ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 28/09/2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV (ΜΥ 41)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΨΑΡΑΔΑΚΗΣ

ΘΕΜΑΤΑ (και λύσεις)

ΘΕΜΑ 1

Υπολογίστε:

(i) το εμβαδό της επιφάνειας του μοναδιαίου δίσκου, και

(ii) την περίμετρο του μοναδιαίου δίσκου.

Λύση. (i) Αρκεί να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα $\int_\Omega 1$, όπου Ω είναι ο μοναδιαίος δίσκος με κέντρο το $(0,0)$, δηλαδη

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Με αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες, είναι

$$\int_\Omega 1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \,\mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi} 1 \mathrm{d}\vartheta \int_0^1 \rho \,\mathrm{d}\rho = 2\pi \Big[\frac{\rho^2}{2}\Big]_{\rho=0}^{\rho=1} = \pi.$$

(ii) Αρκεί να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\partial\Omega} 1$, όπου $\partial\Omega$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο το $(0,0)$, δηλαδη

$$\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 = 1\}.$$

1ος τρόπος:
Για τον υπολογισμό του $\int_{\partial\Omega} 1$ χρειαζόμαστε μια παραμετρικοποίηση του $\partial\Omega$. Μια παραμετρικοποίηση είναι η

$$\vec{\sigma}(\vartheta) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta), \text{ όπου } \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Είναι $\|\vec{\sigma}'(\vartheta)\| = 1$, άρα (σύμφωνα με τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α΄ είδους) έχουμε

$$\int_{\partial\Omega} 1 = \int_0^{2\pi} 1 \mathrm{d}\vartheta = 2\pi.$$

2ος τρόπος:

$$\int_{\partial\Omega} 1 = \int_{\partial\Omega} x^2+y^2 = \int_{\partial\Omega} (x,y)\cdot(x,y) = \int_{\partial\Omega} (x,y)\cdot\vec{\nu},$$

όπου $\vec{\nu} = (x, y)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στον κύκλο $\partial\Omega$ με φορά προς το εξωτερικό του. Με εφαρμογή του Θ. Gauss, παίρνουμε

$$\int_{\partial\Omega} 1 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(x, y) = \int_{\Omega} 2 = 2\pi,$$

λόγω (i).

3ος τρόπος: Το εμβαδόν $A(r)$ του δίσκου ακτίνας r, δίνεται από τον τύπο $A(r) = \pi r^2$[1]. Από τον Απειροστικό Λογισμό III (ή II;, ή I;), γνωρίζουμε ότι η περίμετρος του δίσκου ακτίνας r, δίνεται από την παράγωγο $A'(r)$. Όμως $A'(r) = 2\pi r$, επομένως $A'(1) = 2\pi$ είναι η περίμετρος του μοναδιαίου δίσκου. $\square$

ΘΕΜΑ 2

Υπολογίστε το $\iiint_{B_R(0)} e^{-x^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, όπου $B_R(0)$ είναι η μπάλα κέντρου κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας R. Θεωρώντας γνωστό ότι $\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, δείξτε παίρνοντας το όριο $R \to \infty$, ότι $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi^{3/2}$.

Λύση. Με αλλαγή μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες, είναι

$$\begin{aligned}
&\iiint_{B_R(0)} e^{-x^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-\rho^2}\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\vartheta \int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^R e^{-\rho^2}\rho^2\,\mathrm{d}\rho = -2\pi\int_0^R \rho\,\mathrm{d}(e^{-\rho^2}) \\
&= 2\pi\int_0^R e^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho - 2\pi R e^{-R^2},
\end{aligned}$$

όπου εκτελέστηκε ολοκλήρωση κατα μέρη στην τελευταία ισότητα. Επομένως

$$\lim_{R\to\infty}\iiint_{B_R(0)} e^{-x^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^\infty e^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \pi^{3/2}.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi^{3/2}$, άρα και το ζητούμενο. $\square$

ΘΕΜΑ 3

Επαληθεύστε το Θ. Gauss για το τετράγωνο με κορυφές $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$ και $(1, -1)$, και τη συνάρτηση $\vec{F}(x, y) = (x^4, -y^2 - x^3)$.

