

Απειροστικός Λογισμός IV - Εαρινό 2025

Διδάσκων: Γ. Ψαραδάκης, Γραφείο 118

EMAIL: gpsaradakis@uowm.gr

Πρόγραμμα: Πέμπτη 12:00-14:00 στη B5 και Παρασκευή 09:00-12:00 στη B5

Σύγγραμμα: J. Marsden, A. Tromba - Διανυσματικός Λογισμός, Π.Ε.Κ. 2023

Ύλη: Κεφάλαια 5, 6, 7 και 8

1 Πολικές και σφαιρικές συντεταγμένες

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \exists! (\rho, \vartheta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) \text{ ώστε } \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα}) = \rho.$$

Επίσης, είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, αρα για κάθε $\rho > 0$ έχουμε την ακόλουθη παραμετρικοποίηση της καμπύλης κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας ρ :

$$\vec{\sigma}(\vartheta) = \rho(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0), \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Έχουμε

$$\vec{\sigma}'(\vartheta) = \rho(-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0), \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Επομένως

$$\|\vec{\sigma}'(\vartheta)\| = \rho, \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \exists! (\rho, \vartheta, \varphi) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \text{ ώστε } \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα}) = -\rho^2 \sin \varphi.$$

Επίσης, είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, αρα για κάθε $\rho > 0$ έχουμε την ακόλουθη παραμετρικοποίηση της επιφάνειας σφαίρας κέντρου 0 και ακτίνας ρ :

$$\vec{\Phi}(\vartheta, \varphi) = \rho(\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi].$$

Έχουμε

$$(\vec{\Phi}_\vartheta \times \vec{\Phi}_\varphi)(\vartheta, \varphi) = -\rho^2 \sin \varphi (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi].$$

Επομένως

$$\|(\vec{\Phi}_\vartheta \times \vec{\Phi}_\varphi)(\vartheta, \varphi)\| = \rho^2 \sin \varphi, \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi].$$

2 Επικαμπύλια και επιφανειακά ολοκληρώματα

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΒΑΘΜΩΤΩΝ/ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Αν $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη, τότε για κάθε $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία η $f(\vec{\sigma}(t))$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, ορίζουμε

$$\int_{\vec{\sigma}} f := \int_a^b f(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| dt,$$

ενώ για κάθε $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ για την οποία η $\vec{F}(\vec{\sigma}(t))$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, ορίζουμε

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} := \int_a^b \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt.$$

Πιο αναλυτικά, αν $x = x(t)$, $y = y(t)$ και $z = z(t)$ είναι οι συνιστώσες της $\vec{\sigma}(t)$, $t \in [a, b]$, τότε

$$\int_{\vec{\sigma}} f = \int_a^b f(x, y, z) \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt,$$

ενώ αν F_1, F_2, F_3 είναι οι συνιστώσες της $\vec{F}$ και $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ είναι οι συνιστώσες της $\vec{\sigma}(t)$, $t \in [a, b]$, τότε

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} = \int_a^b [x'F_1(x, y, z) + y'F_2(x, y, z) + z'F_3(x, y, z)] dt.$$

Ειδική περίπτωση: Αν $\vec{F} = \nabla f$ για μια $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία η $f(\vec{\sigma}(t))$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας: $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} = \int_a^b \frac{d}{dt} [f(\vec{\sigma}(t))] dt = f(\vec{\sigma}(b)) - f(\vec{\sigma}(a))$, το οποίο είναι 0 στην περίπτωση που η καμπύλη είναι επιπλέον κλειστή.

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΒΑΘΜΩΤΩΝ/ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Αν $\vec{\Phi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη ως προς κάθε μεταβλητή, τότε για κάθε $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία η $f(\vec{\Phi}(u, v))$ είναι συνεχής στο D , ορίζουμε

$$\int_{\vec{\Phi}} f := \iint_D f(\vec{\Phi}(u, v)) \|\vec{\Phi}_u(u, v) \times \vec{\Phi}_v(u, v)\| du dv,$$

ενώ για κάθε $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ για την οποία η $\vec{F}(\vec{\Phi}(u, v))$ είναι συνεχής στο D , ορίζουμε

$$\int_{\vec{\Phi}} \vec{F} := \iint_D \vec{F}(\vec{\Phi}(u, v)) \cdot \vec{\Phi}_u(u, v) \times \vec{\Phi}_v(u, v) du dv.$$

Πιο αναλυτικά, αν $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ και $z = z(u, v)$ είναι οι συνιστώσες της $\vec{\Phi}(u, v)$, $(u, v) \in D$, τότε

$$\int_{\vec{\Phi}} f = \iint_D f(x, y, z) \sqrt{(y_u z_v - z_u y_v)^2 + (x_u z_v - z_u x_v)^2 + (x_u y_v - y_u x_v)^2} du dv,$$

ενώ αν F_1, F_2, F_3 είναι οι συνιστώσες της $\vec{F}$ και $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ είναι οι συνιστώσες της $\vec{\Phi}(u, v)$, $(u, v) \in D$, τότε

$$\int_{\vec{\Phi}} \vec{F} = \iint_D [(y_u z_v - z_u y_v)F_1(x, y, z) - (x_u z_v - z_u x_v)F_2(x, y, z) + (x_u y_v - y_u x_v)F_3(x, y, z)] du dv.$$

3 Θεωρήματα Gauss και Green

ΘΕΩΡΗΜΑ GREEN (ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ $\leftrightarrow$ ΔΙΠΛΟ)

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα κατα τμήματα ομαλό, φραγμένο χωρίο και συμβολίζουμε με $\partial\Omega$ το θετικά προσανατολισμένο σύνορό του (το εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο του $\partial\Omega$ έχει φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού). Τότε για κάθε $F_1, F_2 \in C^1(\Omega)$ ισχύει

