04/04/2023

Απειροστικός Λογισμός IV - Εαρινό 2023

Δεύτερο Σετ Ασκήσεων[1]

Άσκηση 1

Έστω a είναι μια θετική σταθερή. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται απο τον κύλινδρο $\{x^2+y^2=2ax, z\in\mathbb{R}\}$, το παραβολοειδές $x^2+y^2=az$, και το επίπεδο $z=0$.

Άσκηση 2

Με a, b, c θετικές σταθερές, θεωρούμε το στερεό ελλειψοειδές

$$E := \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid (x_1/a)^2+(x_2/b)^2+(x_3/c)^2\le 1\}.$$

Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3$, στο πρώτο ογδοημόριο (δηλ. $x_1,x_2,x_3\ge 0$) του E.

Άσκηση 3

Έστω $\mathbb{B}^n$, $n\in\{1,2,3\}$, είναι το μοναδιαίο διάστημα/ο μοναδιαίος δίσκος/η μοναδιαία μπάλα κέντρου 0 στον $\mathbb{R}^n$, και ω_n είναι το μήκος/το εμβαδόν/ο όγκος του $\mathbb{B}^n$ [2]. Αν $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{B}^n} f\Big(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\Big)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n = n\omega_n\int_0^1 f(\rho)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho, \qquad n\in\{1,2,3\}.$$

Χρησιμοποιήστε την παραπάνω σχέση για να δείξετε ότι για $a<n$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{B}^n}\Big(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\Big)^{-a}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n = \frac{n\omega_n}{n-a}.$$

Άσκηση 4

Έστω μια σφαίρα ακτίνας R. Κατα μήκος μιας διαμέτρου της σφαίρας ανοίγουμε μια τρύπα ακτίνας $r<R$. Δείξτε ότι ο όγκος του σχήματος που απομένει είναι $\frac{4}{3}\pi(R^2-r^2)^{3/2}$.

---

[1] **Να παραδοθούν το αργότερο μέχρι την Παρασκευή 29/04/23.**

[2] δηλ. $\mathbb{B}^1 := \{x\in\mathbb{R}\mid -1\le x\le 1\}$ με $\omega_1=2$, $\mathbb{B}^2 := \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\mid x_1^2+x_2^2\le 1\}$ με $\omega_2=\pi$, και $\mathbb{B}^3 := \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1\}$ με $\omega_3=(4/3)\pi$

Μια λύση της Άσκησης 4

Έχουμε υπολογίσει στο μάθημα (Τετάρτη 29/03), ότι ο όγκος που περικλείει ένα σφαιρικό καπάκι δίνεται απο τον τύπο:[3] $V_{\sigma\phi.\kappa\alpha\pi.} = \frac{1}{3}\pi(3R-t)t^2$, όπου R είναι η ακτίνα της σφαίρας και t είναι το ύψος που έχει το καπάκι. Επομένως, ο όγκος V του σχήματος που απομένει όταν κατα μήκος μιας διαμέτρου σφαίρας ακτίνας R, ανοίξω μια τρύπα ακτίνας $r < R$, είναι

$$V = V_{\sigma\phi.} - 2V_{\sigma\phi.\kappa\alpha\pi.} - V_{\kappa\upsilon\lambda.},$$

όπου $V_{\kappa\upsilon\lambda.}$ είναι ο όγκος του κυλίνδρου ακτίνας r και ύψους $2h$, δηλαδή $V_{\kappa\upsilon\lambda.} = 2\pi h r^2$, και $V_{\sigma\phi.} = \frac{4}{3}\pi R^3$ είναι ο όγκος της σφαίρας ακτίνας R.
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε ότι $h^2 = R^2 - r^2$, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $V = \frac{4}{3}\pi h^3$.
Από τη γεωμετρία του σχήματος έχουμε ότι $t = R - h$, επομένως

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi R^3 - 2\frac{1}{3}\pi(2R+h)(R-h)^2 - 2\pi h r^2 \\ &= 2\pi h(R^2 - r^2) - \frac{2}{3}h^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi h^3. \end{aligned}$$

[3] αρχή του Cavalieri: $V_{\sigma\phi.\kappa\alpha\pi.} = \int_{R-t}^{R} \pi\sqrt{R^2 - z^2}^2 \mathrm{d}z$