16/05/2025

Απειροστικός Λογισμός IV - Εαρινό 2025

Δεύτερο Σετ Ασκήσεων[1]

Άσκηση 1

Υπολογίστε το $\int_C f$ με $f(x,y,z) = x\sin z$, και C είναι το τμήμα της κυκλικής έλικας με παραμετρικοποίηση $\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, με $t \in [0, 2\pi]$.

Άσκηση 2

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_C f$ με $f(x,y,z) = xyz$, και C είναι το τρίγωνο με κορυφές $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ και $(0,0,3)$.

Άσκηση 3

(A) Να δειχτεί ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$, όπου

$$\vec{F}(x,y) = \Big(\frac{1+y^2}{x^3}, -\frac{1+x^2}{x^2}y\Big), \quad (x,y) \in D := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0\Big\},$$

είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης για όλες τις ομαλές καμπύλες του D.

(B) Να υπολογίσετε το $\int_C \vec{F}$, όπου $\mathcal{C}$ είναι μια ομαλή καμπύλη του D με αρχή το $(1,0)$ και τέλος το $(2,1)$.

Άσκηση 4

Το ίδιο με την προηγούμενη άσκηση για την

$$\vec{F}(x,y,z) = \Big(e^x + 2xy, x^2 + \cos y, 0\Big), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης για όλες τις ομαλές καμπύλες του $\mathbb{R}^3$.

(B) Να υπολογίσετε το $\int_C \vec{F}$, όπου $\mathcal{C}$ είναι μια ομαλή καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με αρχή το $(1,0,1)$ και τέλος το $(2,1,0)$.

[1] **Καταληκτική ημερομηνία παράδοσης 31/05/25.**

Άσκηση 5

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_S f$, όπου

$$f(x,y,z) = x^2z + y^2z, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

και S είναι το τμήμα του επιπέδου

$$\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = \pi + x + y\Big\},$$

που αποκόπτεται από τον κύλινδρο

$$\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 9,\ z \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Άσκηση 6

Υπολογίστε το εμβαδό του τμήματος της επιφάνειας του ελλειπτικού παραβολοειδούς

$$\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 2x^2 + y^2/2\Big\},$$

που αποκόπτεται από τον ελλειπτικό κύλινδρο

$$\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2/4 + y^2/25 = 1,\ z \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Άσκηση 7

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_S f$, όπου

$$f(x,y,z) = x^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

και

$$S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\Big\}.$$

Άσκηση 8

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_S \vec{F}$, όπου

$$\vec{F}(x,y,z) = \Big(4 - (x^2+y^2)^2, 4 - x^2 - y^2, z\Big), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

και

$$S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 2,\ 0 \le z \le 1\Big\}.$$