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} = \int_{\Omega} \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{k}, \quad \text{όπου } \vec{F} := (F_1, F_2, 0). \quad (1)$$

Αν $x = x(t)$, $y = y(t)$ είναι οι συνιστώσες μιας παραμετρικοποίησης $\vec{\sigma} : [a, b] \rightarrow \partial\Omega$, η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε το θεώρημα Green γράφεται

$$\int_a^b [x' F_1(x, y) + y' F_2(x, y)] dt = \iint_{\Omega} ((F_2)_x - (F_1)_y) dx dy. \quad (2)$$

Παρατήρηση: Εκφράζοντας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους ως επικαμπύλιο α' είδους, το Θ. Green αναδιατυπώνεται ως εξής:

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα κατα τμήματα ομαλό, φραγμένο χωρίο και συμβολίζουμε με $\partial\Omega$ το σύνορό του. Τότε για κάθε $F_1, F_2 \in C^1(\Omega)$ ισχύει

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\tau} = \int_{\Omega} \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{k}, \quad (3)$$

όπου $\vec{F} := (F_1, F_2, 0)$ και $\vec{\tau}$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη $\partial\Omega$ με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού.

ΘΕΩΡΗΜΑ GAUSS ΣΤΟ ΧΩΡΟ (ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟ $\leftrightarrow$ ΤΡΙΠΛΟ)

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ είναι ένα κατα τμήματα ομαλό, φραγμένο χωρίο και συμβολίζουμε με $\partial\Omega$ το προσανατολισμένο σύνορό του (το κάθετο διάνυσμα σε κάθε σημείο της επιφάνειας $\partial\Omega$ έχει φορά προς το εξωτερικό του Ω). Τότε για κάθε $F_1, F_2, F_3 \in C^1(\Omega)$ ισχύει

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} = \int_{\Omega} \text{div} \vec{F}, \quad \text{όπου } \vec{F} := (F_1, F_2, F_3). \quad (4)$$

Αν $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ είναι οι συνιστώσες μιας παραμετρικοποίησης $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \partial\Omega$, η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε το θεώρημα Gauss γράφεται

$$\begin{aligned} \iint_D [(y_u z_v - z_u y_v) F_1(x, y, z) - (x_u z_v - z_u x_v) F_2(x, y, z) + (x_u y_v - y_u x_v) F_3(x, y, z)] du dv \\ = \iiint_{\Omega} ((F_1)_x + (F_2)_y + (F_3)_z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Εκφράζοντας το επιφανειακό ολοκλήρωμα β' είδους ως επιφανειακό α' είδους, το Θ. Gauss αναδιατυπώνεται ως εξής:

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ είναι ένα κατα τμήματα ομαλό, φραγμένο χωρίο και συμβολίζουμε με $\partial\Omega$ το σύνορό του. Τότε για κάθε $F_1, F_2, F_3 \in C^1(\Omega)$ ισχύει

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = \int_{\Omega} \text{div} \vec{F}, \quad (5)$$

όπου $\vec{F} := (F_1, F_2, F_3)$ και $\vec{\nu}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\partial\Omega$ με φορά προς το εξωτερικό του Ω .

4 Θεώρημα Gauss στο επίπεδο

Το θεώρημα του Gauss στη μορφή (5) γενικεύεται στον $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Συγκεκριμένα, για $n = 1$ είναι το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού, ενώ για $n = 2$ είναι το θεώρημα Green:

ΘΕΩΡΗΜΑ GAUSS ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα κατα τμήματα ομαλό, φραγμένο χωρίο και συμβολίζουμε με $\partial\Omega$ το σύνορό του. Τότε για κάθε $F_1, F_2 \in C^1(\Omega)$ ισχύει

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}, \quad (6)$$

όπου $\vec{F} := (F_1, F_2)$ και $\vec{\nu}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη $\partial\Omega$ με φορά προς το εξωτερικό του Ω .

Αν $x = x(t)$, $y = y(t)$ με $t \in [a, b]$ είναι οι συνιστώσες μιας παραμετρικοποίησης $\vec{\sigma}$, της καμπύλης $\partial\Omega$, τέτοια ώστε σε κάθε σημείο της $\partial\Omega$ το εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{\sigma}'$ να έχει φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, τότε

$$\vec{\nu}(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\vec{\sigma}'(t)\|},$$

και η (6) γράφεται

$$\int_a^b [y'F_1(x, y) - x'F_2(x, y)] dt = \iint_{\Omega} ((F_1)_x + (F_2)_y) dx dy.$$

Αν πάρουμε $\vec{F} = (-F_2, F_1)$, προκύπτει η (2). Επομένως το θεώρημα Green προκύπτει από το θεώρημα Gauss στο επίπεδο.

5 Θεώρημα Stokes (ΕΠΙΚΑΜΠΤΑΙΟ $\leftrightarrow$ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟ)

ΘΕΩΡΗΜΑ STOKES ΓΙΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Έστω S είναι μια προσανατολισμένη επιφάνεια που ορίζεται από μια ένα-προς-ένα παραμετρικοποίηση $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Τότε για κάθε $F_1, F_2, F_3 \in C^1(S)$ ισχύει

$$\int_S \operatorname{curl} \vec{F} = \int_{\partial S} \vec{F}, \quad (7)$$

όπου $\vec{F} := (F_1, F_2, F_3)$ και ∂S είναι το προσανατολισμένο σύνορο της S .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΘΕΩΡΗΜΑ STOKES ΓΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Αν η επιφάνεια S ορίζεται από μια C^1 συνάρτηση $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, τότε η παραμετρικοποίηση $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ με τύπο $\vec{\Phi}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ είναι προφανώς ένα-προς-ένα.