[1] Αυτό αν θέλετε μπορείτε να το αποδείξετε ακριβώς όπως στο (i) ερώτημα, δηλ.

$$\int_{\Omega} 1 = \int_0^r\int_0^{2\pi}\rho\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_0^r\rho\,\mathrm{d}\rho = \ldots = \pi r^2.$$

Λύση. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{\nu} = \int_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F}, \tag{1}$$

όπου $\vec{F}(x,y) = (x^4, -y^2 - x^3)$, $\Omega = [-1,1]\times[-1,1]$ και $\vec{\nu}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στην καμπύλη $\partial\Omega$ με φορά προς το εξωτερικό του Ω.

• Για το διπλό ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (1), επειδή

$$\big[\mathrm{div}\vec{F}\big](x,y) = \frac{\partial(x^4)}{\partial x} + \frac{\partial(-y^2-x^3)}{\partial y} = 4x^3 - 2y,$$

παίρνουμε

$$\int_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (4x^3 - 2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \Big[x^4 - 2xy\Big]_{x=-1}^{x=1}\mathrm{d}y = -\int_{-1}^{1} 4y\,\mathrm{d}y = 0.$$[2]

• Για να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (1), παρατηρούμε πρώτα ότι

$\vec{\nu}(x,y) = (0,-1)$ για κάθε (x,y) που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{AB}$ που ενώνει τα $A(-1,-1)$ και $B(1,-1)$,

$\vec{\nu}(x,y) = (1,0)$ για κάθε (x,y) που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{BC}$ που ενώνει τα $B(1,-1)$ και $C(1,1)$,

$\vec{\nu}(x,y) = (0,1)$ για κάθε (x,y) που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{CD}$ που ενώνει τα $C(1,1)$ και $D(-1,1)$, και

$\vec{\nu}(x,y) = (-1,0)$ για κάθε (x,y) που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{DA}$ που ενώνει τα $D(-1,1)$ και $A(-1,-1)$.

Επομένως,

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{\nu} = \int_{\overline{AB}} (y^2 + x^3) + \int_{\overline{BC}} x^4 + \int_{\overline{CD}} (-y^2 - x^3) + \int_{\overline{DA}} (-x^4). \tag{2}$$

Για να υπολογίσω κάθε ένα απο τα 4 επικαμπύλια ολοκληρώματα, χρειάζομαστε ισάριθμες παραμετρικοποιήσεις. Τέτοιες είναι οι

$\vec{\sigma}_{\overline{AB}}(t) = (t,-1)$ με $t\in(-1,1)$,

$\vec{\sigma}_{\overline{BC}}(t) = (1,t)$ με $t\in(-1,1)$,

$\vec{\sigma}_{\overline{CD}}(t) = (-t,1)$ με $t\in(-1,1)$,

$\vec{\sigma}_{\overline{DA}}(t) = (-1,-t)$ με $t\in(-1,1)$.

[2] ή, $\int_{\Omega}\mathrm{div}\vec{F} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(4x^3-2y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\big[4x^3y - y^2\big]_{y=-1}^{y=1}\mathrm{d}x = 8\int_{-1}^{1}x^3\,\mathrm{d}x = 0.$

Επομένως (σύμφωνα με τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α' είδους) έχουμε

$$\int_{\overline{AB}}(y^2+x^3)=\int_{-1}^{1}(1+t^3)\|\vec{\sigma}'_{\overline{AB}}(t)\|\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}(1+t^3)\underbrace{\|(1,0)\|}_{=1}\mathrm{d}t=\ldots=2,$$

$$\int_{\overline{BC}}x^4=\int_{-1}^{1}1^4\|\vec{\sigma}'_{\overline{BC}}(t)\|\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\underbrace{\|(0,1)\|}_{=1}\mathrm{d}t=2,$$

$$\int_{\overline{CD}}(-y^2-x^3)=\int_{-1}^{1}(-1+t^3)\|\vec{\sigma}'_{\overline{CD}}(t)\|\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}(-1+t^3)\underbrace{\|(-1,0)\|}_{=1}\mathrm{d}t=\ldots=-2,$$

$$\int_{\overline{CD}}(-x^4)=\int_{-1}^{1}[-(-1)^4]\,\|\vec{\sigma}'_{\overline{DA}}(t)\|\mathrm{d}t=-2.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (2) βλέπουμε ότι $\int_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{\nu}=0$. Αρα τα δύο μέλη της (1) είναι ίσα. □

ΘΕΜΑ 4

Επαληθεύστε το Θ. Stokes για την συνάρτηση $\vec{F}(x,y,z)=(-y^3,x^3,0)$ στην επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2+y^2=\pi$ και $x+y+z=2$.

