Απειροστικός Λογισμός IV - Εαρινό 2024

Διδάσκων: Γ. Ψαραδάκης, Γραφείο 118 EMAIL: *gpsaradakis@uowm.gr*

Πρόγραμμα: Τρίτη 09:00-11:00 στη Β5 και Τετάρτη 09:00-12:00 στη Β5

Σύγγραμμα: J. Marsden, A. Tromba - Διανυσματικός Λογισμός, Π.Ε.Κ. 2017

Ύλη: Κεφάλαια 5, 6, 7 και 8

Διάρκεια μαθημάτων: 13 εβδομάδες (19 Φεβρουαρίου - 26 Απριλίου και 13 Μαΐου - 31 Μαΐου)

Ημερολόγιο Μαθήματος

ΤΡΙΤΗ 20/02

§5.1. Διπλό ολοκλήρωμα μη αρνητικής συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ως όγκος στερεού που βρίσκεται κάτω απο το γράφημά της. Αρχή του Cavalieri και εφαρμογή αυτής στον παραπάνω ορισμό διπλού ολοκληρώματος - Θεώρημα Fubini. Βασικά παραδείγματα.

ΤΕΤΑΡΤΗ 21/02

§5.2. Διπλό ολοκλήρωμα φραγμένης συνάρτησης ορισμένης σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ως όριο αθροισμάτων Riemann. Συμβατότητα με τον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος απο το προηγούμενο μάθημα. Οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες (χωρίς απόδειξη). Οι συναρτήσεις που το σύνολο σημείων ασυνέχειάς τους δημιουργείται από πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων, είναι ολοκληρώσιμες (χωρίς απόδειξη). Αναδιατύπωση του Θ. Fubini για συνεχείς συναρτήσεις και για φραγμένες συναρτήσεις που το σύνολο σημείων ασυνέχειάς τους δημιουργείται από πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων. Αιτιολογήσαμε την αποτυχία το Θ. Fubini για τη συνάρτηση $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ στο $[0,1] \times [0,1]$.

ΤΡΙΤΗ 27/02

Ανασκόπηση των ορισμών και θεωρημάτων της προηγούμενης εβδομάδας. Απόδειξη του Θ. Fubini. §5.3 Διπλό ολοκλήρωμα σε πιο γενικά χωρία. Διπλό ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε *χωρία τύπου* 1, *τύπου* 2 *και τύπου* 3: έστω $\phi_1,\ \phi_2 \in C([a,b])$ με $\phi_1 \le \phi_2$ στο $[a,b]$, και $\psi_1,\ \psi_2 \in C([c,d])$ με $\psi_1 \le \psi_2$ στο $[c,d]$, τότε

$$\begin{aligned}
\text{χωρίο τύπου } 1: &\quad \begin{cases} a \le x \le b \\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \end{cases} \\
\text{χωρίο τύπου } 2: &\quad \begin{cases} c \le y \le d \\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \end{cases} \\
\text{χωρίο τύπου } 3: &\quad \text{χωρίο τύπου } 1 \text{ και } 2 \text{ ταυτόχρονα.}
\end{aligned}$$

ΤΕΤΑΡΤΗ 28/02

Ασκήσεις με αλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης από τις παραγράφους §5.3 και §5.4.

ΤΡΙΤΗ 05/03

Εκτιμήσεις διπλών ολοκληρωμάτων. Θεώρημα μέσης τιμής για διπλά ολοκληρώματα. Ασκήσεις και υποδείξεις ασκήσεων πρώτου φυλλαδίου. Λύσαμε την Άσκηση 18 από τη σελίδα 294[1].

[1] $2\int_a^b \int_x^b f(x)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -2\int_a^b f(x)\int_b^x f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(\int_b^x f(y)\mathrm{d}y\right)^2\right]\mathrm{d}x = -\left(\int_b^x f(y)\mathrm{d}y\right)^2\Big|_{x=a}^{x=b} = \left(\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\right)^2$

ΤΕΤΑΡΤΗ 06/03

§5.5 Τριπλό ολοκλήρωμα φραγμένης συνάρτησης ορισμένης σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (μέσω ορίου αθροισμάτων Riemann) και υπολογισμός αυτού μέσω επάλληλων ολοκληρωμάτων. Τριπλό ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε χωρία τύπου I, τύπου II και τύπου III:

$$\begin{aligned} \text{χωρίο τύπου I}: &\quad \gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y)\ \forall\,(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ \text{όπου το } D \text{ είναι τύπου } 1 \text{ ή } 2, \\ \text{χωρίο τύπου II}: &\quad \gamma_1(y,z) \le x \le \gamma_2(y,z)\ \forall\,(y,z) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ \text{όπου το } D \text{ είναι τύπου } 1 \text{ ή } 2, \\ \text{χωρίο τύπου III}: &\quad \gamma_1(x,z) \le y \le \gamma_2(x,z)\ \forall\,(x,z) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ \text{όπου το } D \text{ είναι τύπου } 1 \text{ ή } 2, \\ \text{χωρίο τύπου IV}: &\quad \text{χωρίο τύπου I, II και III ταυτόχρονα.} \end{aligned}$$

Παραδείγματα.

