

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

07/02/2025 - Εμβόλιμη εξέταση στο “Απειροστικός Λογισμός IV” (ΜΥ 4I)

ΘΕΜΑ 1 [1/10]

Υπολογίστε το

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_y^R e^{-x^2} dx dy.$$

ΘΕΜΑ 2 [1,5/10]

Αποδείξτε ότι ο όγκος $V(\mathcal{K}_{h,R})$ που περικλείει ένας κώνος $\mathcal{K}_{h,R}$ ύψους $h > 0$ και ακτίνας $R > 0$ σε αυτό το ύψος, δίνεται από τον τύπο

$$V(\mathcal{K}_{h,R}) = \frac{1}{3} \pi h R^2.$$

(Υπόδειξη: χ.π.τ.γ., πάρτε $\mathcal{K}_{h,R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{R}{h}z, 0 \leq z \leq h\}$.)

ΘΕΜΑ 3 [2/10]

(Α) Ναδειχτεί ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$, όπου

$$\vec{F} = \left(\frac{1+y^2}{x^3}, -\frac{1+x^2}{x^2}y \right), \quad (x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\},$$

είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης για όλες τις ομαλές καμπύλες του D .

(Β) Να υπολογίσετε το $\int_C \vec{F}$, όπου C είναι μια ομαλή καμπύλη του D με αρχή το $(1, 0)$ και τέλος το $(2, 1)$.

ΘΕΜΑ 4 [1/10]

Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_S y$, όπου

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 + xy, (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]\}.$$

ΘΕΜΑ 5 [2/10]

Να επαληθεύσετε το Θ. Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $\vec{F} = (z, x, y)$, στη μισή σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ που κείται πάνω από το xy -επίπεδο.

ΘΕΜΑ 6 [1,25/10+1,25/10=2,5/10]

Χρησιμοποιώντας το Θ. Gauss, υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(i) $\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F},$

$$\text{όπου } \Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2, z \in [0, 1]\},$$

$$\text{και } \vec{F}(x, y, z) := (4 - (x^2 + y^2)^2, 4 - x^2 - y^2, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(ii) $\int_{\partial\Omega} f,$

$$\text{όπου } \Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\},$$

$$\text{και } f(x, y, z) := x^2 z^2 + x^2 y^2 + y^2 z^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists! (\rho, \vartheta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \text{ ώστε } \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα}) = \rho.$$

Επίσης, είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, αρα για κάθε $\rho > 0$ έχουμε μια

Παραμετρικοποίηση κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας ρ :

$$\vec{\sigma}(\vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, 0), \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Είναι τότε

$$\vec{\sigma}'(\vartheta) = \rho(-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0), \quad \vartheta \in [0, 2\pi),$$

επομένως

$$\|\vec{\sigma}'(\vartheta)\| = \rho, \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \exists! (\rho, \vartheta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi) \text{ ώστε } \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα}) = -\rho^2 \sin \varphi.$$

Επίσης, είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, αρα για κάθε $\rho > 0$ έχουμε μια

Παραμετρικοποίηση της σφαίρας κέντρου 0 και ακτίνας ρ :

$$\vec{\Phi}(\vartheta, \varphi) = (\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \rho \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$

Είναι τότε

$$(\vec{\Phi}_\vartheta \times \vec{\Phi}_\varphi)(\vartheta, \varphi) = -\rho^2 \sin \varphi (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi),$$

επομένως

$$\|(\vec{\Phi}_\vartheta \times \vec{\Phi}_\varphi)(\vartheta, \varphi)\| = \rho^2 \sin \varphi, \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$