Λύση. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_S \mathrm{curl}\vec{F}=\int_{\partial S}\vec{F}, \tag{3}$$

όπου $\vec{F}(x,y,z)=(-y^3,x^3,0)$ και S είναι η επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2+y^2=\pi$ και $x+y+z=2$, είναι δηλαδή το κομμάτι του επιπέδου $x+y+z=2$ που έχει για προβολή στο xy-επίπεδο τον κύκλο κέντρου $(0,0)$ ακτίνας $\sqrt{\pi}$. Υπολογίζουμε αρχικά το

$$\left[\mathrm{curl}\vec{F}\right](x,y)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ -y^3&x^3&0\end{vmatrix}=(0,0,3x^2+3y^2)=3(x^2+y^2)\vec{k}.$$

• Για τον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος του αριστερού μέλους της (3), χρειαζόμαστε μια παραμετρικοποίηση της S. Μια παραμετρικοποίηση είναι η

$$\vec{\Phi}(\rho,\vartheta)=(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta,2-\rho\cos\vartheta-\rho\sin\vartheta),\ \text{όπου } (\rho,\vartheta)\in[0,\sqrt{\pi}]\times[0,2\pi).$$

Είναι

$$\left[\vec{\Phi}_\rho\times\vec{\Phi}_\vartheta\right](\rho,\vartheta)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \cos\vartheta&\cos\vartheta&-\cos\vartheta-\sin\vartheta\\ -\rho\sin\vartheta&\rho\cos\vartheta&\rho\sin\vartheta-\rho\cos\vartheta\end{vmatrix}=\rho(1,1,1),$$

άρα (σύμφωνα με τον ορισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος β′ είδους) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_S \mathrm{curl}\vec{F} &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \big[\mathrm{curl}\vec{F}\big](\vec{\Phi}(\rho,\vartheta)) \cdot \big[\vec{\Phi}_\rho \times \vec{\Phi}_\vartheta\big](\rho,\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\rho \\ &= 3\int_0^{\sqrt{\pi}} \rho \int_0^{2\pi} (\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta)\vec{k} \cdot (1,1,1)\, \mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\rho \\ &= 3\int_0^{\sqrt{\pi}} \rho^3 \int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\rho = 6\pi\Big[\frac{\rho^4}{4}\Big]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{\pi}} = \frac{3}{2}\pi^3.\end{aligned}$$

- Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (3), χρειαζόμαστε μια παραμετρικοποίηση της ∂S. Μια παραμετρικοποίηση είναι η

$$\vec{\sigma}(t) = (\sqrt{\pi}\cos t, \sqrt{\pi}\sin t, 2 - \sqrt{\pi}\cos t - \sqrt{\pi}\sin t),\ \text{όπου } t \in [0, 2\pi).$$

Είναι

$$\vec{\sigma}'(t) = (-\sqrt{\pi}\sin t, \sqrt{\pi}\cos t, \sqrt{\pi}\sin t - \sqrt{\pi}\cos t) = \sqrt{\pi}(-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t),$$

άρα (σύμφωνα με τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \vec{F} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{\pi}\int_0^{2\pi} (-\sqrt{\pi}^3\sin^3 t, \sqrt{\pi}^3\cos^3 t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t)\, \mathrm{d}t \\ &= \pi^2 \int_0^{2\pi} (\sin^4 t + \cos^4 t)\, \mathrm{d}t = \pi^2(3\pi/4 + 3\pi/4) = \frac{3}{2}\pi^3,\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (;;). Αρα τα δύο μέλη της (3) είναι ίσα. □

ΘΕΜΑ 5

Επαληθεύστε το Θ. Gauss για την μπάλα ακτίνας R κέντρου $(0,0,0)$, και τη συνάρτηση $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, z)$.

