

ΘΕΜΑ 1 [I,25/10]

Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx$.

ΘΕΜΑ 2 [I,25/10]

Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_{\Omega} yz^2 e^{-xyz} dx dy dz$, όπου $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$.

ΘΕΜΑ 3 [I,25/10]

Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, όπου Ω είναι το χωρίο που φράσσεται από τα επίπεδα $x = 0, y = 0, z = 2$ και την επιφάνεια $z = x^2 + y^2$ με $x, y \geq 0$.

ΘΕΜΑ 4 [I,25/10]

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα: $\int_C x^2$, όπου C είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(1, 2, 1)$ στο $(-2, -1, 0)$.

ΘΕΜΑ 5 [I,25/10]

Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_S y$, όπου $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y^2, x \in [0, 1], y \in [0, 2]\}$.

ΘΕΜΑ 6 [I,75/10]

Να επαληθεύσετε το Θ. Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (2x - y, -yz^2, -zy^2)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, και την επιφάνεια $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$.

ΘΕΜΑ 7 [I/10+I/10=2/10]

Χρησιμοποιώντας το Θ. Gauss, υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(i) $\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}$,

όπου $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 1]\}$,

και $\vec{F}(x, y, z) := (1 - (x^2 + y^2)^3, 1 - (x^2 + y^2)^3, x^2 z^2)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) $\int_{\partial\Omega} f$,

όπου $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,

και $f(x, y, z) := 3x + y^2 + z^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists! (\rho, \vartheta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \text{ ώστε } \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα}) = \rho.$$

Επίσης, είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, αρα για κάθε $\rho > 0$ έχουμε μια

Παραμετρικοποίηση κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας ρ :

$$\vec{\sigma}(\vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, 0), \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Είναι τότε

$$\vec{\sigma}'(\vartheta) = \rho(-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0), \quad \vartheta \in [0, 2\pi),$$

επομένως

$$\|\vec{\sigma}'(\vartheta)\| = \rho, \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \exists! (\rho, \vartheta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi) \text{ ώστε } \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\det(\text{Ιακωβιανού πίνακα}) = -\rho^2 \sin \varphi.$$

Επίσης, είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, αρα για κάθε $\rho > 0$ έχουμε μια

Παραμετρικοποίηση της σφαίρας κέντρου 0 και ακτίνας ρ :

$$\vec{\Phi}(\vartheta, \varphi) = (\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \rho \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$

Είναι τότε

$$(\vec{\Phi}_{\vartheta} \times \vec{\Phi}_{\varphi})(\vartheta, \varphi) = -\rho^2 \sin \varphi (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi),$$

επομένως

$$\|(\vec{\Phi}_{\vartheta} \times \vec{\Phi}_{\varphi})(\vartheta, \varphi)\| = \rho^2 \sin \varphi, \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$