ΤΡΙΤΗ 12/03

Περιγράψαμε ως τύπου I το σφαιρικό καπάκι ύψους h σε σφαίρα ακτίνας $R > h$ (συμβ. S_R^h), και το χωνάκι ύψους t και κλίσης $\lambda > 0$ (συμβ. C_λ^t). Στη συνέχεια υπολογίσαμε τον όγκο τους: όγκος$(S_R^h) = \pi h^2\big(R - \frac{h}{3}\big)$, και όγκος$(C_\lambda^t) = \frac{\pi}{\lambda^2}\frac{t^3}{3}$. Βάλαμε σφαιρικό καπάκι πάνω στο χωνάκι παίρνοντας $t = R - h$. Βρήκαμε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από τη μοναδιαία μπάλα κέντρου $0_{\mathbb{R}^3}$ και το παραβολοειδές $z = \sqrt{2}(x^2 + y^2)$. Λύσαμε την εξής άσκηση του βιβλίου: Δείξτε ότι αν η f είναι συνεχής, τότε

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\text{όγκος}(B_\rho)} \int_{B_\rho} f = f(\text{κέντρου της } B_\rho).$$

ΤΕΤΑΡΤΗ 13/03

§6.1 Η γεωμετρία των απεικονίσεων από τον $\mathbb{R}^2$ στον $\mathbb{R}^2$. Ένα προς ένα και επί, C^1-ομαλές απεικονίσεις απο τον $\mathbb{R}^2$ στον $\mathbb{R}^2$ - Παραδείγματα. §6.2 Παρουσίαση του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών για διπλά και τριπλά ολοκληρώματα, σε αντιπαραβολή με αυτό που γνωρίζουμε για συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Μετασχηματισμός σε πολικές/σφαιρικές συντεταγμένες. Αιτιολόγηση των εξισώσεων και υπολογισμός της ορίζουσας του Ιακωβιανού πίνακα.

ΤΡΙΤΗ 19/03

Το μάθημα δεν έγινε λόγω ανειλημμένων υποχρεώσεων του διδάσκοντα.

ΤΕΤΑΡΤΗ 20/03

Λύσαμε ασκήσεις πάνω στην αλλαγή μεταβλητών σε διπλά και τριπλά ολοκληρώματα.

ΤΡΙΤΗ 26/03

Λύσαμε ασκήσεις από το βιβλίο (§6.2). Υπολογίσαμε τον όγκο του στερεού του Viviani (προκύπτει απο την τομή σφαίρας με ακτίνα a και κυλίνδρου ακτίνας $a/2$ ο οποίος εφάπτεται εσωτερικά της σφαίρας), καθώς και τον όγκο του στερεού του Steinmetz (προκύπτει απο την κάθετη τομή δύο ίδιων κυλίνδρων).

ΤΕΤΑΡΤΗ 27/03

Καμπύλες στον $\mathbb{R}^3$, συνεχείς/παραγωγίσιμες/C^1 καμπύλες, διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης, ταχύτητα καμπύλης, μήκος καμπύλης και αιτιολόγηση του τύπου μέσω απειροστικού λογισμού. Λύσαμε τις ασκήσεις 1-8 της §7.1.

ΤΡΙΤΗ 02/04

§7.1 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης. Ασκήσεις. §7.2 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης - Μέρος 1ο. Ασκήσεις.

ΤΕΤΑΡΤΗ 03/04

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης - Μέρος 2ο. Ασκήσεις.

ΤΡΙΤΗ 09/04

Παραμετρικοποίηση επιφανειών του $\mathbb{R}^3$. Παραδείγματα.

ΤΕΤΑΡΤΗ 10/04

Εμβαδό παραμετρικοποιημένης επιφάνειας. Παραδείγματα.

ΤΡΙΤΗ 16/04

$\S 7.5$ Επιφανειακό ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης. Παραδείγματα. Επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης (ορισμός). Προσανατολισμένες επιφάνειες.

ΤΕΤΑΡΤΗ 17/04

Επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης. Παραδείγματα. Θεώρημα απόκλισης του Gauss στον $\mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3$. Το θεώρημα του Green ως απόρροια του θεωρήματος απόκλισης του Gauss στον $\mathbb{R}^2$.

ΤΡΙΤΗ 23/04

Απόδειξη του θεωρήματος απόκλισης του Gauss στον $\mathbb{R}^3$ για χωρία τύπου I. Το θεώρημα του Green ως απόρροια του θεωρήματος απόκλισης του Gauss στον $\mathbb{R}^2$ (ξανά) και η γενίκευσή του σε μη επίπεδες επιφάνειες - Θεώρημα του Stokes.

ΤΕΤΑΡΤΗ 24/04

Απόδειξη του θεωρήματος του Stokes για επιφάνειες που είναι γραφήματα συναρτήσεων. Παραδείγματα. Θεώρημα του Stokes για παραμετρικοποιημένες επιφάνειες. Παράδειγμα. $\S 8.3$ Συντηρητικά πεδία. Αποδείξαμε ότι για $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, έχουμε $\mathrm{curl}(\vec{F}) = (0, 0, 0)$ στον $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \vec{F} = \nabla f$ για κάποια $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

Καλό Πάσχα!

ΤΡΙΤΗ 14/05

Ασκήσεις βιβλίου με συντηρητικά πεδία και επικαμπύλια ολοκληρώματα διανυσματικών συναρτήσεων.

ΤΕΤΑΡΤΗ 15/05

Ασκήσεις βιβλίου πάνω στο Θεώρημα του Stokes.

ΤΡΙΤΗ 21/05

Ασκήσεις βιβλίου πάνω στο Θεώρημα του Gauss.

ΤΡΙΤΗ 28/05

Ασκήσεις.

ΤΕΤΑΡΤΗ 29/05

Ασκήσεις.

Καλή τύχη στην εξέταση!