Λύση. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{\nu} = \int_\Omega \mathrm{div}\vec{F}, \tag{4}$$

όπου $\vec{F}(x,y,z) = (-y,x,z)$, $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ και $\vec{\nu}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια $\partial\Omega$ με φορά προς το εξωτερικό του Ω.

- Για το τριπλό ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (4), επειδή

$$\big[\mathrm{div}\vec{F}\big](x,y,z) = \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1,$$

παίρνουμε με αλλαγη μεταβλήτων σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\int_\Omega \operatorname{div}\vec{F} = \int_\Omega 1 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

• Για το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (4), επειδή για κάθε $(x, y, z) \in \partial\Omega$ έχουμε $\vec{\nu}(x, y, z) = \frac{1}{R}(x, y, z)$, παίρνουμε

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} = \frac{1}{R}\int_{\partial\Omega} (-y, x, z) \cdot (x, y, z) = \frac{1}{R}\int_{\partial\Omega} z^2.$$

Για τον υπολογισμό του επιφανειακού αυτού ολοκληρώματος χρειαζόμαστε μια παραμετρικοποίηση της $\partial\Omega$, δηλαδή της σφαίρας κέντρου $(0, 0, 0)$ ακτίνας R. Μια παραμετρικοποίηση είναι η

$$\vec{\Phi}(\vartheta, \varphi) = (R\sin\varphi\cos\vartheta, R\sin\varphi\sin\vartheta, R\cos\varphi), \text{ όπου } (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$

Είναι $\|(\vec{\Phi}_\vartheta \times \vec{\Phi}_\varphi)(\vartheta, \varphi)\| = R^2\sin\varphi$, άρα (σύμφωνα με τον ορισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος α΄ είδους) έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\int_{\partial\Omega} z^2 &= \frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\cos^2\varphi\, R^2\sin\varphi \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi R^3\int_\pi^0 \cos^2\varphi\,\mathrm{d}(\cos\varphi) = 2\pi R^3\left[\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=\pi}^{\varphi=0} = \frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

Αρα τα δύο μέλη της (4) είναι ίσα. □

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \exists!(\rho,\vartheta)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)\ \text{ώστε}\ \begin{cases} x=\rho\cos\vartheta\\ y=\rho\sin\vartheta. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα})=\rho.$$

Επίσης, είναι $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, αρα για κάθε $\rho>0$ έχουμε την ακόλουθη παραμετρικοποίηση της καμπύλης κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας ρ:

$$\vec{\sigma}(\vartheta)=(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta),\qquad \vartheta\in[0,2\pi).$$

Έχουμε

$$\vec{\sigma}'(\vartheta)=\rho(-\sin\vartheta,\cos\vartheta),\qquad \vartheta\in[0,2\pi),$$

επομένως

$$\|\vec{\sigma}'(\vartheta)\|=\rho,\qquad \vartheta\in[0,2\pi).$$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \exists!(\rho,\vartheta,\varphi)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi)\ \text{ώστε}\ \begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\vartheta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\vartheta\\ z=\rho\cos\varphi. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα})=-\rho^2\sin\varphi.$$

Επίσης, είναι $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, αρα για κάθε $\rho>0$ έχουμε την ακόλουθη παραμετρικοποίηση της επιφάνειας σφαίρας κέντρου 0 και ακτίνας ρ:

$$\vec{\Phi}(\vartheta,\varphi)=(\rho\sin\varphi\cos\vartheta,\rho\sin\varphi\sin\vartheta,\rho\cos\varphi),\qquad (\vartheta,\varphi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi).$$

Έχουμε

$$\big(\vec{\Phi}_\vartheta\times\vec{\Phi}_\varphi\big)(\vartheta,\varphi)=-\rho^2\sin\varphi(\sin\varphi\cos\vartheta,\sin\varphi\sin\vartheta,\cos\varphi),\qquad (\vartheta,\varphi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi).$$

Επομένως

$$\|\big(\vec{\Phi}_\vartheta\times\vec{\Phi}_\varphi\big)(\vartheta,\varphi)\|=\rho^2\sin\varphi,\qquad (\vartheta,\varphi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi).$$

ΕΝΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Δίνεται ότι

$$\int_0^{2\pi}\cos^4\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin^4\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}.$$