterman,