29/02/2024

Απειροστικός Λογισμός IV - Εαρινό 2024

Πρώτο Σετ Ασκήσεων[1]

Άσκηση 1

(i) Έστω $f : [a, b] \to [0, \infty)$ είναι συνεχής. Χρησιμοποιήστε την αρχή του Cavalieri για να δείξετε οτι ο όγκος V του χωρίου που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το γράφημα $y = f(x)$, γύρω απο τον x-άξονα, δίνεται απο τον τύπο

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Χρησιμοποιήστε το (i) για να δείξετε οτι ο όγκος της σφαίρας ακτίνας $R > 0$ είναι $4\pi R^3/3$.

Άσκηση 2

(i) Δίνεται η $f(x, y) = \sin x/(1 + x^4y^4)$ ορισμένη στο $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Να δείξετε ότι

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 1) \leq \int_D f \leq 1 - \cos 1.$$

(ii) Δίνεται η $f(x, y) = e^{1+sin(x+y)}$ ορισμένη στο $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Να δείξετε ότι

$$4\pi^2 \leq \int_D f \leq 4(e\pi)^2.$$

(iii) Δίνεται η $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ ορισμένη στο $D = [1, 3] \times [2, 4]$. Να δείξετε ότι

$$4e^5 \leq \int_D f \leq 4e^{25}.$$

(iv) Δίνεται η $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ ορισμένη στον $D_2(0)$, το δίσκο με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα 2. Να δείξετε ότι

$$4\pi \leq \int_{D_2(0)} f \leq 20\pi.$$

Άσκηση 3

Υπολογίστε το $\int_D f$, όπου D είναι το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$, και $f(x, y) = x - y$.

[1] **Παράδοση μέχρι 14/03/24.**

Άσκηση 4

Υπολογίστε το $\int_D f$, όπου D είναι το τρίγωνο που ορίζεται από τις ανισότητες $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le x$, και $f(x,y) = x^3 y + \cos x$.

Άσκηση 5

Υπολογίστε το $\int_D f$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται απο το γραφημα της $y = -x^2 + x$, και τις ευθείες $y = 0, x = 0, x = 2$, και $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + 2$.

Άσκηση 6

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(i) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{x} e^{\frac{x}{y}} \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x$,

(ii) $\int_0^1 \int_0^{(\arcsin y)/y} y \cos(xy) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$.

Άσκηση 7

Να δείξετε ότι

(i) $\int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}} \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e-1)$,

(ii) $\int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e})$,

(iii) $\int_0^1 \int_y^1 e^{\frac{y-x}{y+x}} \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{1}{4}(e - \frac{1}{e})$.

Άσκηση 8

Υπολογίστε το $\int_D f$, όπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \le y \le 1,\ x^2 + y^2 \le 1\}$ και $f(x,y) = y^3 (x^2 + y^2)^{-3/2}$.

Άσκηση 9

Έστω $f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Δείξτε με δυό τρόπους (1ος τρόπος: με ολοκλήρωση κατά μέρη, 2ος τρόπος: με αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης) ότι:

$$\int_0^x \int_0^t f(u) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}t = \int_0^x (x-u) f(u) \, \mathrm{d}u \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$